

На правах рукописи



Плотников Александр Сергеевич

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ
НАПРЯЖЕНИЙ**

Специальность 1.1.8. – механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2023

Работа выполнена на кафедре теории упругости механико-математического факультета федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ им. М.В. Ломоносова).

Научный руководитель: **Завойчинская Элеонора Борисовна**

доктор физико-математических наук, доцент кафедры теории упругости федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова» (МГУ им. М.В. Ломоносова)

Официальные оппоненты: **Разумовский Игорь Александрович**

доктор технических наук, главный научный сотрудник лаборатории механики разрушения и живучести федерального бюджетного учреждения науки «Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук» (ИМАШ РАН), профессор кафедры «Прикладная механика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Келлер Илья Эрнстович

доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией нелинейной механики деформируемого твёрдого тела «Института механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук» – филиала Федерального государственного бюджетного учреждения науки Пермского федерального исследовательского центра Уральского отделения Российской академии наук (ИМСС УрО РАН)

Ведущая организация:

Акционерное общество «Ордена Ленина Научно-исследовательский и конструкторский институт энерготехники имени Н.А. Доллежала» (АО «НИКИЭТ»)

Защита диссертации состоится 14 февраля 2024 года в 15:30 часов на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 при ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, дом 4, МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=176342.

Автореферат разослан « _____ » _____ 2023 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.07,
кандидат технических наук, доцент



Сердюк Д.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. Определение тензора остаточных напряжений по известным значениям компонент деформаций или перемещений относится к проблемам обратных задач механики деформируемого твердого тела. Остаточные напряжения являются взаимно уравновешенными по любому сечению тела, таким образом любое поле остаточных напряжений по своей природе является неоднородным. Определение таких полей требуется для учёта остаточных напряжений при проектировании конструкций, исследовании упрочняющих поверхностных обработок, оценке сварных соединений, анализе усталостной прочности. Разработка научных подходов к определению неоднородных полей остаточных напряжений является актуальной задачей проблемы безопасной эксплуатации современных инженерных систем.

Существующие методы определения неоднородных остаточных напряжений по результатам измерения компонент тензора деформаций обладают невысокой точностью и неустойчивы к экспериментальным ошибкам из-за малого объёма экспериментальной информации. Более перспективным направлением является использование измерений, генерирующих большие массивы экспериментальной информации, таких как измерения перемещений оптическими методами. Для обработки таких измерений требуется развитие существующих методов определения неоднородных полей остаточных напряжений. Актуальность направления подтверждается ведущимися исследованиями отечественных и зарубежных авторов.

Целью диссертационной работы является разработка подхода к определению трёхмерных неоднородных полей остаточных напряжений по результатам измерений перемещений в упругих изотропных материалах.

Для достижения указанной цели поставлены и решены следующие **задачи**:

1. Анализ существующих подходов по проблеме определения остаточных напряжений, выделение перспективных экспериментальных методов исследования.
2. Разработка подхода к определению трёхмерного неоднородного поля остаточных напряжений по данным измерения перемещений.
3. Подготовка математического аппарата, написание программ для автоматизирования метода вычислений и их проведение.
4. Тестирование разработанного метода и определение области применимости упругих соотношений и требований к точности и объёму входных данных.

Положения, выносимые на защиту:

1. Подход к определению трёхмерного неоднородного поля упругих остаточных напряжений, который состоит из метода определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений и метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений при использовании метода пошагового сверления отверстия.
2. Алгоритм автоматизированного вычисления базовых функций, базовые функции, вычисленные для упругого полупространства, и программа расчёта неоднородных остаточных напряжений.
3. Требования к точности измерения компонент вектора перемещений и числу экспериментальных точек. Результаты исследования области применимости определяющих соотношений теории упругости для нахождения остаточных напряжений.

Научная новизна результатов, представленных в диссертационной работе, заключается в следующем:

1. Метод определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений, являющийся обобщением известного метода определения однородных остаточных напряжений.
2. Новый метод определения неоднородных по глубине остаточных напряжений, основанный на прямом нахождении базовых функций с использованием для повышения точности переопределенной системы уравнений.
3. Новый алгоритм автоматизированного вычисления базовых определяющих функций.
4. Численный эксперимент, подтверждающий работоспособность метода. Серией численных экспериментов показана хорошая точность метода и определена зависимость точности восстановления напряжений от точности измерения перемещений и объёма экспериментальных данных.
5. Область применимости упругой модели в задачах определения остаточных напряжений по результатам измерения перемещений.

Результаты имеют **теоретическую и практическую значимость**. Теоретическая ценность заключается в варианте объяснения природы наблюдаемых экспериментально несимметричных интерферограмм и исследованной зависимости ошибки определения остаточных напряжений от вида плоского напряжённого состояния. Практическая ценность состоит в возможности определения неоднородных полей остаточных напряжений методом сверления отверстий по результатам актуальных на сегодняшний день оптических способов измерения деформаций. Разработанная методика готова к применению и для автоматизации требует языка программирования общего назначения. Измерения могут проводиться в лабораториях и на производствах.

Достоверность полученных результатов диссертационной работы основана на математической строгости и корректности подхода, применении известных численных методов (метод конечных элементов) для решения краевых задач механики деформируемого твердого тела, а также классических методов механики сплошных сред. Достоверность подтверждается совпадением ряда результатов с результатами экспериментальных исследований и численных решений других авторов как качественно, так и количественно, а также положительным исходом численного эксперимента.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах, международных и региональных конференциях:

1. XXVI Международная Инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов МИКМУС-2014 (Москва, 2014).
2. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019).
3. VI Международная научная конференция «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении» (Москва, 2019).
4. XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019) (Москва, 2019).
5. 14th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, MRDMS 2020 (Екатеринбург, 2020).
6. International Conference of Young Scientists and Students "Topical Problems of Mechanical Engineering", ToPME 2019 (Москва, 2019).
7. XXVIII Международный симпозиум им. А. Г. Горшкова (Москва, 2022).
8. V всероссийская научно-практическая конференция «Системы управления полным жизненным циклом высокотехнологичной продукции в машиностроении: новые источники роста» (Москва, 2022).
9. Научная конференция «Ломоносовские чтения – 2022 (секция механики)» (Москва, 2022).
10. Научно-исследовательский семинар имени А. А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Москва, 2022).
11. Научно-исследовательский семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» под рук. проф. РАН Д. В. Георгиевского и д.ф.м.н. М. В. Шамолина (Москва, 2022).
12. XIII всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (Санкт-Петербург, 2023)

Личный вклад. Непосредственно автором:

1. Проведён анализ экспериментально-теоретических исследований по определению однородного и неоднородного остаточного напряжённо-деформированного состояния.
2. Разработан математический аппарат нового метода определения трёхмерного неоднородного остаточного напряжённого состояния.
3. Созданы необходимые для реализации метода алгоритмы и проведены требуемые вычисления.
4. Определены требования к объёму и точности входных данных для обеспечения приемлемой точности определения напряжений.
5. Исследована область применимости определяющих соотношений теории упругости для нахождения остаточных напряжений.

Публикации автора по теме диссертации. Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 18 публикациях. Из них 6 статей опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web Of Science и Scopus. 5 работ опубликованы в журналах из перечня ВАК РФ и входят в RSCI.

Структура и объём работы. Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы из 166 источников и двух приложений. Общий объём диссертации составляет 178 страниц, включая 158 страниц основного текста и приложения на 20 страницах. Работа содержит 50 рисунков и 11 таблиц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность проблемы, сформулирована цель исследования, показана его научная и практическая значимость, перечислены основные результаты, составляющие новизну работы, и положения, выносимые на защиту.

В **первой главе диссертации** дан обзор существующих методов исследования остаточных напряжений. Эти методы разделены на три группы.

Первая группа включает в себя методы, основанные на удалении части материала тела и измерении вызванных этим компонент тензора деформаций или вектора перемещений (механические методы).

