

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**ПЛОТНИКОВ АЛЕКСАНДР СЕРГЕЕВИЧ**



**Определение неоднородных полей остаточных напряжений**

1.1.8 – механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель

доктор ф.-м. н.

Завойчинская Э. Б.

Москва – 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
ГЛАВА 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.....	14
1.1 Механические методы.....	18
1.1.1 Метод Калакуцкого.....	22
1.1.2 Метод Закса.....	23
1.1.3 Метод Давиденкова.....	25
1.1.4 Метод прямого замера прогиба .....	27
1.1.5 Метод столбиков .....	28
1.1.6 Метод сверления отверстий .....	30
1.2 Физические методы.....	57
1.2.1 Дифракционные методы.....	57
1.2.2 Магнитно-электрические методы.....	62
1.2.3 Методы акустоупругости .....	66
1.3 Сравнительный анализ возможностей экспериментальных методов .....	68
1.4 Нормативная документация .....	71
1.5 Выводы по главе 1 .....	72
ГЛАВА 2. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ В ПЛОСКОСТИ ПОЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	75
2.1 Случай продольных градиентов напряжений.....	76
2.2 Случай поперечных градиентов напряжений.....	80
2.3 Общий случай неоднородных в плоскости остаточных напряжений.....	83
2.4 Выводы по главе 2 .....	84
ГЛАВА 3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПО ГЛУБИНЕ ПОЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	85
3.1 Интегральная форма определяющих соотношений.....	85

3.2	Алгоритм автоматизированного вычисления базовых функций .....	87
3.3	Нахождение базовых функций.....	90
3.4	Определение неоднородного поля остаточных напряжений.....	103
3.5	Анализ результатов тестирования метода .....	106
3.6	Обоснование требований к точности и объёму измерений .....	110
3.6.1	Эталонное решение .....	111
3.6.2	Влияние шума.....	114
3.6.3	Влияние фильтрации.....	119
3.6.4	Снижение числа измерений .....	123
3.6.5	Заключение .....	128
3.7	Выводы по главе 3 .....	129
ГЛАВА 4. ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ УПРУГИХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ.....		131
4.1	Тестовый эксперимент .....	131
4.2	Вычислительный эксперимент.....	132
4.3	Результаты вычислений .....	135
4.4	Выводы по главе 4 .....	137
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....		139
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....		142
ПРИЛОЖЕНИЕ А .....		159
ПРИЛОЖЕНИЕ Б.....		163

## ВВЕДЕНИЕ

Определение тензора остаточных напряжений по известным значениям компонент деформаций или перемещений относится к проблемам обратных задач механики деформируемого твердого тела. В общем случае определение неоднородного поля остаточных напряжений требует решения трёхмерных обратных задач термоупругопластичности. Анализ известных результатов теоретических и экспериментальных исследований в этой области приводит к необходимости моделирования трёхмерного неоднородного остаточного напряженно-деформированного состояния.

Это моделирование требует сочетания аналитических и вычислительных методов исследования и связано со значительными трудностями: возможной неединственностью восстановления остаточных напряжений, неустойчивостью этого восстановления по отношению к погрешности входной информации, со сложностями использования известных вычислительных средств методов конечных и граничных элементов. Определяющие соотношения записываются в операторном виде, при обращении которых необходимо использовать методы регуляризации (например, метод Тихонова, метод усеченных сингулярных разложений или проекционный метод). Решение таких задач требует точности измерения компонент тензора деформаций или вектора перемещений.

В данной работе в рамках феноменологического подхода предлагается численно-аналитический метод определения неоднородных остаточных упругих напряжений по компонентам вектора перемещений с автоматизацией обработки данных и результатов. Этот метод в сочетании с экспериментальными данными, полученными методом точечного пошагового сверления отверстий и измерения компонент вектора перемещений оптическими методами – методами цифровой спекл-интерферометрии (DSPI) или корреляции цифровых изображений (DIC) может применяться для расчёта технологических остаточных напряжений в

элементах конструкций. В настоящее время известно небольшое количество работ в этом направлении [1–3], в которых не представлено таких методов. Практически отсутствует нормативная документация по учету полей остаточных напряжений при проектных прочностных расчётах конструкций.

Под остаточным напряженно-деформированным состоянием твердого тела принято понимать его состояние при отсутствии внешних нагрузок и воздействий [4]. Большинство современных технологических процессов, таких как литьё, сварка, обработка металлов давлением, различные способы упрочнения поверхностей, индуцируют различные поля остаточных напряжений.

Анализ причин отказов (рис.1) показывает устойчивый рост случаев, ассоциированных с наличием остаточных напряжений.

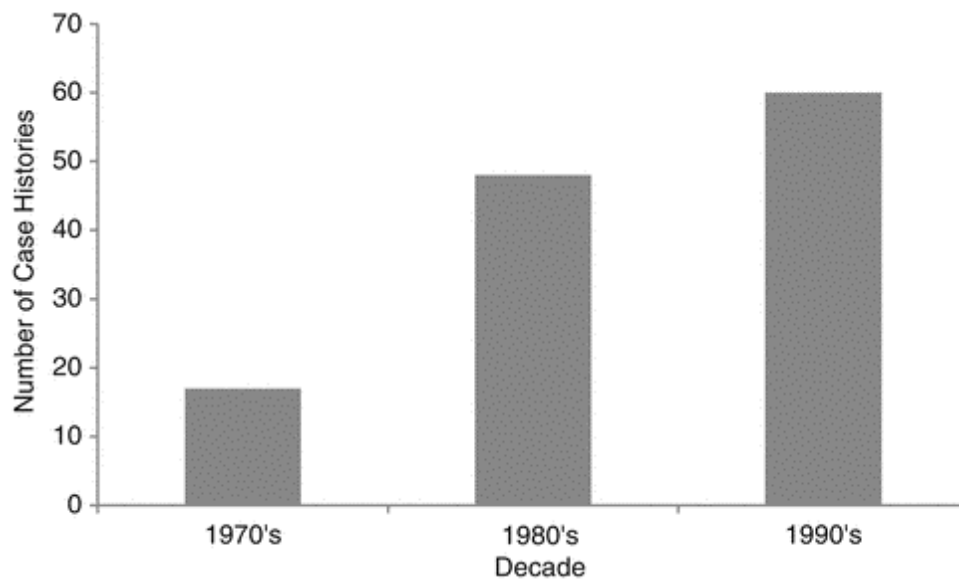


Рис. 1. Случаи отказов, ассоциированных с остаточными напряжениями (иллюстрация из [5])

Максимальные остаточные напряжения в ряде случаев могут достигать значительных величин вплоть до предела текучести материала, что может приводить к разрушению конструкций при хранении или при достаточно низком уровне эксплуатационных нагрузок. Остаточные напряжения могут быть

причиной появления и развития трещин на лобовых стеклах автомобилей, зеркал телескопов, хрустальных изделий; «саморазрушения» огнеупорных блоков стенок стекловаренных печей и др. Остаточные напряжения, сформированные в процессе литья станин металлорежущих станков, могут вызвать остаточное коробление в течение длительного времени хранения.

Основной причиной возникновения макроскопических остаточных напряжений является неоднородность деформированного состояния в различных частях тела [6]. Такая неравномерность может быть вызвана неравномерностью свойств материала (например, коэффициента теплового расширения), пластическим деформированием тела или его части, фазовыми превращениями, неравномерностью усадок при затвердевании и другими причинами.

Остаточные напряжения являются взаимно уравновешенными по любому сечению тела. Фактически любое поле остаточных напряжений является неоднородным, поскольку поверхностные напряжения одного знака уравновешиваются напряжениями противоположного знака в объёме тела, формируя неоднородное поле. Значительный вклад в вопрос определения неоднородных полей остаточных напряжений внесли G. S. Schaer [2, 7], И. А. Разумовский [1, 8], И. Э. Келлер [9, 10], А. О. Ватульян [11, 12] и другие [3].

Совместное действие остаточных напряжений, эксплуатационного нагружения и различных воздействий может иметь как негативный [13], так и положительный характер [14]. Сжимающие остаточные напряжения на поверхности изделий, получаемые при дробеструйной обработке, увеличивают прочность и коррозионную стойкость поверхностного слоя. В случаях, когда целью внешнего воздействия является контролируемое разрушение тела, остаточные сжимающие компоненты напряжений являются нежелательными и могут привести к неконтролируемым процессам разрушений [15]. При

переменном нагружении остаточные поверхностные сжимающие напряжения связывают с повышением усталостной прочности при многоциклового усталости [16], когда трещины зарождаются на поверхности тела, в то же время уравнивающие их остаточные растягивающие напряжения в объёме тела могут ухудшать характеристики гигациклового усталости при зарождении трещин от неоднородностей в объёме тела. Известны примеры хрупкого разрушения металлов (в частности, латунных деталей) в коррозионной среде под действием растягивающих остаточных напряжений. Остаточные напряжения могут являться причиной термического коробления и растрескивания [6], ускорять процессы межкристаллитной коррозии [17].

Особую актуальность имеет проблема остаточных напряжений в сварных соединениях [18, 19]. Сварка как технологический процесс является источником возникновения локального неоднородного остаточного напряженно-деформированного состояния. Известны случаи, когда растрескивание вблизи сварных соединений в коррозионной среде происходило только под действием остаточных напряжений без приложения внешней нагрузки [20]. Существуют примеры разрушений сварных соединений магистральных нефте- и газопроводов, где трещины инициированы сварочными остаточными растягивающими напряжениями околошовной зоны, накладываемыми на эксплуатационное нагружение. Одним из возможных факторов аварии на Чернобыльской АЭС называют технологические растягивающие остаточные напряжения в твэльных трубках.

В технологических процессах поверхностного упрочнения также возникают неоднородные поля остаточных напряжений, имеющие высокие приповерхностные градиенты [21–26], с изменением знака компонент на глубине менее 1 мм от поверхности. Для исследования таких полей требуются специальные экспериментально-теоретические методы, обладающие высокой

чувствительностью как при проведении измерений, так и при интерпретации результатов. Распространившиеся в последние годы оптические методы измерений деформаций отвечают требованиям к чувствительности при регистрации деформаций и уже успешно применяются при измерении остаточных напряжений [27–30]. Однако, в вопросе применения оптических методов измерения перемещений к определению неоднородных полей остаточных напряжений значительно больше внимания уделено технологическим аспектам применения [31–33], нежели математическим методам обработки. Тем не менее, разработка таких методов всё же ведётся [1–3].

Разработка научных подходов к определению неоднородных полей остаточных напряжений является актуальной задачей проблемы безопасной эксплуатации современных инженерных систем [34, 35].

### **Цели диссертационной работы.**

Целью диссертационной работы является разработка подхода к определению трёхмерных неоднородных полей остаточных напряжений по результатам измерений перемещений в упругих изотропных материалах.

Для достижения указанной цели поставлены и решены следующие **задачи**:

1. анализ существующих подходов по проблеме определения остаточных напряжений, выделение перспективных экспериментальных методов исследования;
2. разработка подхода к определению трёхмерного неоднородного поля остаточных напряжений по данным измерения перемещений;



3. подготовка математического аппарата, написание программ для автоматизирования метода вычислений и их проведение;
4. тестирование разработанного метода и определение области применимости упругих соотношений и требований к точности и объёму входных данных.

**Научная новизна** результатов, представленных в диссертационной работе, заключается в следующем:

1. Метод определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений, являющийся обобщением известного метода определения однородных остаточных напряжений.
2. Новый метод определения неоднородных по глубине остаточных напряжений, основанный на прямом нахождении базовых функций с использованием для повышения точности переопределенной системы уравнений.
3. Новый алгоритм автоматизированного вычисления базовых определяющих функций.
4. Численный эксперимент, подтверждающий работоспособность метода. Серией численных экспериментов показана хорошая точность метода и определена зависимость точности восстановления напряжений от точности измерения перемещений и объёма экспериментальных данных.
5. Область применимости упругой модели в задачах определения остаточных напряжений по результатам измерения перемещений.

#### **Теоретическая и практическая значимость.**

Полученные результаты имеют теоретическое и прикладное значение. Теоретическая ценность заключается в варианте объяснения природы наблюдаемых экспериментально несимметричных интерферограмм и исследованной зависимости ошибки определения остаточных напряжений от вида плоского напряжённого состояния. Практическая ценность работы состоит

в возможности определения неоднородных полей остаточных напряжений методом сверления отверстий по результатам актуальных на сегодняшний день оптических способов измерения деформаций. Разработанная методика готова к применению и для автоматизации требует только языка программирования общего назначения. Измерения могут проводиться в лабораториях и на производствах.

### **Методология и методы исследования.**

Фундаментальные основы разработанных методик базируются на положениях механики деформируемого твёрдого тела. Расчёты базисных функций выполнены численно методом конечных элементов в коммерческом коде ANSYS с автоматизацией вычислений при помощи программ на языке APDL. Реализация разработанных методик выполнена на языке программирования общего назначения Python.

### **Положения, выносимые на защиту.**

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Подход к определению трёхмерного неоднородного поля упругих остаточных напряжений, который состоит из: метода определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений, основанного на дополнении известных определяющих соотношений для компонент вектора перемещений членами с производными от главных компонент тензора напряжений, и метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений на основе определяющих соотношений в виде интегральных операторов Вольтерры по результатам измерений компонент вектора перемещений оптическими методами при использовании метода пошагового сверления отверстия.