Вторая группа содержит методы, в которых измеряется микродеформация кристаллической решётки. В настоящее время эта группа исчерпывается дифракционными методами. Основным достоинством данной группы является возможность бесконтактного измерения компонентов тензора микродеформаций без повреждения образца. При этом определяются

микронапряжения отдельных кристаллитов. Интерпретация этих микронапряжений в качестве макровеличин находится под вопросом.

Третья группа представляет собой комплекс методов, основанных на измерении физических параметров, имеющих корреляционную связь с НДС твердого тела (корреляционные методы). В эту группу входят магнитные, электрические и акустические методы. Достоинством третьей группы также является возможность проведения измерений без повреждения элемента. Методы, входящие в третью группу, требуют предварительного построения калибровочной зависимости, либо определения калибровочных коэффициентов в дополнительном эксперименте.

Имеющаяся нормативная база по вопросам определения остаточных напряжений фрагментарна, не покрывает множество актуальных методов исследования остаточных напряжений и требует развития.

Среди всех рассмотренных классов методов для определения неоднородных полей остаточных напряжений целесообразно применение механических методов. Механические методы, требующие образцов заранее определённых форм, за некоторыми ограничениями, позволяют устанавливать неоднородное поле остаточных напряжений в таких образцах. Для тел произвольной формы целесообразно применять методы освобождения, среди которых широкое распространение получил метод сверления отверстий. Суть метода сводится к высверливанию в объекте исследования отверстия, регистрации возникающих при этом деформаций или перемещений и расчёте напряжений по данным измерениям. Для определения неоднородных полей остаточных напряжений высверливание отверстия производится пошагово с регистрацией деформаций или перемещений на каждом шаге. В настоящее время метод сверления отверстий применяется в сочетании с регистрацией деформаций тензорезистивными датчиками или с регистрацией перемещений оптическими методами измерения (цифровая корреляционная спекл-интерферометрия (ЭЦСИ), корреляция цифровых изображений (КЦИ)). В первом случае, как правило, применяется стандарт ASTM E 837. Текст стандарта и имеющиеся работы свидетельствуют о том, что приведённая в нём методика определения неоднородных напряжений обладает рядом существенных недостатков, основным из которых является низкая точность измерений. Это связано с тем, что решаемая задача относится к классу некорректно поставленных и система линейных уравнений для определения компонент тензора напряжений является плохо обусловленной, что приводит к значительным изменениям в решении при малом изменении входных данных. Для частичного решения этой проблемы применяются методы регуляризации.

Другим перспективным подходом является использование избыточной экспериментальной информации. Его связывают с применением оптических

методов, генерирующих массивы значений перемещений точек поверхности тела. Обработка результатов измерений оптическими методами при определении однородных напряжений выполняется на основании базовых функций, представляющих собой предварительно рассчитанные перемещения точек поверхности тела под действием единичных растягивающих напряжений при образовании в теле отверстия. Разработки аналогичных подходов для неоднородных полей остаточных напряжений ведутся в России и за рубежом.

Во **второй главе** предлагается метод определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений. При проведении измерений методами ЭЦСИ в зоне сварных соединений неоднократно отмечались несимметричные картины перемещений вокруг высверливаемого отверстия. Такой эффект исследователи связывают с наличием значительного градиента напряжений.

Суть метода сводится к дополнению существующего метода определения однородных остаточных напряжений на основании базовых функций членами пропорциональными производным от компонент тензора напряжений. Необходимо рассмотреть два частных случая градиентов. В случае продольного градиента напряжений предполагается, что в теле вблизи поверхности присутствуют остаточные компоненты тензора напряжения σ_x , σ_y , τ_{xy} такие что $\partial\sigma_x/\partial x = -\partial\tau_{xy}/\partial y \neq 0$, $\partial\sigma_x/\partial y = 0$, $\partial\sigma_y/\partial y \neq 0$, $\partial\sigma_y/\partial x = 0$, остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Тогда уравнения для определения остаточных напряжений можно записать в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} p(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} q\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + u_0, \\ v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} q(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} p\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + v_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где функции $f = f(r, \theta)$ и $g = g(r, \theta)$ – это базовые функции, применяемые для определения однородных полей остаточных напряжений, а функции $p = p(r, \theta)$ и $q = q(r, \theta)$ введены дополнительно для учёта градиентной составляющей. Данные функции определяются предварительным конечноэлементным расчётом. Индекс $i=1\dots I$ здесь и далее соответствует порядковому номеру экспериментальной точки.

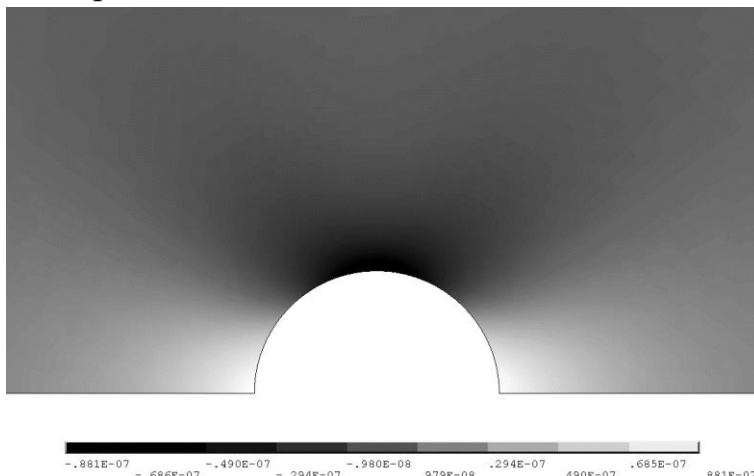
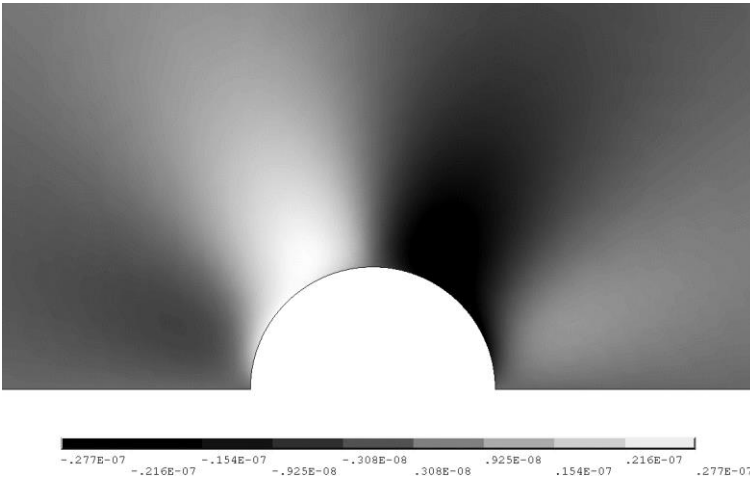


Рис. 1. Результаты расчёта поля $u=u(r, \theta)$ для случая продольного градиента напряжений

Рис. 2. Результаты расчёта поля $v=v(r, \theta)$ для случая продольного градиента напряжений



Второй частный случай – поперечный градиент напряжений. В этом случае предполагается, что $\partial\sigma_x/\partial x = 0$, $\partial\sigma_x/\partial y \neq 0$, $\partial\sigma_y/\partial y = 0$, $\partial\sigma_y/\partial x \neq 0$, остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Уравнения для него записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} s(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} t\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + u_0, \\ v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} t(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} s\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + v_0, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены функции $s = s(r, \theta)$ и $t = t(r, \theta)$ для учёта поперечной градиентной составляющей.

В общем случае действия двух компонент напряжений с ненулевыми производными ($\partial\sigma_x/\partial x = -\partial\tau_{xy}/\partial y \neq 0$, $\partial\sigma_x/\partial y \neq 0$, $\partial\sigma_y/\partial y = -\partial\tau_{yx}/\partial x \neq 0$, $\partial\sigma_y/\partial x \neq 0$, прочие компоненты полагаются нулевыми) уравнения (1) и (2) объединяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} p(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} s(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} t\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad - \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} q\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + u_0, \\ v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} q(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} t(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} s\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} p\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + v_0, \end{aligned} \quad (3)$$

В третьей главе представлен метод определения неоднородных по глубине остаточных напряжений. Деформационный отклик, развивающийся при наращивании несплошности по некоторой траектории, записывается в виде интеграла по этой траектории. В частности, при высверливании отверстия – в виде интегральных операторов Вольтерры 1-го рода:

$$\begin{cases} u(r, \theta, h) = \int_0^h C(r, \theta, h, z) \sigma_x(z) dz, \\ v(r, \theta, h) = \int_0^h S(r, \theta, h, z) \sigma_x(z) dz. \end{cases} \quad (4)$$

Базовые функции $C=C(r, \theta, h, z)$ и $S=S(r, \theta, h, z)$, являющиеся ядрами этих уравнений, определяют касательные компоненты вектора перемещений на поверхности тела ($z=0$) с отверстием глубиной h при приложении на слой, находящийся на глубине z , единичных растягивающих напряжений. Имея ядра уравнений (4), можно построить систему уравнений, связывающую распределение трёх компонент тензора напряжений вдоль траектории наращивания отверстия с историей изменения компонент вектора перемещений в каждой точке области вблизи отверстия на поверхности тела, следующего вида:

$$\begin{cases} u_i(h) = \int_0^h C(r_i, \theta_i, h, z) \sigma_x(z) dz - \int_0^h S\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, h, z\right) \sigma_y(z) dz + \\ \quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^h T_1(r_i, \theta_i, h, z) \tau_{xy}(z) dz + u_0, \\ v_i(h) = \int_0^h S(r_i, \theta_i, h, z) \sigma_x(z) dz + \int_0^h C\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, h, z\right) \sigma_y(z) dz + \\ \quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^h T_2(r_i, \theta_i, h, z) \tau_{xy}(z) dz + v_0, \end{cases} \quad (5)$$

где:

$$\begin{aligned} T_1(r, \theta, h, z) &\equiv C\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) + C\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right) - S\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) \\ &\quad + S\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right), \\ T_2(r, \theta, h, z) &\equiv C\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) - C\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right) + S\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) \\ &\quad + S\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Подход к определению остаточных напряжений сводится к двум задачам: определению базовых функций $C=C(r, \theta, h, z)$ и $S=S(r, \theta, h, z)$ и решению системы (5). Приращения перемещений точек поверхности тела, нагруженного одноосным растягивающим напряжением, при вырезании в нём отверстия можно представить в полярных координатах, связанных с центром отверстия, в виде:

$$\begin{cases} u_r^c(r, \theta) = \frac{\sigma}{4\mu} (U_p(r, h) + U_q(r, h) \cos 2\theta), \\ u_\theta^c(r, \theta) = \frac{\sigma}{4\mu} V_q(r, h) \sin 2\theta. \end{cases} \quad (7)$$

Для приращений перемещений на поверхности тела при нагружении растягивающими напряжениями тонкого слоя в пределах отверстия выражение (7) можно переписать как:

$$\begin{cases} du_r^c(r, \theta, h, z) = \frac{\sigma}{4\mu} (u_p(r, h, z) + u_q(r, h, z) \cos 2\theta) dz, \\ du_\theta^c(r, \theta, h, z) = \frac{\sigma}{4\mu} v_q(r, h, z) \sin 2\theta dz. \end{cases} \quad (8)$$

Тогда базовые функции $C=C(r, \theta, h, z)$ и $S=S(r, \theta, h, z)$ определяются через них в виде:

$$\begin{cases} C(r, \theta, h, z) = \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_r^c(r, \theta, h, z)}{dz} \cos \theta - \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_\theta^c(r, \theta, h, z)}{dz} \sin \theta, \\ S(r, \theta, h, z) = \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_r^c(r, \theta, h, z)}{dz} \sin \theta + \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_\theta^c(r, \theta, h, z)}{dz} \cos \theta. \end{cases} \quad (9)$$

Подставляя (8) в (9) и затем в (6), получим:

$$\begin{cases} C(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \cos \theta}{4\mu} (u_p(r, h, z) - u_q(r, h, z) - 2v_q(r, h, z) + \\ + 2\cos^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))), \\ S(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \sin \theta}{4\mu} (u_p(r, h, z) + u_q(r, h, z) + 2v_q(r, h, z) - \\ - 2\sin^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))). \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} T_1(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \sqrt{2} \sin \theta}{2\mu} (2u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z) - \\ - 2\sin^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))), \\ T_2(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \sqrt{2} \cos \theta}{2\mu} (2u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z) - \\ - 2\cos^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))). \end{cases} \quad (11)$$

Вычислительная сложность задачи нахождения базовых функций может быть снижена путём применения специальных осегармонических конечных элементов. В этом случае действующая нагрузка раскладывается в тригонометрический ряд и вклад каждого члена разложения вычисляется независимо в отдельном расчёте. В случае одноосного растяжения нагрузка раскладывается на две компоненты: осесимметричную и гармоническую второго порядка (см. (7)). Число необходимых для решения задач удваивается, однако размерность каждой задачи снижается за счёт перехода в двумерную постановку.

Для проведения автоматизированных вычислений разработана программа на языке APDL, реализующая автоматическое построение модели с изменяемой глубиной отверстия, серию расчётов с приложенными на каждый из слоёв в пределах отверстия единичными растягивающими напряжениями, нормировку результатов и запись их в файлы. Расчёт выполнялся для модели упругого полупространства. Определённые в результате расчёта функции $u_p=u_p(r, h, z)$, $u_q=u_q(r, h, z)$ и $v_q=v_q(r, h, z)$ зависят от трёх параметров и не могут быть визуализированы в виде поверхностей. Срезы этих функций при нескольких фиксированных значениях глубины h представлены в виде поверхностей на

рис. 3. Используя соотношения (10), возможно вычислить базовые функции $C=C(r, \theta, h, z)$ и $S=S(r, \theta, h, z)$ в любой точке поверхности тела в окрестности отверстия. Тем самым задача определения базовых функций решена.