2. Алгоритм автоматизированного вычисления базовых функций; базовые функции, вычисленные в случае упругого полупространства; программа расчёта неоднородных остаточных напряжений.
3. Требования к точности измерения компонент вектора перемещений и числу экспериментальных точек. Результаты исследования области применимости определяющих соотношений теории упругости для нахождения остаточных напряжений.

### **Достоверность полученных результатов.**

Достоверность результатов диссертационной работы основана на математической строгости и корректности подхода, применении известных численных методов (метод конечных элементов) для решения краевых задач механики деформируемого твёрдого тела, а также классических методов механики сплошных сред. Достоверность подтверждается совпадением ряда результатов с результатами экспериментальных исследований и численных решений других авторов как качественно, так и количественно, а также положительным исходом численного эксперимента.

### **Апробация работы.**

Основные результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах, международных и региональных конференциях:

1. XXVI Международная Инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов МИКМУС-2014 (Москва, 2014) [36].
2. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019) [37].
3. VI Международная научная конференция "Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении" (Москва, 2019) [26].

4. XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019) (Москва, 2019) [38].
5. 14th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, MRDMS 2020 (Ekaterinburg, 2020) [39].
6. International Conference of Young Scientists and Students "Topical Problems of Mechanical Engineering", ToPME 2019 (Москва, 2019) [40].
7. XXVIII Международный симпозиум им. А. Г. Горшкова (Москва, 2022) [41].
8. V всероссийская научно-практическая конференция «Системы управления полным жизненным циклом высокотехнологичной продукции в машиностроении: новые источники роста.» (Москва, 2022) [42].
9. Научная конференция Ломоносовские чтения – 2022 (секция механики) [43].
10. Научно-исследовательский семинар имени А. А. Ильюшина кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (2022).
11. Научно-исследовательский семинар «Актуальные проблемы геометрии и механики» под рук. проф. РАН Д. В. Георгиевского и д.ф.м.н. М. В. Шамолина (2022).
12. XIII всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике (2023).

#### **Публикации автора по теме диссертации.**

Результаты работ автора опубликованы в 53 работах, из которых 18 работ опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web Of Science и Scopus, 13 работ – в журналах входящих в RSCI. Результаты исследований по теме диссертационной работы отражены в 18 публикациях. Из них 6 статей [39, 40, 44–47] опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Web Of Science и Scopus. 5 работ [15, 48–51] опубликованы в журналах из перечня ВАК РФ и входят в RSCI.

7 работ [26, 36–38, 41–43] являются тезисами научных докладов, выполненных на симпозиумах, съездах, семинарах и конференциях.

### **Структура и объём работы.**

Диссертационная работа состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка литературы из 166 источников и двух приложений. Общий объём диссертации составляет 178 страницу, включая 158 страниц основного текста и приложения на 20 страницах. Работа содержит 50 рисунков и 11 таблиц.

### **Личный вклад.**

Непосредственно автором:

1. проведён анализ экспериментально-теоретических исследований по определению однородного и неоднородного остаточного напряжённо-деформированного состояния;
2. разработан математический аппарат нового метода определения трёхмерного неоднородного остаточного напряжённого состояния;
3. созданы необходимые для реализации метода алгоритмы и проведены требуемые вычисления;
4. определены требования к объёму и точности входных данных для обеспечения приемлемой точности определения напряжений;
5. представлена область применимости определяющих соотношений теории упругости для нахождения остаточных напряжений.

## ГЛАВА 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Первые свидетельства обнаружения исследователями остаточных напряжений и их проявлений относятся к первой половине XIX века. По всей видимости, впервые обратили на это внимание французский инженер Г. Пиобер и немецкий металлург В. Людерс [52]. Первые работы, посвящённые исследованию непосредственно остаточных напряжений, принадлежат В. И. Родману (1857) и И. А. Умову (1871) [14]. Начало систематических исследований датировано 1887 годом и связано с работами инженера-металловеда Н. В. Калакуцкого [53], которые были переведены на многие европейские языки [54].

С начала и до середины XX века различными исследователями (например, [55–57]) проводились экспериментально – теоретические исследования по проблемам остаточных напряжённо-деформированных состояний, среди которых особо отмечается серия работ Н. Н. Давиденкова [58–65]. В его работах обсуждаются как причины и общие предпосылки образования остаточных напряжений, так и вопросы их экспериментального определения. Им же впервые была предложена классификация остаточных напряжений по характерным объёмам, в которых происходит их взаимное уравнивание. Согласно этой классификации, для кристаллических материалов выделяются остаточные напряжения:

- первого рода, уравнивающиеся в пределах областей, размеры которых соизмеримы с размерами тела;
- второго рода, уравнивающиеся в областях, характерные размеры которых соизмеримы с размерами зёрен материала;
- третьего рода, уравнивающиеся в областях, характерные размеры которых имеют порядок периодов кристаллической решётки.

Таким образом, в работах Н. Н. Давиденкова [65], как и в работах других авторов [57], выделяются характерные размеры областей взаимного уравнивания напряжений на макро-, мезо- и микроуровнях. Известные альтернативные подходы [66] не получили распространения.

В 1963 году И. А. Биргером выпущена работа [4], в которой обобщены представления о природе остаточных напряжений, а также методах их расчёта и экспериментального определения. Работа И. А. Биргера считается классической, и многие экспериментальные методы, описанные в ней, с некоторыми улучшениями применяются по настоящее время.

Современные исследования остаточного напряженно-деформированного состояния, связанного с изменениями структуры представительного объёма, ведутся на разных масштабных уровнях. Развивая подход Н. Н. Давиденкова [65, 67], можно ввести следующую классификацию остаточных состояний кристаллических тел: на макромасштабном уровне, на мезомасштабном уровне структур размера зёрен (с определением мезодеформаций и мезонапряжений), на микромасштабном уровне внутри зерна и на наномасштабном уровне размеров порядка периодов кристаллической решётки (с определением микродеформаций и микронапряжений).

На микроуровне возникновение остаточных микронапряжений связывается с изменениями неоднородности кристаллического строения внутри зерна, фазовыми превращениями внутри зёрен в процессе кристаллизации и отвердевания в зависимости от термической обработки, изменением объёма отдельных зёрен и изменениями упругих свойств по кристаллографическим осям (упругим микродеформированием), изменением плотности дислокаций и дефектов, в особенности в поверхностных слоях элемента с возможно отличной структурой, фазовым и химическим составом, с искажениями (ротациями)

кристаллической решётки отдельных микрообластей (неупругим микродеформированием). При этом в теле накапливается неравномерно распределенная по объёму упругая энергия, соответственно, уменьшается энергия, необходимая для преодоления энергетического барьера разрыва атомных связей. Остаточные состояния на микро- и наномасштабном уровнях описываются структурными и континуальными дислокационными моделями, структурно-энергетическими моделями, физическими стохастическими моделями и др. Микронапряжения определяются по компонентам упругих и неупругих микродеформаций. В основе структурно-энергетических моделей лежат гипотезы оценки энергии искажения кристаллической решётки, принципы термодинамики, синергетики, структурно-скейлинговых переходов. Физические стохастические модели изучают распределения микронапряжений на основе марковских случайных процессов.

На мезоуровне исследуются механизмы формирования остаточных мезонапряжений в зёрнах. Накопление дефектов, атомов примесей, дислокаций на границах зёрен, особенно в поверхностных слоях, искажают их кристаллическую решётку и порождают неоднородные поля мезодеформаций и мезонапряжений.

На макроуровне применяются прямое тензометрирование при разгрузке объёмов тела, оптические методы. Рассматриваются зависимости компонент тензора деформаций и вектора перемещений от физических характеристик остаточных состояний: эллипсоида коэффициентов преломления Френеля, тензора магнитной проницаемости; данными о Брэгговской дифракции рентгеновских лучей на структуре кристаллической решётки, о дифракции тепловых нейтронов, рассеянию элементарных частиц на кристаллической решётке. Разрабатываются различные феноменологические подходы к



определению остаточных макронапряжений при упругом и неупругом деформировании.

Анализ экспериментально-теоретических результатов приводит к необходимости многоуровневого моделирования остаточного напряженно-деформированного состояния, разработки методов его определения на микро-, мезо- и макроструктурных уровнях.

В целом, известные модели описывают физические закономерности остаточных состояний, взаимодействия дефектов и дислокаций и элементов внутренней структуры в поле микронапряжений. При этом остаются вопросы нахождения остаточных микро- и мезонапряжений, проблема перехода на макроуровень, применения этих моделей в инженерной практике. Применение современных физических методов не дает возможности получить распределение деформаций и перемещений по всему объему при трёхмерном напряженно-деформированном состоянии. Причиной этому, в том числе, является слабое изменение упругих и теплофизических свойств напряженной среды: изменения составляют порядка десятых-сотых долей процента по сравнению с ненапряженными состояниями. Измерять такие изменения необходимо с очень высокой точностью. Возникают проблемы изучения диапазонов достоверных измерений компонент тензора деформаций и вектора перемещений.

При определении остаточного напряженно-деформированного состояния требуется наличие большого объёма экспериментальных данных, полученных с высокой степенью точности. Экспериментальному определению остаточных напряжений физическими методами: дифракционными, акустическими (ГОСТ Р 52731-2007) и электромагнитными (ГОСТ 30415-96); и механическими методами, посвящено обширное количество работ. Представим краткий обзор наиболее распространенных методов.

## 1.1 Механические методы

Механические методы связаны с удалением части материала, вызывающим перераспределение напряжений и, как следствие, регистрируемый деформационный отклик. Остаточные напряжения определяются исходя из измеренного деформационного отклика решением обратной задачи механики деформируемого твёрдого тела. Механические методы включают в себя метод удаления материала и метод регистрации деформационного отклика. Среди методов удаления материала наибольшее распространение получили химическое травление и механическое резание. Среди методов регистрации деформационного отклика можно отметить тензорезистивный метод, метод сеток, метод голографической интерферометрии и прочие когерентно-оптические методы, прямой замер прогиба и др. Следует отметить, что не все из перечисленных методов могут комбинироваться между собой: так, например, метод химического травления подразумевает изменение микрорельефа поверхности, что делает невозможным регистрацию перемещений когерентно-оптическими методами. Недостаток механических методов очевиден: для получения деформационного отклика необходимо нарушение сплошности материала, что может привести к полной потере функциональности объекта исследования.

Основной подход механических методов заключается в следующем. Пусть, в теле  $O$ , на которое не действуют внешние нагрузки, присутствуют остаточные напряжения (рис. 1.1). Рассмотрим сечение этого тела  $I$ , на котором присутствуют ненулевые остаточные напряжения. Сечение  $I$  делит тело на две части:  $A$  и  $B$ . Мысленно отбросим часть тела  $B$  и заменим действие отброшенной части граничными условиями в напряжениях, распределение которых эквивалентно распределению остаточных напряжений в исходном теле.

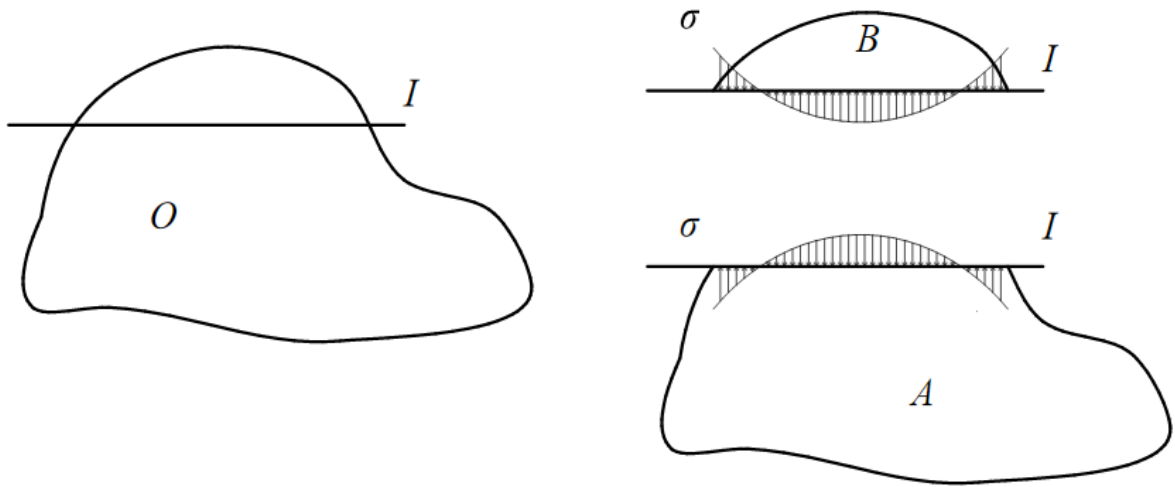


Рис. 1.1. Сечение  $I$  тела  $O$  (слева) и граничные условия на отсечённых частях (справа)

Это распределение напряжений является самоуравновешенным, т. е., имеет нулевые равнодействующие силу и момент. Такое воздействие обеспечивает полную эквивалентность напряжённо-деформированного состояния в точках части  $A$  в составе целого тела  $O$  и в виде отсечённой части с приложенными граничными условиями.

Если теперь физически удалить в теле  $O$  часть  $B$  любым механическим методом, образуется свободная поверхность, на которой напряжения равны нулю. Образование свободной поверхности эквивалентно приложению на поверхность сечения  $I$  напряжений, равных по модулю распределению исходным напряжениям на ней, но противоположным по знаку. При удалении части  $B$  из тела, в оставшейся части  $A$  возникают деформации, которые равны деформациям этой части при приложении к ней на поверхности  $I$  напряжений, равных остаточным напряжениям, действующим на этой поверхности до рассечения, но с противоположным знаком (рис. 1.2).

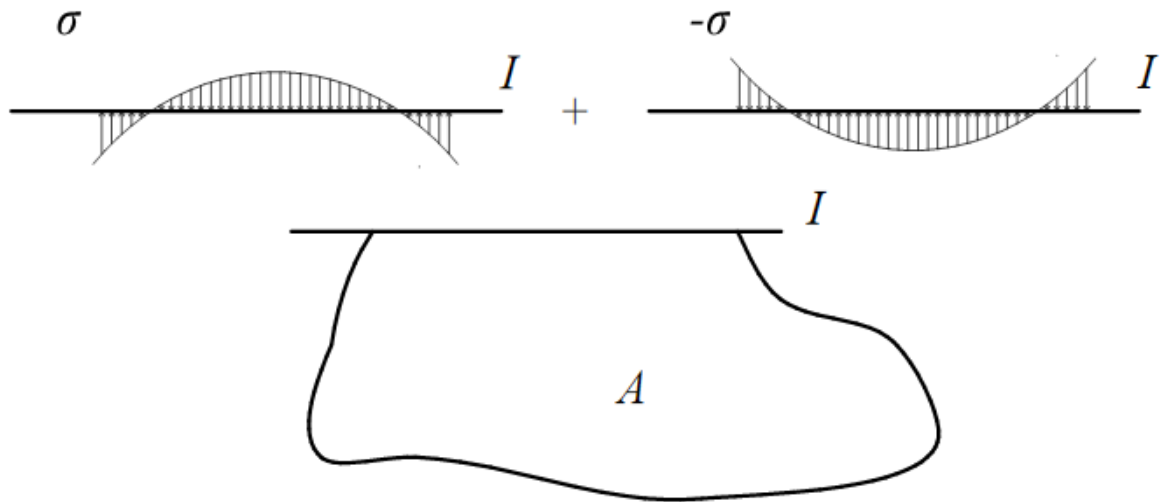


Рис. 1.2. Компенсация напряжений при образовании свободной поверхности

Целью метода, является установление значений исходных остаточных напряжений в точках поверхности  $I$ . Для восстановления исходного распределения в общем случае неоднородного поля остаточных напряжений по измеренным деформациям необходимо решить обратную задачу механики деформируемого твёрдого тела. А именно, по измеренным компонентам тензора деформаций и уравнениям равновесия (равенства нулю равнодействующих сил и моментов) определить тензор остаточных напряжений.

Обратная задача относится к классу некорректно поставленных. Успешное решение таких задач требует сочетания аналитических методов и вычислительных алгоритмов, при этом нет возможности непосредственно применить вычислительные методы, используемые при решении прямых задач [68]. К настоящему времени разработаны различные подходы, позволяющие решать ряд конкретных практических задач определения остаточных напряжений. В рамках этих подходов делаются предположения о характере распределения остаточных напряжений по поверхности; применяются

образцы простых форм, для которых существуют аналитические решения прямых задач; проводятся несколько последовательных сечений и другие приёмы, как в рассмотренных ниже известных механических методах. Приведённый краткий обзор не претендует на полный охват механических методов, приводятся наиболее распространённые или исторически значимые методики.

Как правило, не конкретизируется конкретный метод удаления части тела – вырезка, фрезерование, сверление и т. д. Этому вопросу в литературе не уделено достаточного внимания, несмотря на его существенную важность, так как многие процессы механической обработки материала, применяемые для удаления материала, сами могут служить источником остаточных напряжений и вносить искажения в картину их распределения. (Подразумеваются искажения, вызванные непосредственно самой механической обработкой, а не в результате перераспределения напряжений при образовании свободной поверхности.)

Механические методы могут быть разделены на две большие группы. Первая группа не имеет устоявшегося названия и требует подготовки образцов заранее определённой формы. Это обстоятельство является сдерживающим фактором их масштабного применения. В данной работе эти методы обозначены как «специальные».

Ограничение специальных методов устранено во второй группе методов, получивших название методов освобождения [4]. Методы освобождения позволяют определять остаточные напряжения в приповерхностных слоях изделий произвольной формы. Они основаны на освобождении некоторой малой области от остаточных напряжений заранее определённым «стандартным» методом (вырезом заранее заданной формы) и определении остаточных напряжений по измеренным деформациям или перемещениям, возникшим в

результате такого освобождения. К классу методов освобождения относятся метод вырезания столбиков и метод сверления отверстий.

### 1.1.1 Метод Калакуцкого

Исторически первый способ измерения остаточных напряжений принадлежит Н. В. Калакуцкому. В своей работе [53] в 1887 году он предложил метод измерения остаточных напряжений в дисках, основанный на разрезании диска на систему колец. Измерению подлежало изменение диаметра каждого кольца при его вырезке из диска. Измерения предлагалось проводить посредством оптических приборов, наблюдая изменение положения системы меток, нанесённых на поверхность диска до его разрезки.

Для пересчёта измеренных величин в деформации Н. В. Калакуцкий воспользовался упругими определяющими соотношениями в цилиндрических координатах. Он полагал, что распределение остаточных напряжений имеет осевую симметрию, толщина диска мала по сравнению с его радиусом и не превышает высоты сечения каждого кольца, в связи с чем пренебрегают осевыми напряжениями. Окружные и радиальные напряжения являются главными и полностью характеризуют напряжённое состояние в теле.

Для определения окружной и радиальной компонент напряжений были получены следующие выражения:

$$\sigma_r(r) = \frac{1}{r^{1-\mu}} \int_r^{R_2} \frac{E\varepsilon_\theta(r_1)}{r_1^\mu} dr_1; \quad (1.1)$$

$$\sigma_\theta(r) = \mu\sigma_r(r) - E\varepsilon_\theta(r)$$

В формулах (1.1)  $R_2$  – наружный радиус диска,  $r$  – срединный радиус вырезанного кольца,  $E$  – модуль Юнга,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\varepsilon_\theta$  – окружная деформация, возникающая при вырезке кольца. При выводе формулы (1.1)

предполагалось, что кольца отрезаются с наружной стороны диска по направлению к центру (учтены граничные условия  $\sigma_r(R_2)=0$ ).

Метод, предложенный Калакуцким, не получил широкого распространения из-за специфичности объекта исследования и упрощённого подхода к решению. Однако на основании этого метода был предложен ряд методик [4], с использованием в качестве объекта исследования диска, но с другими подходами к проведению измерений и определению остаточных напряжений.

### 1.1.2 Метод Закса

Г. Заксом в 1927 году в работе [69] был предложен метод определения остаточных напряжений в деталях цилиндрической формы. Достоверно неизвестно, использовал ли Закс подход, предложенный Калакуцким, или разработал свою методику полностью самостоятельно.

Как и у Калакуцкого, предполагается, что в образцах цилиндрической формы присутствуют радиальные, окружные и осевые компоненты. Так как на свободных торцевых поверхностях осевые напряжения равны нулю, картина напряжённого состояния вблизи торцов искажена относительно центральных сечений. Радиальные напряжения малы по сравнению с осевыми и окружными напряжениями по тем же причинам, однако их учёт является существенным при рассмотрении условий равновесия в образце. Предполагается, также, что распределение остаточных напряжений характеризуется осевой симметрией. Вследствие этого площадки меридиональных сечений являются главными площадками тензора напряжений. Считается, что в центральных сечениях, удалённых от искажённых торцевых зон, отсутствуют касательные напряжения в осевом направлении. Это автоматически делает все рассматриваемые напряжения главными.

Длина образца в исследовании выбирается таким образом, чтобы длина «рабочей» центральной части превышала длину искажённых участков, при этом длина искажённых участков, приближённо оценивается радиусом цилиндра. В соответствии с предложенной Заксом методикой, такой образец постепенно растачивается с внутренней поверхности. С наружной поверхности производится измерение относительных деформаций любым доступным способом, например, при помощи тензорезистивных датчиков. Для компонент тензора напряжений Заксом были получены следующие формулы:

$$\begin{aligned}\sigma_r(r) &= \frac{E}{1-\mu^2} \frac{R_2^2 - r^2}{2r^2} [\varepsilon_{\theta 2}(r) + \mu \varepsilon_{z 2}(r)]; \\ \sigma_z(r) &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{R_2^2 - r^2}{2r^2} \left( \frac{d\varepsilon_{z 2}(r)}{dr} + \mu \frac{d\varepsilon_{\theta 2}(r)}{dr} \right) - \varepsilon_{z 2}(r) - \mu \varepsilon_{\theta 2}(r) \right]; \\ \sigma_z(r) &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{R_2^2 - r^2}{2r^2} \left( \frac{d\varepsilon_{\theta 2}(r)}{dr} + \mu \frac{d\varepsilon_{z 2}(r)}{dr} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{R_2^2 + r^2}{2r^2} (\varepsilon_{\theta 2}(r) + \mu \varepsilon_{z 2}(r)) \right]\end{aligned}\tag{1.2}$$

Здесь применяются следующие обозначения:  $R_2$  – наружный радиус цилиндра,  $r$  – радиус, до которого произведена расточка,  $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\varepsilon_{z 2}$  и  $\varepsilon_{\theta 2}$  – соответственно осевая и окружная деформации, возникшие при расточке до радиуса  $r$ .

В целом подход Закса основан на тех же предпосылках, которые использовал Калакуцкий, и это характерно для всех подходов к определению остаточных напряжений механическими методами. Метод Закса получил массу модификаций и послужил основой для множества других методик определения компонент тензора напряжений в образцах с осевой симметрией. Некоторые из них приведены в [4].



### 1.1.3 Метод Давиденкова

В 1931 году Н. Н. Давиденков опубликовал две работы, в которых сначала предложил [58], а затем и опробовал [59] новый подход к определению остаточных напряжений в трубах.

Если методы, предложенные Калакуцким, Заксом и основанные на них слабо отличались друг от друга, различаясь способами измерения компонент окружных деформаций, то в методе Давиденкова предлагалось существенное нововведение, заключающееся в разрезке трубчатого образца по образующей и измерения его раскрытия. В результате чего становилось возможным сразу определить интегральную характеристику окружных остаточных напряжений – их суммарный окружной момент  $M_p$ . Кроме того, для измерения величины раскрытия не требовалось применения оптических приспособлений или тензорезисторов. Величины раскрытия, составляющие от долей до единиц миллиметров доступны к измерению посредством простых измерительных средств, например штангенциркуля, или микрометра.

К трубчатому образцу длины  $l$  применимы те же рассуждения относительно краевых зон, которые обсуждались применительно к методу Закса. Величина  $l$  выбирается таким образом, чтобы длина неискажённой части превышала длину участков, искажённых краевыми эффектами. В частности, в [4] приводится следующее требование для величины  $l$ :

$$l > 12\sqrt{R_m h} \quad (1.3)$$

Здесь  $R_m$  – срединный радиус трубы, а  $h$  – толщина её стенки. После разрезки трубы по образующей она раскрывается под действием дополнительных компенсирующих напряжений на новых свободных поверхностях. Как уже отмечалось, дополнительные компенсирующие напряжения равны по модулю и противоположны по знаку окружным остаточным напряжениям в стенке трубы.

Величина интегрального окружного изгибающего момента  $M_p$ , созданного этими напряжениями, связана с величиной раскрытия (изменения диаметра трубы)  $\delta_p$  соотношением:

$$M_p = \frac{2EJ}{(1 - \mu^2)D_m^2} \delta_p. \quad (1.4)$$

В формуле (1.4)  $E$  – модуль упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $J$  – момент инерции стенки трубы,  $D_m$  – срединный диаметр трубы.

Далее, производится послойное удаление слоёв трубы. Каждый удалённый слой изменяет эпюру окружных напряжений, а значит эквивалентен приложению дополнительного момента, под действием которого происходит изменение величины раскрытия  $\delta$ . Применительно к методу Давиденкова наибольшее распространение получил способ удаления слоёв путём химического травливания. Произведя удаление слоёв на общую толщину  $a$  и имея зависимость раскрытия от толщины удалённых слоёв начиная от начального  $\delta_p$  и до конечного  $\delta = \delta(a)$ , можно определить окружную компоненту напряжений в каждом из слоёв в виде [4]:

$$\sigma_\theta(a) = \pm \left\{ 2 \frac{E \delta_p}{(1 - \mu^2) D_m^2} \left( \frac{h}{2} - a \right) - \frac{1}{3} \frac{E (h - a)^2}{(1 - \mu^2) D^2(a)} \frac{d\delta}{da} + \frac{2E}{3(1 - \mu^2)} \int_0^a \frac{2h - 3a + \xi}{D^2(\xi)} \frac{d\delta}{d\xi} d\xi \right\} \quad (1.5)$$

Знак «+» в формуле (1.5) соответствует снятию слоёв с наружной стороны трубы, а знак «-» – с внутренней.