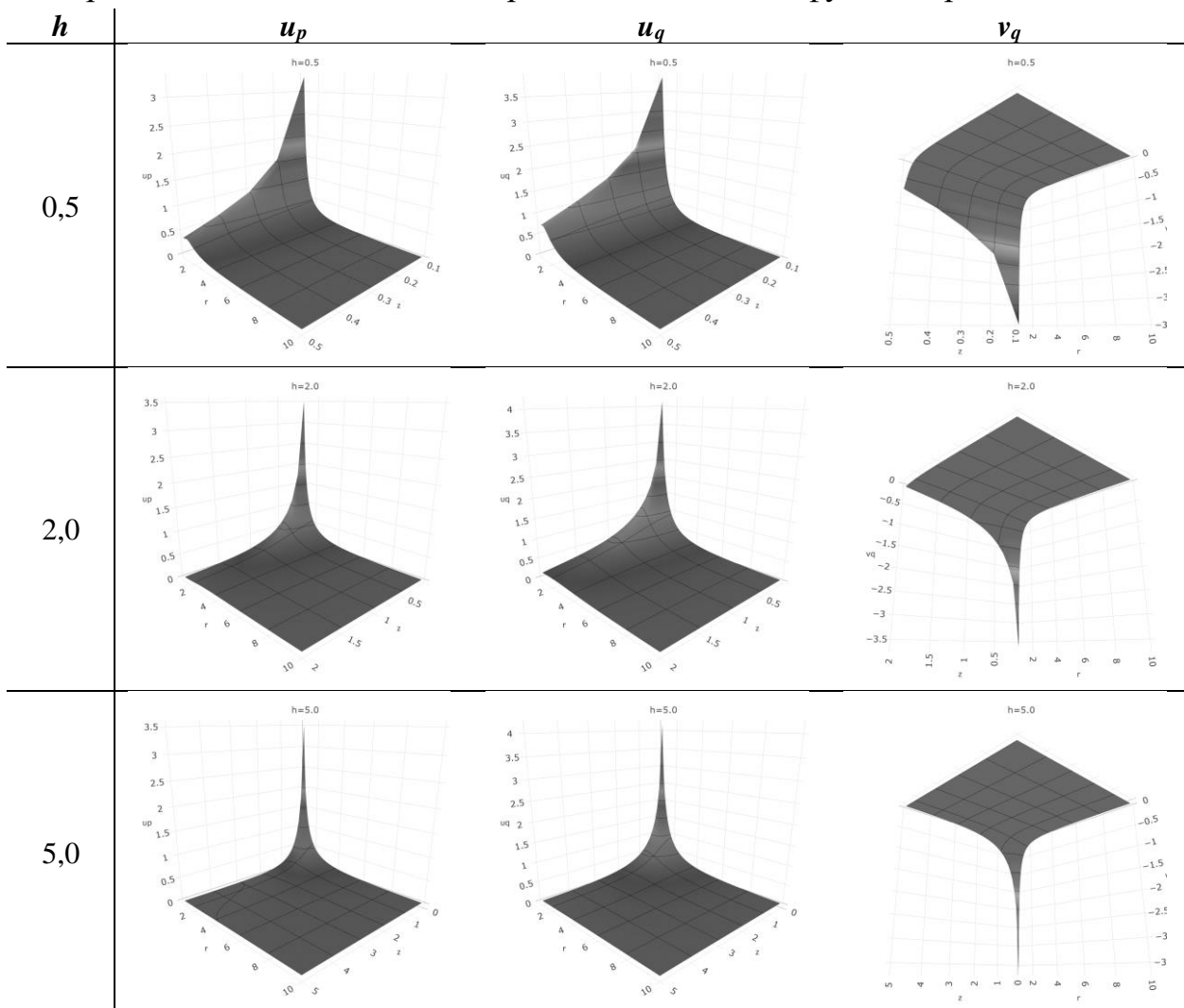


Рис. 3. Срезы функций $u_p=u_p(r, h, z)$, $u_q=u_q(r, h, z)$ и $v_q=v_q(r, h, z)$

Для решения системы (5) положим компоненты напряжений постоянными в пределах шага по глубине отверстия. Тогда система (5) может быть записана как:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_i(z_{j_0}) = u_0 + \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_x^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i, z_{j_0}, z) dz - \\ - \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_y^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_{j_0}, z) dz + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^{J_0} \tau_{xy}^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} T_1(r_i, \theta_i, z_{j_0}, z) dz, \\ v_i(z_{j_0}) = v_0 + \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_x^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i, z_{j_0}, z) dz + \\ + \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_y^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_{j_0}, z) dz + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^{J_0} \tau_{xy}^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} T_2(r_i, \theta_i, z_{j_0}, z) dz. \end{array} \right. \quad (12)$$

Индекс $j=1, \dots, J$ соответствует номеру шага по глубине отверстия, J_0 – номер шага соответствующего измерения. Тогда процедура определения напряжений сводится к решению переопределённой системы линейных уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} u_1^1 \\ v_1^1 \\ u_2^1 \\ \vdots \\ u_2^2 \\ \vdots \\ v_1^J \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} c_1^1(z_1) & \bar{s}_1^1(z_1) & t_1^1(z_1) & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ s_1^1(z_1) & \bar{c}_1^1(z_1) & \bar{t}_1^1(z_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ c_2^1(z_1) & \bar{s}_2^1(z_1) & t_2^1(z_1) & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1^1(z_1) & \bar{s}_1^1(z_1) & t_1^1(z_1) & c_1^1(z_2) & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ s_1^1(z_1) & \bar{c}_1^1(z_1) & \bar{t}_1^1(z_1) & s_1^1(z_2) & \dots & \bar{t}_1^1(z_2) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x^1 \\ \sigma_y^1 \\ \tau_{xy}^1 \\ \sigma_x^2 \\ \sigma_y^2 \\ \vdots \\ \tau_{xy}^J \\ u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где коэффициенты определяются из базовых функций $C=C(r, \theta, h, z)$ и $S=S(r, \theta, h, z)$ численным интегрированием или интегрированием сплайн-аппроксимаций по формулам:

$$\begin{aligned} c_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i, z_n, z) dz; & \bar{c}_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} C\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_n, z\right) dz; \\ s_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i, z_n, z) dz; & \bar{s}_i^n(z_j) &= - \int_{z_{j-1}}^{z_j} S\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_n, z\right) dz; \\ t_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\sqrt{2}}{2} T_1(r_i, \theta_i, z_n, z) dz; & \bar{t}_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\sqrt{2}}{2} T_2(r_i, \theta_i, z_n, z) dz. \end{aligned} \quad (14)$$

Проверка работоспособности метода выполнена в численном эксперименте на примере определения остаточных напряжений, образованных при упругопластическом изгибе бруса. На рис. 4 приведено сравнение восстановленных и истинных компонент тензора напряжений. Сплошной линией показано точное решение, а столбчатой диаграммой – результат восстановления напряжений решением системы (13).

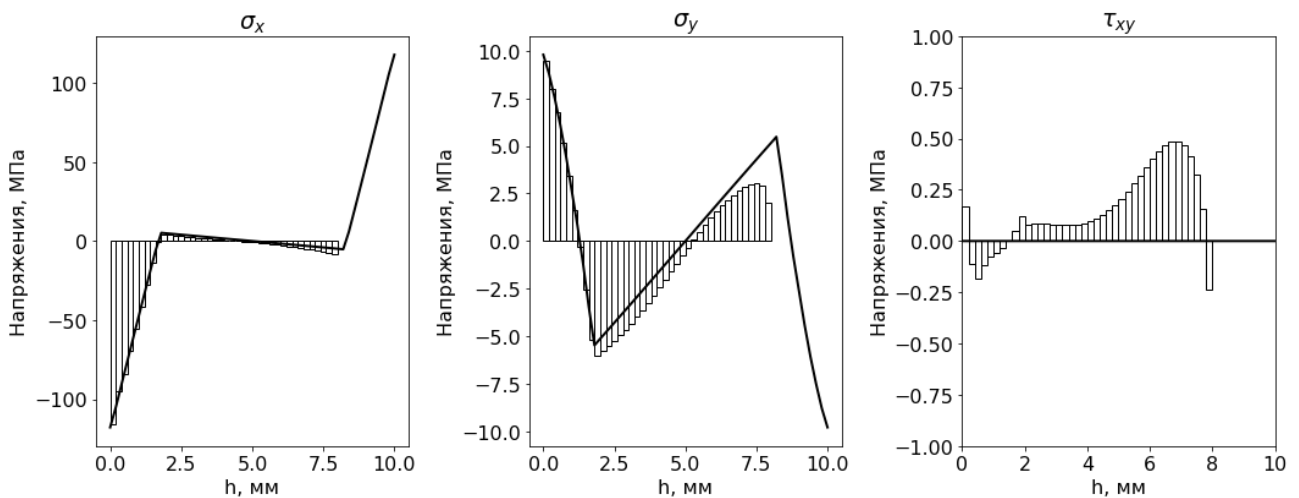


Рис. 4. Результаты восстановления компонент напряжений

Наибольшая по значению компонента σ_x восстанавливается достаточно точно вплоть до глубины 5 мм или $5r_0$. Такой диапазон заведомо превышает диапазон чувствительности современных методов измерения перемещений. Компонента

σ_y точно восстанавливается до глубины 2 мм или $2r_0$, однако следует отметить, что заметная ошибка на более высоких глубинах связана с эффектом малой базы этой компоненты (максимальные значения σ_y составляют менее 10% от значений σ_x). Тот же эффект наблюдается и для компоненты τ_{xy} . На всём диапазоне глубин наблюдается ошибка величиной до $0,5 \text{ МПа}$.