Для проведения вычислений по формуле (1.5) необходимо вычисление значений производной раскрытия по толщине удалённых слоёв и интеграла раскрытия по приращению удалённого слоя. Для этого в процессе эксперимента составляется таблица зависимости раскрытия от суммарной толщины удалённых

слоёв, после чего зависимость аппроксимируется аналитическим выражением и производятся необходимые вычисления.

Метод Давиденкова широко используется по настоящее время и получил развитие. Метод также включает в себя процедуру определения осевых компонент остаточных напряжений на образцах, вырезанных из трубы вдоль образующей. Однако здесь он не приведён, так как входит в более общий метод прямого замера прогиба.

#### **1.1.4 Метод прямого замера прогиба**

Метод прямого замера прогиба описан в [4] и фактически представляет собой развитие и обобщение метода Давиденкова в части определения осевых компонент напряжений. В качестве основного образца в этом методе применяется брус прямоугольного поперечного сечения. Предполагается, что в таком брусе присутствуют только осевые остаточные напряжения, не изменяющиеся по его длине, за исключением торцевых областей. Напряжённое состояние в каждом продольном волокне бруса полагается одноосным. Так как на свободных боковых поверхностях напряжения равны нулю, а поперечные размеры малы, напряжения в поперечных направлениях в центральной части сечения так же полагаются пренебрежимо малыми. По этой же причине вблизи торцов бруса осевые напряжения снижаются, обращаясь в ноль на свободных поверхностях торцов. Кроме этого, метод определения остаточных напряжений требует, чтобы осевые напряжения не изменялись по одному из поперечных направлений. Фактически образец должен представлять собой брус, состоящий из слоёв, в которых в осевом направлении действуют одинаковые остаточные напряжения, а остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Очевидно, что после вырезки такого образца из тела, напряжённое состояние в нём не полностью соответствует исходному состоянию в теле. В частности, например, снимаются компоненты напряжения в направлениях,

перпендикулярных осевому. Для полноценного исследования остаточных напряжений исходного тела в нём производят вырезку нескольких образцов различных размеров и в разных направлениях.

Для определения остаточных напряжений с бруса послойно удаляется материал из области, где осевые напряжения постоянны. В результате образования новых поверхностей при каждом удалении слоя материала брус изгибается. Причём приращение прогиба не прямо пропорционально приращению толщины удалённого слоя материала. Для определения средних остаточных напряжений в снятых слоях получено выражение:

$$\sigma_z(a) = \frac{4E}{3l^3} \left[ (h-a)^2 \frac{df}{da}(a) - 4(h-a)f(a) + 2 \int_0^a f(\xi) d\xi \right] \quad (1.6)$$

Здесь  $E$  – модуль Юнга,  $l$  – длина области снятого материала,  $h$  – высота поперечного сечения бруса,  $a$  – суммарная толщина снятых слоёв,  $f$  – прогиб бруса.

Существуют различные модификации этого метода, связанные с повышением точности вычислений (например, уточнённый учёт деформируемой длины бруса), изменением способов регистрации деформации (например, с применением тензодатчиков).

### 1.1.5 Метод столбиков

Метод столбиков [70] – один из методов высвобождения, который заключается в выфрезеровывании на поверхности детали столбика и замера деформации на его торце. Деформацию предлагается измерять при помощи розетки тензорезисторов [71], предварительно наклеенной на торец будущего столбика. Предполагается, что при достаточной глубине фрезерования (оценивается в [4] в 0,7–1,5 от диаметра столбика), торец столбика полностью освобождается от напряжений и возвращается в недеформированное состояние.

Остаточные напряжения находятся из определяющих соотношений механики, точный вид которых зависит от применяемой геометрии розетки. Для розетки из трёх тензорезисторов, расположенных с интервалом  $45^\circ$ , в [4] приводятся следующие выражения для главных напряжений  $\sigma_I$  и  $\sigma_{II}$ :

$$\sigma_{I/II} = -\frac{E}{2} \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 - \mu} \pm \frac{1}{1 + \mu} \sqrt{(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2} \right) \quad (1.7)$$

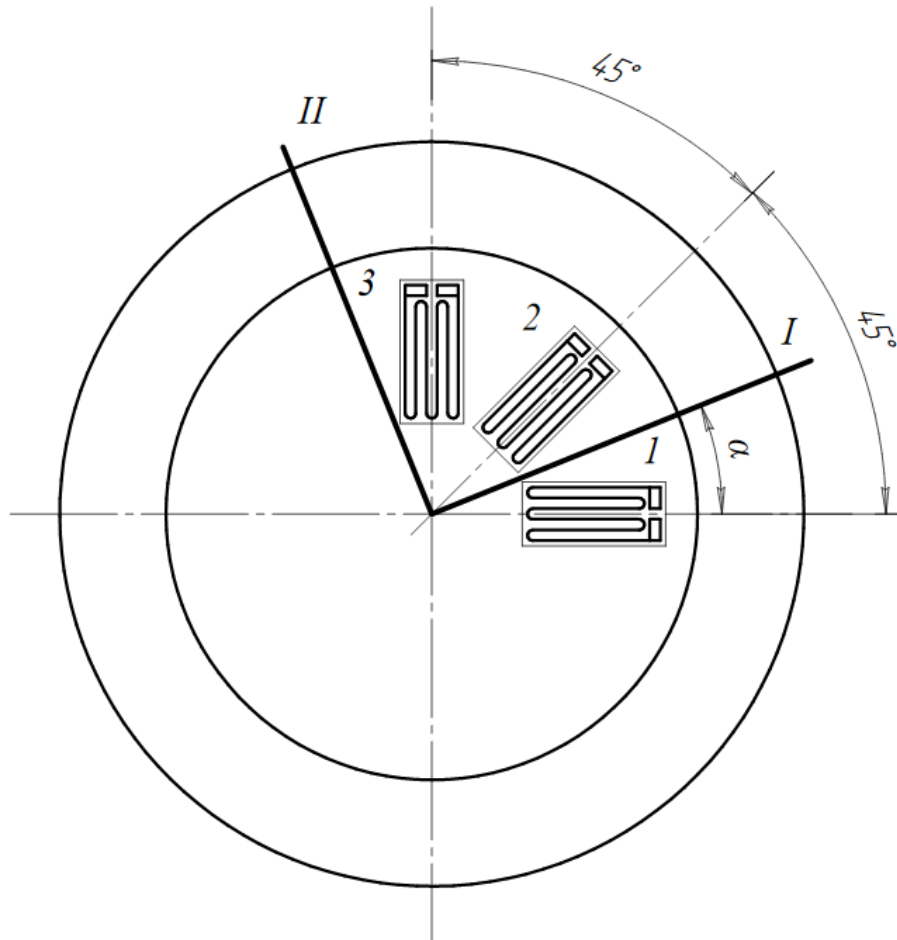


Рис. 1.3. Нумерация тензометров и положение главных направлений на торце столбика

Нумерация деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_3$  соответствует нумерации тензометров на рис. 1.3. Угол  $\alpha$ , задающий направление нормалей главных площадок, определяется как:

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3} \right) \quad (1.8)$$

### **1.1.6 Метод сверления отверстий**

Метод сверления отверстия (метод зондирующего отверстия) – широко распространённый метод исследования напряжений [72] из класса методов освобождения. Суть метода сводится к высверливанию отверстия в детали, наблюдению возникающих в результате этого деформаций и расчёте по этим деформациям напряжений в области отверстия. Высверливаемое отверстие может быть сквозным (как правило, в тонких, пластинчатых деталях) или глухим и иметь различные размеры. Наблюдение деформаций может производиться множеством различных способов.

#### **1.1.6.1 Развитие метода**

Первые исследования на основании метода сверления отверстий выполнены, по всей видимости, в Рейнско-Вестфальском техническом университете Ахена Дж. Матаром в 1932 году [73]. Матар высверливал сквозное отверстие и наблюдал изменение диаметра отверстия при помощи зеркального прибора Мартенса. Для определения напряжений он применял решение Кирша о растяжении бесконечной пластины [74] и приближённые решения для ограниченной в плоскости пластины [75].

Следующий этап развития метода связан с применением тензорезисторов. В 1950 году В. Соуэт и Р. Ванкромбрюгге применили тензорезисторы [76] для измерения компонент деформаций вблизи сквозного отверстия, а С. Рипарбелли в том же году использовал для подключения тензорезисторов мостовую схему Уитстона, чем существенно повысил точность [77]. Остаточные напряжения в обоих случаях определялись по соотношениям для бесконечной пластины. Для учёта неоднородности деформаций по длине тензорезистора проводилось интегрирование по его базе. С. Болтен и В. Тен Гейт [78] в 1952 году модифицировали процедуру обработки результатов измерений, учтя изменение компонент деформаций не только по длине, но и по ширине датчика. По

результатам опытов они определяли напряжения в изгибаемой пластине, применяя розетки из трёх тензодатчиков, расположенные по обеим сторонам пластины.

В 1956 году Р. Келси [79] продемонстрировал возможность нахождения остаточных напряжений неоднородных по глубине. Полагалось, что компоненты деформации  $\Delta\varepsilon_x$  и  $\Delta\varepsilon_y$  в двух взаимно перпендикулярных направлениях декартовой системы координат ( $x$  и  $y$  находятся в плоскости наблюдаемой поверхности тела), высвобождаемые при удалении слоя, выражаются через средние напряжения этого слоя таким образом:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon_x &= K_1\sigma_x - K_2\sigma_y; \\ \Delta\varepsilon_y &= K_1\sigma_y - K_2\sigma_x\end{aligned}\tag{1.9}$$

Коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$ , зависящие от глубины и толщины удаляемого слоя, определялись посредством предварительной калибровки на образце той же конфигурации и из того же материала. В эксперименте производилось высверливание слоёв той же глубины и той же толщины, что и в калибровочном, при этом измерялись приращения деформаций при высверливания каждого слоя. Компоненты средних напряжений в каждом слое вычисляются путём решения системы (1.9) для набора компонент деформаций и коэффициентов  $K_1$  и  $K_2$ , соответствующих рассматриваемому слою. Р. Келси экспериментально подтвердил расчёты. Измерения производились до глубины отверстия порядка половины его диаметра. Это ограничение связано с характерной особенностью изменения деформаций внешней поверхности образца при высверливании в нём отверстия. Имеющиеся в середине XX века тензометрические датчики не могли обеспечить уверенную регистрацию величин деформаций, высвобождающихся при высверливании слоёв расположенных глубже половины диаметра отверстия. При этом высверливание глубоко расположенных слоёв материала вносит крайне малые изменения в распределение деформаций поверхности образца.

Необходимо отметить, что абсолютное значение высвобождаемых деформаций зависит от диаметра высверливаемого отверстия, и существует возможность подобрать размер высверливаемого отверстия таким образом, чтобы высвобождаемые деформации превышали чувствительность датчика и на глубинах больших, чем половина диаметра отверстия, однако с ростом диаметра снижается и локальность измерений.

М. Нисида и Х. Такобаяси в 1965 году впервые применили [80] метод сверления отверстий, регистрируя деформации при помощи фотоупругих покрытий.

В 1966 Н. Рендлер и И. Вигнесс дополнили метод Келси, фактически исключив из калибровки величину угла  $\alpha$  между направлением главных напряжений и расположением датчиков [81]. Используя соотношения линейной теории упругости, они получили для деформации волокна  $\Delta\varepsilon_\alpha$ , расположенного под произвольным углом  $\alpha$  к направлению  $\sigma_1$ , соотношение вида:

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_\alpha = & \frac{\sigma_1}{2E} \left( (k_1 - \mu k_2) + (k_1 - \mu k_2) \cos 2\alpha \right) + \\ & + \frac{\sigma_2}{2E} \left( (k_1 - \mu k_2) - (k_1 - \mu k_2) \cos 2\alpha \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

записав которое для трёх тензодатчиков, можно получить систему и разрешить её относительно компонент напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и угла  $\alpha$ . Коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  существенно отличаются от коэффициентов Келси  $K_1$  и  $K_2$  – они не зависят от ориентации розетки относительно главных направлений напряжений и упругих констант материала. Таким образом, один раз вычисленные, эти коэффициенты одинаковы для образцов из любых упругих изотропных материалов. Единственным требованием их применения является геометрическое подобие тестируемого образца с калибровочным. Позже, Р. Батгейт [82] на основании выражений (1.10) получил обобщённые выражения для остаточных напряжений,



изменяющимся по глубине и направлению. Другими авторами были получены выражения для армированных композитных материалов [83]. В работе [84] рассмотрен метод определения остаточных напряжений в сварных соединениях.

И. Шевчук в 1976 году существенно модифицировал процедуру обработки данных для просверливаемой насквозь тонкой пластины, исключив необходимость в предварительной калибровке [85, 86]. Для этого он, как и Дж. Матар, использовал решение задачи Кирша [74] о бесконечной изотропной пластине с отверстием, вычислив на основе его калибровочные функции, которые были получены в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\sigma_x}{E} \left( -\frac{\mu + 1}{8} \lambda^2 - \left[ \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{3(\mu + 1)}{32} \lambda^4 \right] \cos 2\theta \right); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{\sigma_x}{E} \left( -\frac{\mu + 1}{8} \lambda^2 + \left[ \frac{1}{2} \lambda^2 - \frac{3(\mu + 1)}{32} \lambda^4 \right] \cos 2\theta \right)\end{aligned}\tag{1.11}$$

При этом был введён безразмерный параметр  $\lambda$ , равный отношению диаметра отверстия к радиусу точки, в которой определяется тензор деформация. Формулы И. Шевчука не учитывают неоднородность компонент деформаций по площади поверхности тензометра.

Следующий существенный этап в истории метода связан с развитием метода конечных элементов в 80-х годах XX века. До этого момента исследование остаточных напряжений с глухими отверстиями могло производиться либо в предположении о совпадении деформаций в точках поверхности вблизи глухого отверстия с деформациями около сквозного отверстия в тонкой пластине (решение Кирша), либо при помощи предварительной калибровки на подобных образцах, как в методе Келси.

Ряд авторов производил расчёты калибровочных коэффициентов в различных расчётных кодах [87–89]. Авторы получили практически

совпадающие результаты [90], и кроме того, исследовали влияние различных параметров на значения этих коэффициентов. В частности, в [87] показано, что коэффициент Пуассона является слабым параметром задачи: при изменении его в диапазоне 0,25–0,35 значения коэффициентов изменяются в пределах 2%. В то же время в [89] установлено, что безразмерный параметр  $\lambda$  существенно влияет на значения коэффициентов. Позднее, аналогичным образом были рассчитаны коэффициенты для определения остаточных напряжений неоднородных по глубине отверстия [91, 92], которые были включены в стандарт ASTM [93].

Примерно в это же время развитие голографии дало возможность применить голографическую интерферометрию для нахождения компонент вектора перемещений в окрестности высверливаемого отверстия. Значительный вклад в развитие этого подхода сделали отечественные исследователи В. П. Щепинов [19, 18], В. С. Писарев [94, 95] и другие [96]. Первоначально измерению подлежали так называемые «нормальные» компоненты перемещения  $w$  – направленные перпендикулярно поверхности вокруг отверстия. Для измерения таких перемещений голографическим интерферометром, вектор чувствительности которого направлен перпендикулярно поверхности, на которой определяются перемещения, производится регистрация двух голограмм: до и после высверливания отверстия. При восстановлении голограммы на изображении поверхности тела наблюдается система интерференционных полос, несущих информацию о перемещениях её точек [97]. Расчёт компонент напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  производился на основании линейных соотношений такого вида [98]:

$$w = \sigma_x w_x^0 + \sigma_y w_y^0, \quad (1.12)$$

где  $w$  – измеренное в эксперименте перемещение в некоторой точке, а  $w_x^0$  и  $w_y^0$  – «единичные» перемещения от напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным направлениям  $x$  и  $y$  в этой же точке. Под единичными

подразумеваются перемещения в точке, вызванные условными напряжениями, равными единице. Перемещение  $w_x^0$ , таким образом – это перемещение, вызванное напряжением, действующим в направлении оси  $x$  и численно равным единице, а  $w_y^0$  – перемещение от аналогичного напряжения, направленного вдоль оси  $y$ . Записывается несколько выражений типа (1.12), которые совместно решаются для определения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Очевидно, что минимально необходимое число таких выражений – два, однако экспериментальные данные, как правило, позволяют записать существенно большее их количество, получив переопределённую систему, и применить те или иные способы повышения точности. Для вычисления единичных перемещений либо используется решение Кирша в перемещениях [74], либо применяется метод конечных элементов [98]. Главные направления определяются визуально по симметрии интерференционной картины.

Существенным недостатком такого подхода является тот, факт, что для отверстий глубиной, превышающей диаметр, величины  $w_x^0$  и  $w_y^0$  становятся приблизительно равными по модулю и противоположными по знаку. Система уравнений вида (1.12) становится практически линейно зависимой. В таких случаях возможно определить только разность главных напряжений  $\sigma_x - \sigma_y$ .

Для устранения этого недостатка было предложено использовать интерферометры, регистрирующие тангенциальные перемещения точек  $u$  и  $v$ . Схема такого интерферометра несколько сложнее схемы для регистрации компоненты вектора перемещений  $w$  [98]. Выражения типа (1.12) в этом случае перезаписываются для той компоненты перемещений точек поверхности, которая сонаправлена с осью чувствительности интерферометра, и дополняются домножением на матрицу направляющих косинусов для поворота перемещений в систему координат главных напряжений. Таким образом, угол ориентации

главных напряжений определяется уже не визуально, а в результате обработки экспериментальных данных.

Методика измерения тангенциальных перемещений  $w_t$  посредством голографического интерферометра не успела широко распространиться, так как вскоре был предложен более простой подход на основе корреляции спекл-структур [99]. Интенсивное параллельное развитие микроэлектроники позволило в скором времени перейти на цифровую регистрацию изображений и цифровую же их обработку. В результате наибольшее распространение методика получила именно как «цифровая (либо электронная) спекл-интерферометрия» (digital (electronic) speckle pattern interferometry, D(E)SPI) [100]. Она заключается в формировании специальным способом спекл-структуры на поверхности тела, регистрации изображений до и после деформации при помощи цифровой матрицы и последующим цифровом вычитании изображений. Результатом такого подхода является картина перемещений в направлении вектора чувствительности интерферометра. Интерферометры, применяемые в цифровой корреляционной спекл-интерферометрии, проще используемых в голографической интерферометрии и более устойчивы к механическим колебаниям компонентов оптической системы [101]. Интерпретация результатов происходит аналогично.

В последние годы получил широкое распространение метод корреляции цифровых изображений, КЦИ (digital image correlation, DIC), позволяющий аналогично другим оптическим методам, получать поля перемещений, не требуя для этого сложной оптической схемы и источника когерентного света [102–105]. Метод, основы которого относятся к 70-80 годам XX века [106–108], впервые был применён для измерения перемещений вокруг высверливаемого отверстия только в 2005 году [109]. Позже, его использовали и другие авторы [110–112].

### 1.1.6.2 Методы удаления материала

Несмотря на высокую важность данного аспекта, в литературе имеется ограниченное количество публикаций, освещающих вопрос удаления материала. Его важность обусловлена, в первую очередь, тем фактом, что процесс резания материала неразрывно связан с его пластическим деформированием, и следовательно, может являться источником дополнительных локальных остаточных напряжений, искажающих картину деформаций вблизи полученного отверстия. Расчёт напряжений по таким деформациям даёт некорректный результат. Кроме того, такая обработка является источником тепла, вызывающего нагрев области вокруг отверстия и дополнительные температурные деформации, величина которых сопоставима с величиной деформаций, высвобождаемых под действием остаточных напряжений. Поэтому возникает необходимость ожидания релаксации температуры вблизи отверстия и, тем самым, снижается оперативность получения результатов. В некоторых случаях нагрев области вблизи отверстия может вызвать изменение свойств материала. Исследования в этом направлении до настоящего времени не производилась.

В стандарте ASTM [93] со ссылкой на работы [113, 114] указывается, что наиболее широко применимым способом удаления материала является высокоскоростное резание концевыми фрезами или борами различной геометрии на скоростях вращения от 50 000 до 400 000 об/мин. Высокоскоростное сверление применимо ко всем типам материалов за исключением наиболее твёрдых. К таким материалам применим способ вырезания отверстия воздушно-абразивной струёй, однако отмечается, что геометрические параметры отверстий, получаемых такой резкой, плохо контролируются в её процессе. Такие отверстия позволяют определять, как правило, только однородные по глубине остаточные напряжения. Отмечается, что низкоскоростное сверление ручными дрелями или

сверлильными станками имеет тенденцию к индицированию дополнительных остаточных напряжений и поэтому не рекомендуется.

В монографии [18] со ссылкой на те же работы приводятся результаты тестирования некоторых методов изготовления отверстия на образцах из различного материала.

Высокоскоростное сверление на скоростях вращения от 350 000 до 400 000 об/мин даёт отверстия, свободные от остаточных напряжений, для углеродистых и нержавеющей сталей, меди и циркония. В элементах из никелевых сплавов в отдельных случаях могут возникать пластические деформации, достаточные для внесения ошибок в результаты измерений.

Фрезерование концевыми фрезами на скоростях вращения до 10 000 об/мин даёт непригодные для интерпретации результаты для большинства материалов, кроме циркония, на котором в отдельных случаях удаётся получить отверстия, пригодные для измерений.

Вырезание воздушно-абразивной струёй позволяет сформировать отверстие, пригодное для определения равномерных по глубине остаточных напряжений в углеродистой и нержавеющей сталях и цирконии. В элементах из меди в отдельных случаях образуются дополнительные остаточные напряжения, а в элементах из никеля полученное отверстие непригодно для определения остаточных напряжений.

Удаление материала электрохимическим травлением позволяет получать отверстия, пригодные для определения равномерных по глубине остаточных напряжений для углеродистых и нержавеющей сталей и меди. По результатам исследования циркония и никеля получено что в образцах не удаётся сформировать отверстие необходимых параметров.

Метод электронной эрозии, так же известный как электроискровой метод, позволяет получить пригодное для проведения измерений отверстие для углеродистой и нержавеющей сталей и циркония. При формировании отверстий в меди в отдельных случаях могут формироваться оплавления, вносящие искажения в картину деформаций. На образцах из никеля не удалось сформировать пригодное отверстие.

В работах [113, 114] при определении возможности применения того или иного способа удаления материала проводились измерения компонент деформаций замеры посредством тензорезистивных датчиков. Оптические методы, получившие распространение позже, диктуют другие требования к методам изготовления отверстия, так как позволяют получить опытные данные для большого количества точек на поверхности тела.

В монографии [18] приведены результаты тестовых экспериментов по высверливанию отверстий в предварительно отождённых образцах с применением в качестве режущего инструмента сверла с углом заточки  $120^\circ$  на скоростях вращения около 10 000 об/мин. Исследование деформаций производилось при помощи голографической интерферометрии. В работе отмечено, что наличие пластической зоны вблизи высверливаемого отверстия может вносить искажения порядка половины интерференционной полосы, что ниже точности определения перемещений этим методом. Кроме того, авторы отмечают, что решающее значение имеют не обороты вращения режущего инструмента, а скорость и усилие подачи. Кроме того, к увеличению дополнительных деформаций ведёт увеличение диаметра режущего инструмента и снижение остроты режущей кромки. Особенно важное влияние острота режущей кромки имеет при сверлении вязких материалов, например для нержавеющей стали. При выполнении сверления инструментом с притупленной кромкой происходит образование нароста из стружки и дальнейшее снижение её

остроты. В результате наблюдается особенно сильный разогрев области резания с образованием на поверхности больших дополнительных деформаций. Увеличение диаметра инструмента в целом имеет тенденцию к одновременному увеличению дополнительно индуцированных деформаций, однако количественные оценки этого явления отсутствуют. Отмечено только, что для свёрл диаметром до 1 мм величиной дополнительно индуцированных деформаций можно пренебречь.

В работе [115] приведены результаты различных факторов сверления на точность определения перемещений при высверливании отверстий. Свёрлами диаметром 1, 2 и 3 мм производилось последовательное сверление нескольких отверстий в отожжённом образце из высокопрочной стали без перезаточки инструмента. Результаты свидетельствуют, что при использовании заточенного инструмента, даже на малых скоростях вращения сверла  $\sim 300$  об/мин, влияние дополнительно индуцированных остаточных напряжений практически отсутствует.

При регистрации перемещений методом цифровой спекл-интерферометрии рекомендуется режим изготовления отверстия сверлом диаметром 2 мм на скорости вращения не менее 600 об/мин при подаче до 1 мм/мин [116].

Обобщая имеющиеся экспериментальные результаты, можно сделать вывод, что они принципиально совпадают с известными закономерностями при обработке металлов резанием, а именно: размер пластически деформированной зоны уменьшается с уменьшением подачи, увеличением скорости резания, и уменьшением условного радиуса скругления режущей кромки [117, 118].

Количественные оценки режимов в различных источниках отчасти противоречат друг другу с той поправкой, что выполнены для разных способов



регистрации деформационного отклика, обладающих различной чувствительностью к наличию пластических деформаций в области отверстия. Например, авторы [93] не приводят каких-либо численных значений величины подачи инструмента, при которых влияние пластической зоны на измерения тензометрическими датчиками практически отсутствует, оценить требуемый шаг подачи для данной методики не представляется возможным. Для оптических методов регистрации максимальный шаг подачи может быть оценен по результатам [116] величиной 250 мкм/м.

### **1.1.6.3 Методы регистрации деформаций**

Деформации, возникающие в результате релаксации остаточных напряжений при высверливании отверстия, в настоящее время измеряются при помощи тензорезистивных преобразователей либо оптическими методами [119]. Тензорезистивные датчики позволяют проводить измерения относительных деформаций поверхности тела на некоторой базе, ограниченной размерами датчика. Оптические методы: голографическая и спекл-интерферометрия, метод муаровых полос и метод корреляции цифровых изображений, позволяют измерять перемещения точек поверхности тела. Областью измерения в этом случае является либо вся наблюдаемая поверхность тела, либо области локализации на ней точек с равным значением компонент вектора перемещений – система корреляционных, или муаровых полос. Наиболее актуальными на сегодняшний день оптическими методами представляются методы цифровой спекл-интерферометрии и корреляции цифровых изображений.