Задача определения распределения напряжений по глубине отверстия по данным измерения перемещений на поверхности тела является некорректно поставленной. Такие задачи неустойчивы к погрешностям измерения, следовательно должны быть определены требования к объёму и точности измерений, позволяющие восстанавливать компоненты напряжений с требуемой точностью до заданной глубины. В качестве входных данных для восстановления компонент тензора напряжений используется массив данных измерений компонент вектора перемещений u_i^j, v_i^j , определённых в точках поверхности тела r_i, θ_i на каждом шаге по глубине j . Для определения требований к точности этих измерений к их значениям добавляется массив численного шума $\Delta u_i^j, \Delta v_i^j$, представляющего собой случайные величины, сгенерированные по нормальному распределению с нулевым средним и варьируемым стандартным отклонением s . В качестве основного параметра, характеризующего точность, принимается стандартное отклонение разности интенсивности напряжений $\Delta \sigma_u$ на каждом шаге по глубине отверстия j , рассчитанное по нескольким реализациям добавленного численного шума.

Тесты проведены при значениях $s = 0,001 \text{ мкм}, 0,005 \text{ мкм}, 0,01 \text{ мкм}$ и $0,05 \text{ мкм}$. Величиной $s = 0,01 \text{ мкм}$ оцениваются экспериментальные погрешности определения компонент вектора перемещений в методе ЭЦСИ. При этом значении проведены тесты по восстановлению компонент тензора напряжений при фильтрации точек. Исключались точки, значения перемещений в которых составляли менее $0,13 \text{ мкм}$ – величины принятой в качестве порога чувствительности метода регистрации компонент перемещений и экспериментальные точки, расположенные в зоне $0,3r_0$ от края отверстия (данное расстояние считается зоной деструкции при сверлении, измерения в которой невозможны). Оставшиеся после процедур фильтрации точки дополнительно подвергались семплированию так, чтобы полный объём измерений составил 75%, 50% и 25% от выборки, получившейся после исключения точек из зоны деструкции и со значениями ниже порога чувствительности. На рис. 5–7 приведены примеры результатов восстановления напряжений при различных параметрах тестов.

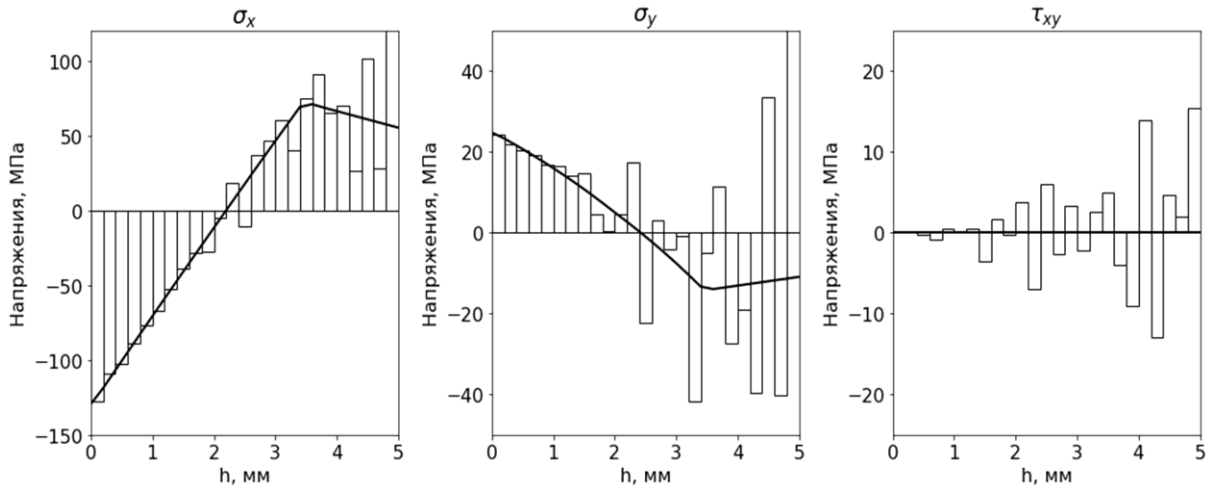


Рис. 5. Результаты восстановления компонент напряжений при $s=0,005$ мкм без дополнительных ограничений на точки

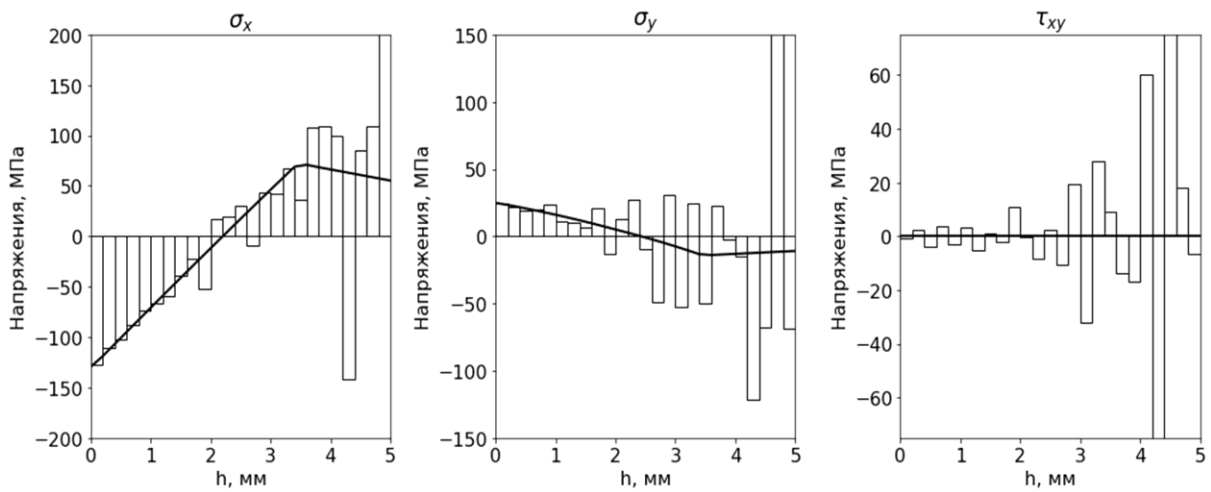


Рис. 6. Результаты восстановления компонент напряжений при $s=0,01$ мкм и исключении точек со значениями ниже порога чувствительности

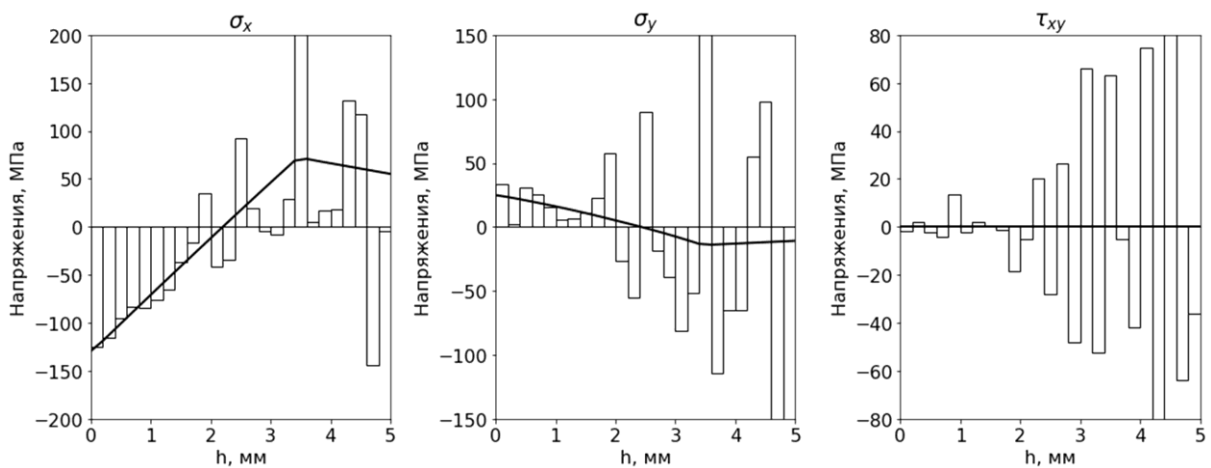


Рис. 7. Результаты восстановления компонент напряжений при $s=0,01$ мкм и выборке 50% от объёма после исключения точек со значениями ниже порога чувствительности и в пределах зоны деструкции

На рисунках 8–10 приведены примеры зависимости стандартного отклонения определяемой интенсивности напряжений $\Delta\sigma_u$ от глубины слоя, на котором определяются напряжения h для тех же сочетаний параметров, что и на рис. 5–7.