Для измерения деформаций при помощи тензометрических датчиков применяются тензометрические розетки, состоящие из отдельных датчиков или представляющие собой готовые изделия. Розетки представляют собой группу тензометрических элементов, расположенных таким образом, что их оси

чувствительности пересекаются в одной точке, которую называют геометрическим центром розетки.

Минимальное число датчиков в розетках – три, что обеспечивает возможность записать три независимых уравнения для трёх компонент, характеризующих напряжённое состояние вблизи отверстия. Компоненты могут представлять собой два нормальных и одно тангенциальное напряжения на площадках, заданных лабораторной системой координат, либо два главных нормальных напряжения и угол ориентации главных осей относительно лабораторной системы координат. Как правило, применяемые розетки содержат три минимально необходимых чувствительных элемента, однако существуют розетки, содержащие шесть элементов. Такие розетки применяются для повышения точности измерений, а их геометрическая схема представляет собой пару простых розеток, элементы которых расположены попарно симметрично. Розетки с промежуточным количеством элементов практически не встречаются.

Угловое взаимное расположение чувствительных элементов в розетке может быть различными. Наиболее распространены схемы розеток с расположением  $120^\circ-120^\circ-120^\circ$ ,  $90^\circ-135^\circ-135^\circ$  (рис. 1.4, *a*),  $45^\circ-45^\circ-270^\circ$  (рис. 1.4, *b*). В розетках из шести элементов наиболее распространена схема  $45^\circ-45^\circ-90^\circ-45^\circ-45^\circ-90^\circ$  (рис. 1.4, *c*).

Для проведения измерений на подходящую поверхность в образце наклеивается тензометрическая розетка. Расположение розетки должно обеспечивать возможность её надёжного крепления, а также удалённость от углов, уступов и других нерегулярностей формы. Датчики розетки подсоединяются к измерительной схеме, в качестве которой используются как собранные из отдельных приборов схемы, так и специальные тензостанции, проводящие измерения в автоматическом, или полуавтоматическом режимах.

Для повышения точности подключение производится по мостовым или полумостовым схемам. Так, для тензометрических розеток из шести элементов стандартом ASTM E837 рекомендуется попарное подключение в полумостовую схему [93].

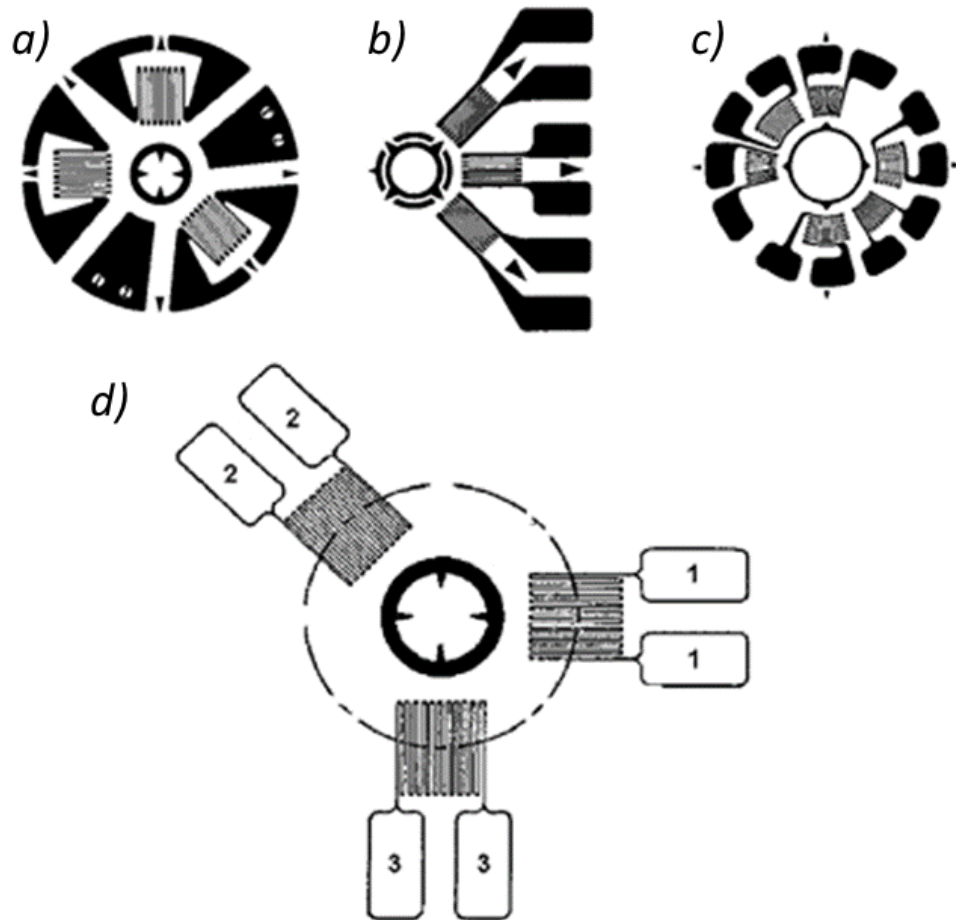


Рис. 1.4. *a), b)* – трёхсенсорные тензометрические розетки, *c)* – шестисенсорная тензометрическая розетка, *d)* – тензометрическая розетка, составленная из трёх отдельных датчиков. (Рисунки из [93])

Перед началом сверления производится снятие нулевого показания деформаций с датчиков розетки. Отверстие пошагово, или одновременно высверливается на необходимую глубину. На каждом шаге сверления с датчиков розетки снимаются значения деформаций. Для снижения влияния температурных деформаций перед каждым измерением производится выдержка для температурной релаксации. Наступление температурной стабилизации может контролироваться путём непрерывного проведения измерения после остановки и

извлечения режущего инструмента по прекращению изменения показаний. Для повышения точности, на каждом шаге измерения могут проводиться неоднократно.

Деформации, высвобожденные в процессе сверления, вычисляются либо как разница между измеренными на шаге и нулевыми значениями, либо как разница между значениями на текущем и предыдущем шагах. В некоторых случаях нулевое показание может сниматься после первичного сверления. Стандарт ASTM рекомендует снимать нулевое показание после прорезания подложки розетки, клеевого слоя и первого царапания поверхности образца [93].

Измерение перемещений при помощи методов цифровой спекл-интерферометрии осуществляется по двум основным схемам. Первая, более простая, схема проведения измерений носит название корреляционной спекл-интерферометрии. Результатом применения такого метода является картина полос корреляции, имеющих смысл изолиний перемещений точек поверхности в направлении оси чувствительности интерферометра. Применяемые интерферометры могут обеспечивать различное направление оси чувствительности.

С точки зрения удобства дальнейшей обработки более выгодны интерферометры с чувствительностью к плоскостным или тангенциальным компонентам перемещений [18], к компонентам, перпендикулярным оси высверливаемого отверстия. Схемы таких интерферометров могут исполняться таким образом, чтобы иметь возможность оперативно менять вектор чувствительности и регистрировать две ортогональные компоненты вектора перемещений в плоскости. На рис. 1.5 приведена принципиальная схема спекл-интерферометра, применяющегося для регистрации тангенциальных компонент перемещений [99]. Наблюдаемая поверхность  $O$  освещается двумя

скрещивающимися, симметричными относительно направления нормали  $\vec{n}$  пучками монохроматического света  $B1$  и  $B2$ . Регистрация наблюдаемой спекл-структуры осуществляется при помощи электронной ПЗС-матрицы<sup>1</sup> CCD через объектив  $L$ . Такая схема интерферометра обладает чувствительностью к перемещениям в направлении оси  $u$ .

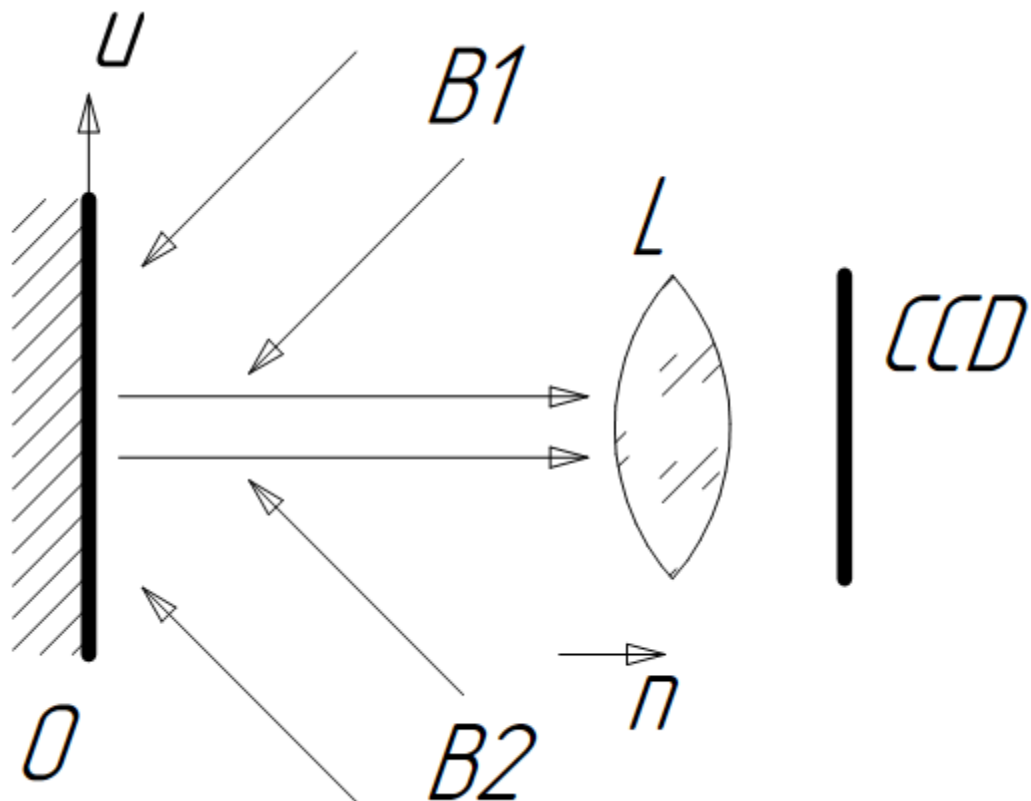
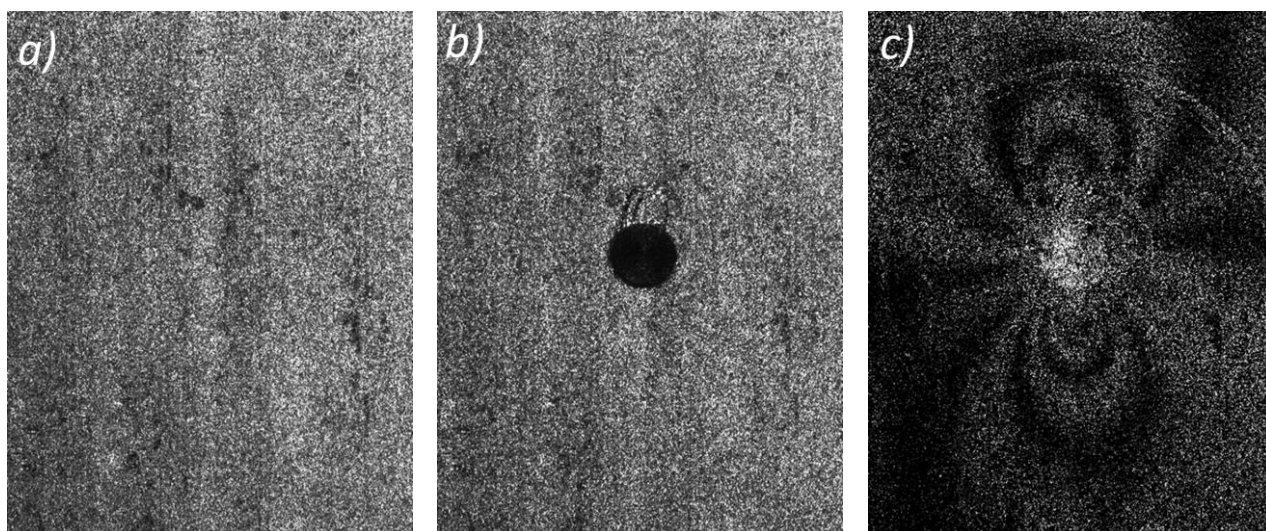


Рис. 1.5. Принципиальная схема спекл-интерферометра для регистрации тангенциальной компоненты перемещений

Для формирования симметричных скрещивающихся пучков на практике часто применяется зеркало [116]. Методика измерения заключается в последовательной регистрации цифровых изображений картины спеклов до процесса сверления и после выполнения каждого шага. Производится попиксельное вычитание изображений – каждому пикселю результирующего

<sup>1</sup> ПЗС-матрица – фоточувствительная аналоговая интегральная микросхема для регистрации изображений основанная на технологии приборов с зарядовой связью (ПЗС).

изображения присваивается значение интенсивности, равное разности значений интенсивности двух исходных изображений. Вычитание производится только по значениям интенсивности, поскольку цвет пикселя не несёт информации в силу монохроматичности излучения. На результирующем изображении наблюдается система корреляционных полос, имеющих смысл изолиний перемещений в направлении оси чувствительности интерферометра.