Рис. 8. Зависимость $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$ при $s=0,005$ мкм без дополнительных ограничений на точки

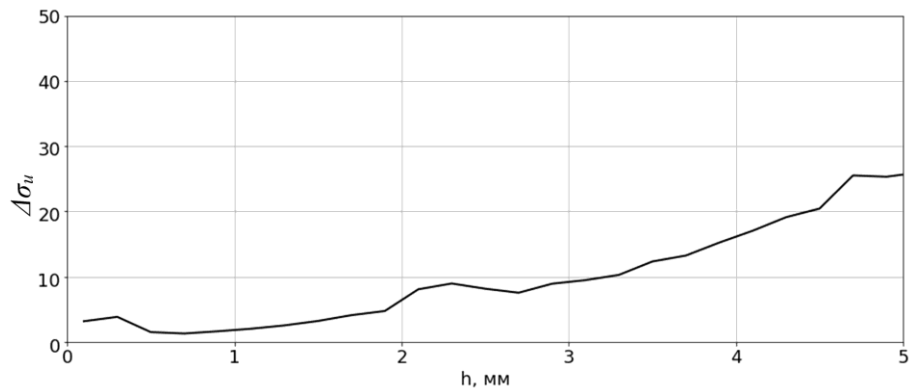


Рис. 9. Зависимость $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$ при $s=0,01$ мкм и исключении точек со значениями ниже порога чувствительности

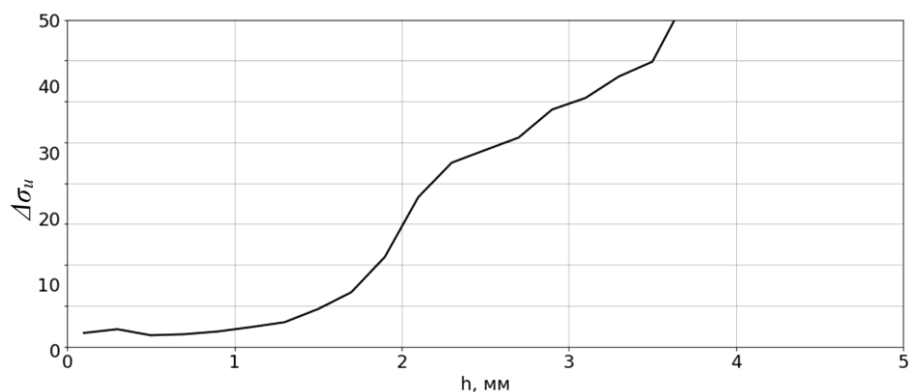
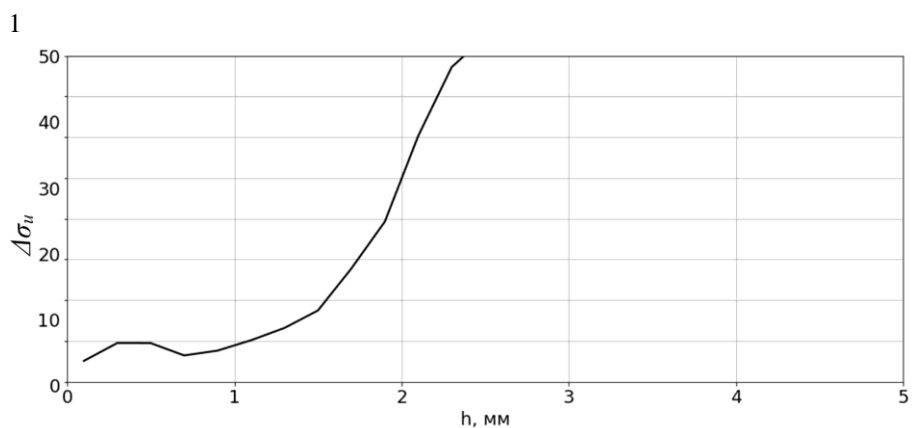


Рис. 10. Зависимость $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$ при $s=0,01$ мкм и выборке 50% от объёма после исключения точек со значениями ниже порога чувствительности и в пределах зоны деструкции



В таблице 1 приведены значения стандартного отклонения определяемой интенсивности напряжений $\Delta\sigma_u$ для различных глубин слоёв и различных параметров тестов. Для типов фильтрации использованы следующие обозначения: *None* – фильтрация отсутствует, *Val* – отфильтрованы значения, меньшие порога чувствительности, *Coord* – отфильтрованы значения в пределах зоны деструкции, *All* – применены оба фильтра сразу. В колонке объёма использованной выборки в скобках указано фактическое число измерений на шаг, полученное после применения фильтрации и семплирования. В колонках со значениями $\Delta\sigma_u$ подчёркиванием выделены значения, не превосходящие величины 10 МПа , использованной в качестве критерия приемлемой точности.

Таблица 1. Влияние фильтрации, объёма и зашумления входных данных на $\Delta\sigma_u$

h/r_0			0,5	1	1,5	2	2,5
s	Фильтрация	Объём выборки	$\Delta\sigma_u$, МПа				
0,0001 мкм	None	100% (2066)	<u>1.1</u>	<u>0.9</u>	<u>1.2</u>	<u>2.1</u>	<u>1.7</u>
0,0005 мкм	None	100% (2066)	<u>1.5</u>	<u>1.8</u>	<u>3.2</u>	<u>6.3</u>	<u>8.1</u>
0,001 мкм	None	100% (2066)	<u>2.1</u>	<u>3.3</u>	<u>5.5</u>	13,9	19,1
0,005 мкм	None	100% (2066)	<u>9.1</u>	17,9	43,6	90,6	121,1
0,001 мкм	Val	100% (570)	<u>2.8</u>	<u>5.4</u>	<u>9.2</u>	29,3	48,1
0,001 мкм	Coord	100% (850)	<u>2.4</u>	<u>4.0</u>	<u>6.7</u>	17,4	21,8
0,001 мкм	All	100% (340)	<u>6.1</u>	<u>5.6</u>	12,5	35,9	55,7
0,001 мкм	All	75% (255)	<u>8.0</u>	<u>6.8</u>	14,2	38,9	70,1
0,001 мкм	All	50% (170)	<u>9.5</u>	<u>8.9</u>	17,5	49,1	84,6
0,001 мкм	All	25% (85)	20,5	14,9	31,8	78,1	128,2

Вносимые в измерения экспериментальные ошибки заметно влияют на точность метода. Характерные для современных методов уровни точности измерений позволяют при достаточном количестве измерений определять напряжения до глубины $h_{lim}=1,5r_0$. Метод слабо чувствителен к выбору расположения конкретных точек проведения измерений. Решающее значение для точности метода имеет количество независимых измерений на каждом шаге по глубине отверстия. С увеличением числа измерений может быть увеличена глубина, до которой выполняются измерения с заранее заданной точностью.

На рисунке 10 построена зависимость предельной глубины измерения h_{lim} от числа измерений на каждом шаге по критерию достижения $\Delta\sigma_u$ значения 10 МПа (критерий приемлемой точности).