**Рис. 1.6. Образование полос корреляции: a) – исходное изображение, b) – изображение после высверливания отверстия, c) – результат цифрового вычитания**

Второй подход к измерениям посредством спекл-интерферометрии основан на внесении дополнительной заданной разности фаз между пучками, освещающими объект. Иногда такой подход называют фазовым. В его основе лежит возможность определения разности фаз опорной и предметной волны, несущей информацию о перемещениях точек поверхности тела, для каждой точки изображения (пикселя в случае регистрации на цифровой носитель) при внесении дополнительной контролируемой в опыте разности фаз в один из пучков. В частности, можно показать, что при внесении дискретной разности фаз, распределение интенсивностей  $I=I(x, y)$  в результирующем пучке можно представить в виде [120]:

$$I(x, y) = A_p + A_r + 2A_p A_r \cos(\varphi(x, y) + \delta), \quad (1.13)$$

где  $A_p$ ,  $A_r$  – амплитуды предметной и опорной волн,  $\varphi(x, y)$  – разность фаз предметной и опорной волнами в точке,  $\delta$  – дополнительная разность фаз предметной и опорной волн, введённая в эксперименте искусственно.

Внесение такой разности может осуществляться различными способами, как дискретно с регистрацией отдельных изображений, так и непрерывно с регистрацией интегрального изображения. Наибольшее распространение получил метод внесения дискретных фазовых сдвигов с помощью увеличения оптического пути одного из пучков используя подвижный зеркальный элемент, положение которого изменяется с высокой точностью. Для этой цели зеркальный элемент, как правило, устанавливается на пьезокерамику.

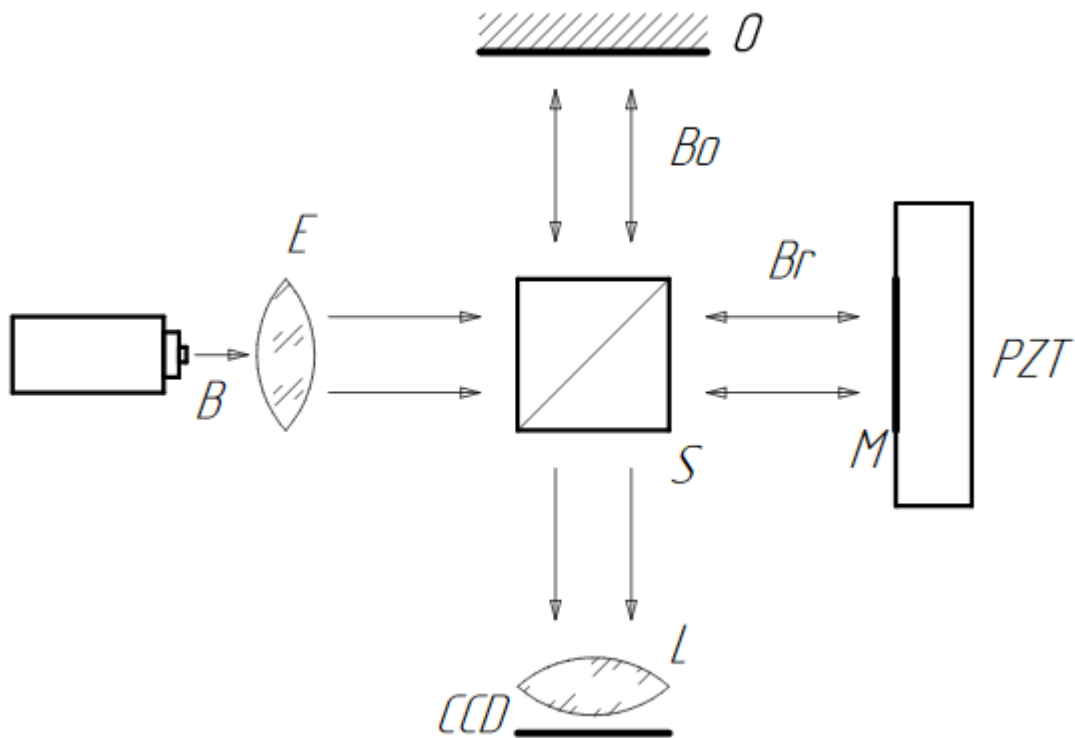


Рис. 1.7. Принципиальная схема спекл-интерферометра с реализацией фазового сдвига в опорном пучке

На рис. 1.7 приведена принципиальная схема интерферометра с возможностью внесения фазового сдвига в опорный пучок. Луч когерентного света  $B$  через расширитель  $E$  попадает на делитель пучка  $S$ , где разделяется на

предметный пучок  $В_0$  и опорный  $В_1$ . Предметный пучок, отразившись от объекта  $O$  через делитель  $S$ , а затем через объектив  $L$  попадает на ПЗС-матрицу  $CCD$ . Опорный пучок, отразившись от зеркала  $M$ , положение которого задаётся пьезокерамическим элементом  $PZT$ , через делитель  $S$  и объектив  $L$  также попадает на матрицу  $CCD$ .

Для определения разности фаз между изображением деформированного и недеформированного объекта в каждом из его состояний регистрируется ряд изображений с различными внесёнными фазовыми сдвигами, причём их величина в каждой серии изображений (до и после деформирования) одинакова. Тогда для каждого состояния объекта становится возможным составить систему уравнений вида (1.13) и, разрешив её, определить распределение разности фаз предметного и опорного пучков. Минимальное число уравнений вида (1.13) в системе составляет три, что обуславливает необходимость регистрации трёх изображений с различными фазовыми сдвигами. Однако существует возможность разрешения переопределённой системы на основании четырёх и более фазовых сдвигов. Выбор величины сдвига и количества регистрируемых изображений изменяет итоговые выражения для определения фазы. Одно из наиболее простых выражений можно получить при использовании трёх изображений, а величины  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  и  $\delta_3$  положить равными  $\pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$ . В этом случае фаза до и после деформирования определяется как [120]:

$$\varphi = \arctg \frac{I_3^0 - I_2^0}{I_1^0 - I_2^0} \quad (1.14)$$

$$\varphi + \psi = \arctg \frac{I_3^1 - I_2^1}{I_1^1 - I_2^1} \quad (1.15)$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – величины интенсивностей в трёх изображениях одного состояния с фазовыми сдвигами, верхние индексы соответствуют: исходному (0) и деформированному (1) состояниям,  $\varphi$  – исходная разность фаз предметного и



опорного лучей,  $\psi$  – разность фаз, привнесённая в результате деформирования объекта. Произведя вычитание (1.14) из (1.15), можно получить непосредственно разность фаз  $\psi$ , которая связана с перемещениями точек поверхности объекта таким выражением:

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u} \vec{K}, \quad (1.16)$$

где  $\vec{K}$  – вектор чувствительности интерферометра,  $\vec{u}$  – вектор перемещений,  $\lambda$  – длина волны применяемого когерентного освещения.

Сравнительно молодым методом регистрации перемещений при является метод корреляции цифровых изображений. Данный метод на сегодня выглядит наиболее перспективным, поскольку его применения сочетает достоинства других оптических методов (отсутствие физического контакта с исследуемой поверхностью, регистрация полей перемещений), более простую схему эксперимента и существенно меньшие затраты на аппаратуру. Сущность метода заключается в регистрации двух или более изображений исследуемой поверхности объекта, на которые предварительно наносится хаотичная спел-структура. Одно из изображений регистрируется до высверливания отверстия, а последующие – на каждом шаге, на котором необходимо определить компоненты вектора перемещения. Сущность методики заключается в сравнительном анализе двух изображений, при котором одно из них разбивается на подобласти, новое положение которых отыскивается на другом изображении. Математически задача состоит в отыскании аргумента, минимизирующего целевую функцию отклонений яркости в двух изображениях:

$$\vec{u} = \operatorname{argmin} \left[ \sum \left( G(\vec{x} + \vec{d}) - F(\vec{x}) \right)^2 \right] \quad (1.17)$$

где  $\vec{u}$  – вектор перемещений центров подобластей,  $\vec{x}$  – вектор координат центров подобластей,  $F$  и  $G$  – функции распределения интенсивностей в исходном

изображении и изображении деформированного состояния соответственно. Эта задача решается построением функции корреляции распределения яркости в подобласти исходного изображения с распределением яркости в изображении деформированного состояния. Координаты нового положения подобласти определяются по положению максимума функции корреляции. Для снижения вычислительной сложности задачи построение функции корреляции производится не для всего поля изображения, а только для локальной области (области поиска). Основными параметрами, которыми определяется возможность регистрации перемещений в оптической установке, являются характерный размер нанесённых спеклов, размер элементов ПЗС-матрицы и степень оптического увеличения.

#### **1.1.6.4 Подходы к определению остаточных напряжений на основе метода сверления отверстий**

С момента первого применения метода зондирующего отверстия способы обработки его результатов и вычисления остаточных напряжений получили существенное развитие. Если первые методы определения напряжений основывались на предварительной калибровке на другом образце, то современный подход предполагает предварительное, как правило численное, решение задачи механики деформированного твёрдого тела и определение коэффициентов уравнений, по которым происходит вычисление компонент тензора напряжений.

Согласно методике стандарта ASTM E837 в случае однородного поля остаточных напряжений компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , определяются по результатам измерения деформаций  $\varepsilon^I$ ,  $\varepsilon^{II}$ ,  $\varepsilon^{III}$  на тензометрах (в лабораторной системе координат  $(x, y, z)$ , ось  $z$  направлена вглубь материала, как указано на рис. 1.8), согласно следующим соотношениям:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E(\varepsilon^{III} - \varepsilon^I)}{2b} - \frac{E(\varepsilon^{III} + \varepsilon^I)}{2a(1 + \nu)}, \\ \sigma_y = \frac{-E(\varepsilon^{III} - \varepsilon^I)}{2b} - \frac{E(\varepsilon^{III} + \varepsilon^I)}{2a(1 + \nu)}, \\ \tau_{xy} = \frac{-E(\varepsilon^{III} + \varepsilon^I - 2\varepsilon^{II})}{2b} \end{cases} \quad (1.18)$$

где  $a$  и  $b$  – базовые константы, которые находятся путем конечноэлементного расчёта для упругого полупространства с отверстием в условиях одноосного растяжения на бесконечности (или на контуре отверстия),  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона [92].

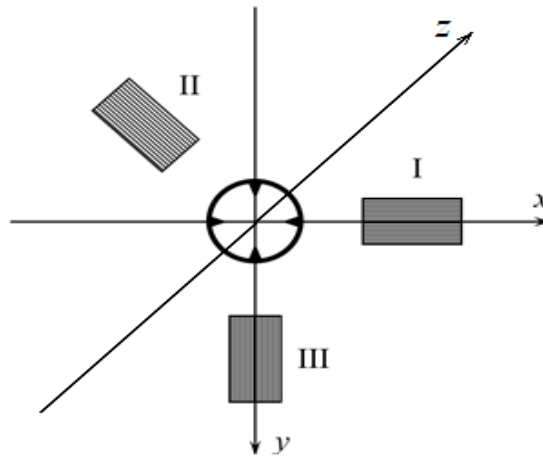


Рис. 1.8. Система координат для измерения деформаций тензорезисторами

В случае проведения измерений оптическими методами результатом является поле вектора перемещений на поверхности образца вблизи отверстия. Используемые в настоящее время методы регистрации дают тангенциальные компоненты вектора перемещений  $u_i, v_i$  в точках среды  $(x_i, y_i)$ ,  $i=1 \dots I$ . Особенностью оптических методов является то, что число точек, в которых определены компоненты перемещений, в ходе одного эксперимента может быть велико – от сотен в случае ручной обработки картины полос, до тысяч и даже миллионов при автоматизированной обработке скоррелированных изображений или результата фазовой спекл-интерферометрии. Таким образом формируется

переопределённая система уравнений следующего вида (в цилиндрической системе координат  $(r, \theta)$ ) [116]:

$$\begin{aligned} u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \tau_{xy} h_1(r_i, \theta_i) \frac{\sqrt{2}}{2} + u_0, \\ v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \tau_{xy} h_2(r_i, \theta_i) \frac{\sqrt{2}}{2} + v_0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

где:

$$\begin{aligned} h_1(r_i, \theta_i) &= f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right) - g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + g\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right) \\ h_2(r_i, \theta_i) &= f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) - f\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right) + g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{4}\right) + \\ &\quad + g\left(r_i, \theta_i - \frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Базовые функции  $f = f(r, \theta)$  и  $g = g(r, \theta)$  определяются с помощью конечноэлементного расчёта и представляют собой продольные и поперечные перемещения соответственно на поверхности тела под действием единичного растягивающего напряжения, направленного в направлении  $\theta=0$ . Компоненты перемещений  $u_0, v_0$  добавляются для учёта возможного перемещения тела как жесткого целого.