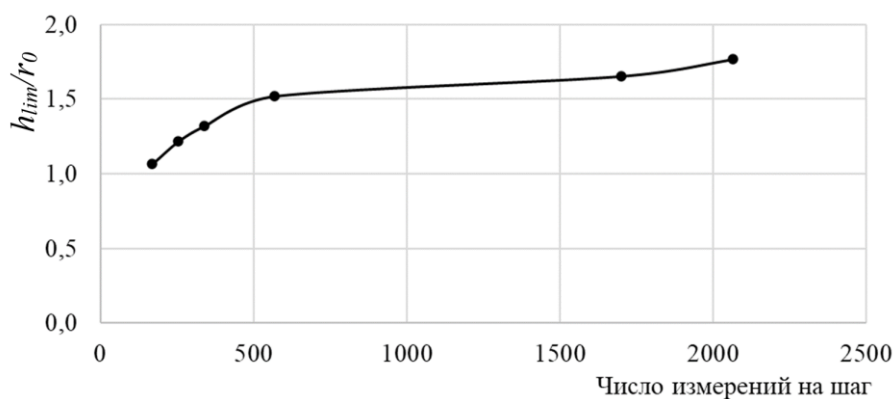


Рис. 10. Зависимость предельной глубины определения напряжений от числа измерений на шаге

В четвёртой главе приведены результаты оценки диапазона применимости упругих определяющих соотношений в задаче определения остаточных напряжений по результатам измерения компонент вектора перемещений.

В тестовом эксперименте в балочном образце, подвергнутом чистому изгибу, проводилось измерение заданных внешней нагрузкой напряжений. Измерения проводились методом сверления отверстий с регистрацией деформаций методом ЭЦСИ и расчётом напряжений по методу обработки для однородного поля. В результате эксперимента (таблица 4) получено, что начиная с некоторого значения действующего напряжения наблюдается рост

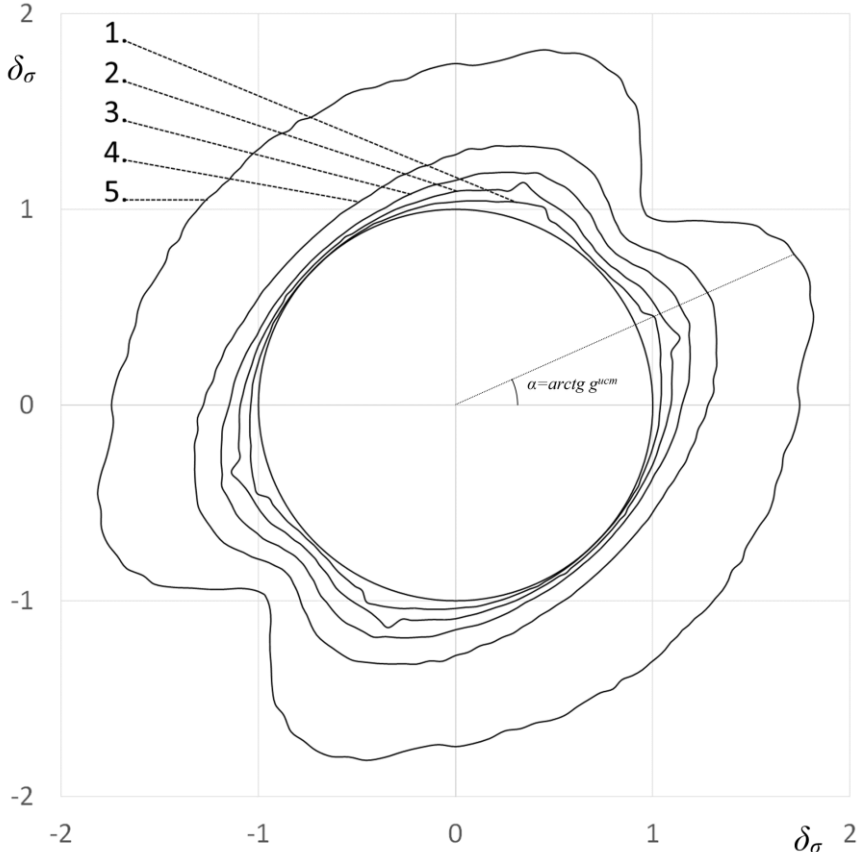
погрешностей определения обеих компонент напряжений выше величины погрешности метода, оцениваемой значением ± 15 МПа.

Таблица 2. Результаты тестового эксперимента

№		1	2	3	4	5	6	7
Задано	σ_1 , МПа	80	110	140	170	200	230	260
	σ_2 , МПа	0						
Восстановлено	σ_1 , МПа	81	112	130	177	191	254	335
	σ_2 , МПа	5	-4	-6	-13	-17	2	20

Получить экспериментальным путём аналогичные результаты при других видах напряженного состояния представляется затруднительным. В связи с этим были выполнены численные эксперименты. Для этого в модели полупространства из упругопластического материала задавались различные комбинации осевых напряжений σ_x и σ_y и проводился расчёт перемещений при постепенном образовании отверстия. Рассматривалась серия задач при разных уровнях интенсивности напряжений $\sigma_i = \beta \sigma_T$, $0,6 \leq \beta \leq 1$ и различном отношении осевых напряжений $g = \sigma_y / \sigma_x$, $g = -1, \dots, 1$.

Рис. 11. Диаграмма ошибок при различных уровнях $(\sigma_i)_{уст}$:
 1 – $0,6\sigma_T$, 2 – $0,7\sigma_T$, 3 – $0,8\sigma_T$, 4 – $0,9\sigma_T$, 5 – $1,0\sigma_T$.



Полученные приращения перемещений рассматривались как экспериментальные данные и обрабатывались по методу определения однородных остаточных напряжений. На рисунке 11 представлена диаграмма ошибок. Каждый замкнутый контур на ней соответствует определенному значению β . Точка на контуре соответствует определённым значениям δ_σ и $g^{уст}$. Диаграмма построена таким образом, что параметр $g^{уст}$ равен тангенсу угла наклона α радиус-вектора, проведенного из начала координат к

рассматриваемой точке $g^{уст} = tga$, а длина радиус-вектора равна величине ошибки δ_σ . Приведенная диаграмма демонстрирует, что для случая чистого сдвига ($g = -1$) значение $\delta_\sigma = 1,1$ имеет место при уровне $\beta = 0,8$, для случаев одноосного растяжения или сжатия ($g = 0$) и равного двухосного растяжения или сжатия ($g = 1$) – при $\beta = 0,7\sigma_T$. Полученный результат хорошо коррелирует с приведенными ранее экспериментальными данными. Можно отметить, что вносимая ошибка изменяется в зависимости от вида напряжённого состояния. Наиболее опасными являются случаи неравного двухосного растяжения или сжатия при $g = 0,25 - 0,35$. Для этих напряженных состояний ошибка δ_σ при $\beta = 0,9$ достигает 40%.

На рисунке 12 представлен график зависимости между истинными отношениями компонент напряжений $g^{уст}$ и восстановленными $g^{восст}$. В целом ошибка определения g не велика и не превышает 11% даже при величине $\beta = 1$.

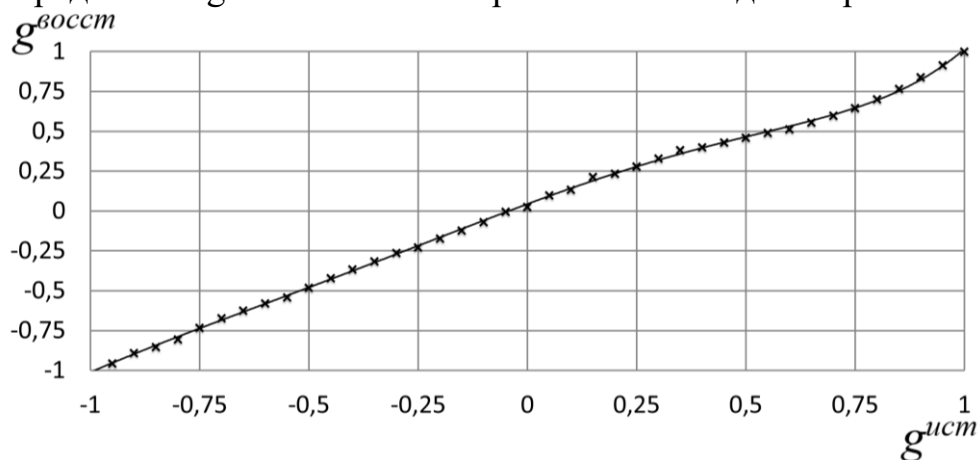


Рис. 12. Зависимость $g^{восст}$ от $g^{уст}$ при $\beta = 1,0$

По результатам проведенных исследований можно положить что при решении обратной задачи определения остаточных напряжений параметр g определяется достаточно точно из решения упругой задачи (максимальная ошибка 11%). При этом интенсивность остаточных напряжений определяется упругим решением до $\beta \leq 0,7$.

В заключении содержатся основные выводы по результатам работы.

В приложениях приведены разработанные алгоритмы и программы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

1. Проведён анализ экспериментальных методов определения остаточных напряжений. Выделены три группы экспериментальных методов: методы измерения компонент тензора деформаций и вектора перемещений при образовании новых поверхностей, методы измерения расстояний между кристаллографическими плоскостями и методы измерения физических величин, имеющих корреляционную связь с напряжённо-деформированным состоянием. Показано, что в настоящее время наиболее эффективным

является метод пошагового сверления отверстий с измерением компонент вектора перемещений оптическими методами с автоматизацией сбора и обработки данных.

2. Предложен подход к определению трехмерного неоднородного поля упругих остаточных напряжений, который состоит из метода определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений и метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений. Подход основан на результатах измерений компонент вектора перемещений оптическими методами при использовании метода пошагового сверления отверстия. Дано теоретическое обоснование предложенного подхода.
3. Определены базовые функции для бесконечной пластины для метода определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений. Представлен алгоритм вычисления базовых функций для метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений. По предложенному алгоритму найдены базовые функции для упругого полупространства. Полученные результаты согласуются с известными опытными данными и расчётными значениями компонент тензора деформаций поверхности тела в зависимости от глубины отверстия по стандарту ASTM E837.
4. Проведено тестирование предложенного метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений. Восстановленные компоненты тензора напряжений хорошо согласуются с известным решением тестовой задачи. Определены требования к точности и объёму экспериментальных данных необходимых для определения остаточных напряжений с заданной погрешностью. Показано, что точность современных оптических методов измерений компонент вектора перемещений является приемлемой для определения неоднородного поля остаточных напряжений согласно рассмотренному подходу. Построена зависимость предельной глубины определения остаточных напряжений при заданной точности их определения от числа измерений компонент перемещений на поверхности.
5. Исследована область применимости определяющих соотношений теории упругости для нахождения остаточных напряжений. Консервативно диапазон достоверных измерений для применения соотношений теории упругости может быть оценён величиной интенсивности остаточных напряжений равной 0,6–0,7 от предела текучести материала. При больших интенсивностях напряжений разница между вносимыми ошибками при чистом сдвиге и при соотношении главных компонент напряжений 0,25–0,35 достигает 40%. Отношение главных компонент остаточных напряжений определяется достаточно точно из решения упругой задачи (ошибка не превышает 11%).

ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Выделены публикации в рецензируемых изданиях, индексируемых в международных базах Web Of Science и Scopus или входящих в перечень ВАК.

1. **Плотников А.С., Осинцев А.В., Щепинов В.П.** Измерение перемещений точек поверхности тела с помощью голографического интерферометра «КОНУС» // Измерительная техника. № 2. 2011. С. 25–28
2. **Plotnikov A.S., Osintsev A.V., Schepinov V.P.** Measurement of the displacements of points on the surface of a body by means of the konus hologram interferometer // Measurement Techniques. Vol. 54. No. 2. 2011. pp. 143–149.
3. **Смирнов М.И., Спиридонов Ю.А., Плотников А.С., Карапетян А.Р.** Расчётные методы определения влияния напряжений на качество резки // Стекло и керамика. 2013. № 1. С. 1–5.
4. **Smirnov M.I., Karapetyan A.R., Spiridonov Y.A., Plotnikov A.S.** Computational methods for determining the effect of stress on cutting quality // Glass and Ceramics. Vol. 70. No. 1-2. 2013. pp. 14–17. DOI: 10.1007/s10717-013-9498-5.
5. Семёнова М.М., Плотников А.С., Одинцев И.Н. Совершенствование методики измерения остаточных напряжений методом зондирующего отверстия // XXVI Международная Инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов МИКМУС-2014. Российская Академия наук; РФФИ; Отделение энергетики, машиностроения, механики и процессов управления; Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Москва. 2015. С. 561–565.
6. **Апальков А.А., Одинцев И.Н., Плотников А.С.** Оценка диапазона достоверных измерений остаточных напряжений методом сверления отверстий // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. Vol. 82. No. 2. 2016. С. 47–52.
7. **Apalkov A.A., Odintsev I.N., Plotnikov A.S.** Estimation of range of reliable measurements of residual stresses by hole drilling method // Inorganic Materials. Vol. 53. No. 15. 2017. pp. 1496–1501. DOI: 10.1134/s0020168517150031.
8. **Одинцев И.Н., Плугатарь Т.П., Плотников А.С.** Практические аспекты применения разрушающих методов определения остаточных напряжений в сочетании с электронной спекл-интерферометрией // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. Уфа. 2019. Т. 3. С. 731–733.
9. **Одинцев И.Н., Плугатарь Т.П., Плотников А.С.** Оценка влияния дробеструйной обработки на распределение остаточных напряжений в поверхностном слое образцов из алюминиевого сплава // Научные труды VI Международной научной конференции «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении». Москва. 2019. С. 297–298.
10. **Каракозов Е.В., Одинцев И.Н., Плотников А.С., Плугатарь Т.П.** Оценка высокоградиентных компонент остаточных напряжений по данным метода сверления зондирующих отверстий // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019). Сборник трудов конференции. Москва. 2020. С. 90–93.

11. **Plugatar T.P., Odintsev I.N., Plotnikov A.S. A study of residual stress distributions in case-hardened material layers // AIP Conference Proceedings. 14th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, MRDMS 2020. Ekaterinburg, 2020. Vol. 2315. pp. 040028. DOI: 10.1063/5.0037301.**
12. **Karakozov E., Odintsev I., Plotnikov A., Plugatar T. Determination of high-gradient components of residual stress by data of test hole drilling method // IOP Conference Series: Materials and Engineering. International Conference of Young Scientists and Students "Topical Problems of Mechanical Engineering", ToPME 2019. Moscow, 2020. Vol. 747. pp. 012019. DOI: 10.1088/1757-899x/747/1/012019.**
13. **Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. Идентификация неоднородных полей остаточных напряжений на основании оптических измерений // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. Москва, 2022. Т. 2. С. 224–241.**
14. **Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. Моделирование неоднородного поля остаточных напряжений при проектировании и изготовлении высокотехнологичной продукции // Системы управления полным жизненным циклом высокотехнологичной продукции в машиностроении: новые источники роста. Материалы V всероссийской научно-практической конференции. Москва, 2022. С. 200–204.**
15. **Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. Об определении неоднородного поля остаточных напряжений на основе измерений компонент вектора перемещений // Ломоносовские чтения. Научная конференция. 18–22 апреля 2022 года. Тезисы докладов. Москва, 2022. Т. Секция механики. С. 73–74.**
16. **Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. О методе определения неоднородного поля остаточных напряжений с использованием цифровой спекл-интерферометрии и метода сверления отверстий // Композиты и наноструктуры. Т. 14, № 1 (53). 2022. С. 16–30. DOI: 10.36236/1999-7590-2022-14-1-16-30.**
17. **Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. О методе идентификации неоднородных полей остаточных напряжений // Вестник Московского университета. Математика. Механика. № 3. 2023. С. 41–47. DOI: 10.55959/MSU0579-9368-1-64-3-7.**
18. **Zavoychinskaya E.B., Plotnikov A.S. On the method for identifying inhomogeneous fields of residual stresses. Moscow University Mechanics Bulletin. Vol. 78. No. 3. 2023. pp. 63–70. DOI: 10.3103/S0027133023030044**