Уравнения вида (1.19) записываются для каждой точки, где определены соответствующие компоненты вектора перемещений. Полученная в результате переопределённая система уравнений разрешается относительно  $\sigma_x, \sigma_y$ , и  $\tau_{xy}$  методами оптимизации (например, методом наименьших квадратов). Так как координаты  $r_i, \theta_i$  каждой точки заранее неизвестны, функции  $f = f(r, \theta)$  и  $g = g(r, \theta)$  аппроксимируются аналитическими выражениями или интерполируются. Это позволяет вычислять их значения в любой произвольно заданной точке измерений. Применяются модифицированные решения типа Кирша, снабжённые дополнительными членами. Например, для глухого отверстия в массивном теле:

$$\begin{aligned}
 f(r, \theta) &= \cos \theta \left( \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^{1,5}} + \frac{C_3}{r^3} \right) + \cos^3 \theta \left( \frac{C_4}{r} + \frac{C_5}{r^{1,5}} + \frac{C_6}{r^3} \right) \\
 g(r, \theta) &= \sin \theta \left( \frac{S_1}{r} + \frac{S_2}{r^{1,5}} + \frac{S_3}{r^3} \right) + \sin^3 \theta \left( \frac{S_4}{r} + \frac{S_5}{r^{1,5}} + \frac{S_6}{r^3} \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Константы  $C_k$  и  $S_k$ ,  $k=1\dots 6$  вычисляются для конкретной геометрии (соотношения глубины и диаметра отверстия) при помощи МКЭ-расчёта. По результатам вычислений в [116] получены значения констант  $C_k$  и  $S_k$ , приведённые в таблице 1.1:

Таблица 1.1. Значения коэффициентов  $C_k$  и  $S_k$

$k$	$C_k \cdot 10^3$	$S_k \cdot 10^3$	$k$	$C_k \cdot 10^3$	$S_k \cdot 10^3$
1	0,27	0,95	4	1,18	-1,20
2	-1,18	1,41	5	2,76	-2,73
3	2,44	-2,57	6	-3,54	3,53

Уравнения (1.21) описывают определённые в МКЭ базовые функции с уровнем достоверности более 0,999.

Для тонких пластин функции  $f = f(r, \theta)$  и  $g = g(r, \theta)$  вычисляются из решения Кирша для пластины с отверстием в условиях растяжения. Для этого решение задачи Кирша в перемещениях переписывается для перемещений в декартовой системе координат, связанной с отверстием, и отбрасываются члены пропорциональные  $r$ . Оставшиеся убывающие члены решения описывают приращение, вызванные образованием отверстия:

$$\begin{aligned}
 f(r, \theta) &= \frac{r_0}{4\mu} \left( -\frac{4r_0}{(1+\nu)r} + 3\frac{r_0^3}{r^3} + 4\left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0^3}{r^3}\right) \cos^2 \theta \right) \cos \theta \\
 g(r, \theta) &= \frac{r_0}{4\mu} \left( \frac{(1+5\nu)r_0}{(1+\nu)r} - 3\frac{r_0^3}{r^3} - 4\left(\frac{r_0}{r} - \frac{r_0^3}{r^3}\right) \sin^2 \theta \right) \sin \theta
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

Методика стандарта ASTM была обобщена и на случай неоднородного по глубине отверстия поля остаточных напряжений. Предполагается, что высверливание производится пошагово и на каждом шаге  $j=1\dots J$  производятся измерения компонент тензора деформаций. Кроме того предполагается, что в

пределах каждого шага компоненты напряжений постоянны, то есть  $\sigma_{x,j} = const$ ,  $\sigma_{y,j} = const$ ,  $\tau_{xy,j} = const$ , а  $\sigma_{z,j} = \tau_{zx,j} = \tau_{yz,j} = 0$ . Тогда система уравнений (1.18) переписывается в таком матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{AP} = \frac{E}{(1+\nu)} \mathbf{p}, \\ \mathbf{BQ} = E \mathbf{q}, \\ \mathbf{BT} = E \mathbf{t} \end{cases} \quad (1.23)$$

где элементы векторов деформаций  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{q}$ ,  $\mathbf{t}$ , и векторов напряжений  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{T}$  вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_j &= \frac{\varepsilon_j^{III} + \varepsilon_j^I}{2} \\ q_j &= \frac{\varepsilon_j^{III} - \varepsilon_j^I}{2} \\ t_j &= \frac{\varepsilon_j^{III} + \varepsilon_j^I - 2\varepsilon_j^{II}}{2} \\ P_j &= \frac{\sigma_{y,j} + \sigma_{x,j}}{2} \\ Q_j &= \frac{\sigma_{y,j} - \sigma_{x,j}}{2} \\ T_j &= \tau_{xy,j} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Элементы  $a_{jk}$ ,  $k, j=1 \dots J$  матриц базовых коэффициентов  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  соответственно вычисляются конечноэлементным расчётом для упругого полупространства с отверстием глубиной  $j$  слоёв, нагруженного одноосным растяжением на контуре отверстия в слое  $k$  (см. рис. 1.9).

Представленный метод, реализованный в стандарте ASTM широко распространён, однако имеет несколько существенных недостатков. Во-первых, он чувствителен к точности позиционирования отверстия относительно розетки. Устройство для высверливания должно быть спозиционировано таким образом, чтобы ось отверстия как можно точнее совпадала с геометрическим центром

розетки, а глубина шагов высверливания отверстия должна строго соответствовать значениям, заданным в стандарте. В противном случае расчёт напряжений по коэффициентам, приведённым в стандарте, приводит к ошибкам.

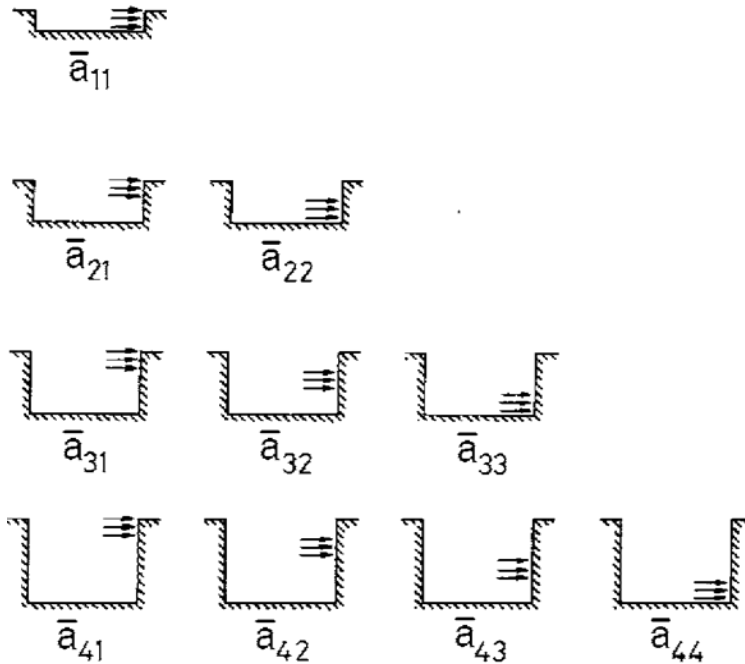


Рис. 1.9. Компоненты матриц базовых коэффициентов. (Рисунок из [93])

Во-вторых, система (1.23) является слабо обусловленной, в связи с чем при вычислении напряжений возможны большие численные погрешности [121]. Для частичного решения этой проблемы стандарт рекомендует применять метод регуляризации, например использовать регуляризацию по Тихонову.

### 1.1.6.5 Анализ существующих методов определения напряжений на основании метода сверления отверстий

В настоящий момент разработаны и широко используются три основных метода определения напряжений по результатам применения метода сверления отверстий. Методы определения однородных и неоднородных остаточных напряжений по результатам измерения деформаций при помощи тензорезистивных датчиков описаны в стандарте ASTM E837. Они получили широкое распространение на практике. Всё более распространяющиеся в настоящее время методы оптической регистрации перемещений выдвигают

необходимость разработки методов определения напряжений по результатам измерений перемещений. Ожидается, первым был разработан метод определения однородных напряжений на основании базовых функций. Метод определения неоднородных по глубине остаточных напряжений с применением оптических измерений в настоящее время не разработан. Предпринимаются попытки разработки таких методов [1–3]. Известны подходы [119], когда используются результаты измерения компонент вектора перемещений для определения компонент тензора деформаций с последующей обработкой на основе уравнения 1.23. Такому подходу становятся присущи недостатки методов определения напряжений по результатам измерения деформаций. А именно: число измеряемых в эксперименте величин (три значения деформации с трёх сенсоров розетки) совпадает с числом неизвестных (три компоненты плоского напряжённого состояния). В этом случае точность определения напряжений не превышает точности определения деформаций. Более того, при определении неоднородного напряжённого состояния, вследствие слабой обусловленности матрицы коэффициентов, метод не позволяет добиться приемлемой точности без применения регуляризации.

Таким образом, адекватность результатов связывается с выбором наиболее эффективного метода измерений деформационного отклика. Оптические методы измерений: голографическая интерферометрия, электронная корреляционная спекл-интерферометрия и метод корреляции цифровых изображений обладают преимуществами как в точности, так и в объёме получаемой информации. Например, метод электронной корреляционной спекл-интерферометрии позволяет определять деформированное состояние на поверхности реальных объектов бесконтактно и с высокой точностью по визуализируемым картинкам полос как изолиниям полей перемещений. Цена полосы на таких спеклограммах составляет десятые доли микрометра. Значительный объём исходной



информации, получаемой в этом случае, обеспечивает наибольшую степень достоверности с точки зрения регистрации первичной экспериментальной информации.

В методе спекл-интерферометрии применение различных оптических схем интерферометра позволяет независимо измерять отдельные пространственные составляющие векторного поля перемещений: нормальную или тангенциальные. Для измерения, в частности, тангенциальной компоненты в некотором направлении  $OX_1$  объект должен быть освещен совместно парой световых пучков, лежащих в плоскости  $OX_1Z$ , где  $OZ$  – нормаль к измеряемой поверхности, и симметричных относительно  $OZ$ . Для определения тангенциальной компоненты, ортогональной направлению  $OX_1$ , данная схема должна быть повернута вокруг  $OZ$  на  $90^\circ$ . Изображения объекта до и после его деформирования регистрируются с помощью цифровой видеокамеры, сопряженной с компьютером, и сохраняются в его памяти в оцифрованном виде. Спеклограммы полей перемещений заданной направленности наблюдаются при воспроизведении на мониторе компьютера разностных изображений, записанных в соответствующей схеме освещения. Величины перемещений в произвольных точках деформированного тела рассчитываются по порядкам полос  $N$  на спеклограммах по формуле (1.16).

## **1.2 Физические методы**

### **1.2.1 Дифракционные методы**

К дифракционным относят группу методов, основанных на регистрации рассеяния элементарных частиц на кристаллической решётке объекта исследования.

Исторически первым дифракционным методом исследования остаточных напряжённых состояний стал рентгеновский метод, основанный на Брэгговской

дифракции рентгеновских лучей на периодической структуре кристаллической решётки. При направлении параллельного монохроматического рентгеновского пучка на поверхность поликристаллического тела излучение будет рассеиваться на кристаллитах, которые ориентированы таким образом, что их атомные плоскости составляют Брэгговский угол с направлением пучка. Рассеянное излучение даст максимум интенсивности в направлении, определяемом условием Брегга-Вульфа [122] в виде:

$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (1.25)$$

Здесь  $d$  – межплоскостное расстояние в решётке материала,  $\theta$  – угол между направлением рентгеновского пучка и атомной плоскостью,  $n$  – порядок дифракции,  $\lambda$  – длина волны излучения. Измерив в эксперименте угол между направлениями падения и максимальной интенсивности отражения пучка, можно рассчитать Брэгговский угол  $\theta$ . Зная параметры излучения и угол  $\theta$ , рассчитывают расстояние между атомными плоскостями  $d$ . Если для исследуемого материала известно межплоскостное расстояние недеформированной решётки  $d_0$ , то осевую микродеформацию в направлении, перпендикулярном атомным плоскостям можно подсчитать как:

$$\epsilon = \frac{d - d_0}{d_0} \quad (1.26)$$

Изменяя направление пучка относительно поверхности тела, можно измерять деформацию кристаллической решётки кристаллитов, имеющих различную ориентацию. Для определения микронапряжений, как правило, используется обобщённый закон Гука:

$$\zeta_z - \mu(\zeta_x + \zeta_y) = E\epsilon, \quad (1.27)$$

Здесь  $\zeta_x$ ,  $\zeta_y$ ,  $\zeta_z$  – нормальные остаточные микронапряжения. Причём направление  $z$  совпадает с нормалью к отражающей атомной плоскости. Поскольку глубина проникновения рентгеновских лучей в металл составляет

величину порядка 200 мкм [4, 123], можно сказать, что исследованию подлежит только поверхностный слой. В этом слое не учитываются компоненты напряжений, направленные по нормали к поверхности.

В качестве существенного недостатка рассмотренного подхода можно отметить тот факт, что результаты измерений относятся к отдельным кристаллитам на микроуровне, но обработка производится по методам механики для макронапряжений. Кроме того, измеренная осевая деформация пропорциональна некой комбинации микронапряжений, а не какой-то одной компоненте. Для разделения трёх компонент требуется, в общем случае, три уравнения, одним из которых является (1.27), вторым – требование равенства нулю напряжений, действующих в направлении нормали к поверхности. Общих методов получения третьего выражения не предложено, более того, в ряде случаев его не удаётся получить. Существует возможность разделить компоненты, проводя облучение под другим углом. Тогда в отражении будут участвовать другие кристаллиты и можно получить ещё одно уравнение вида (1.27). Однако при этом вновь встаёт вопрос об эквивалентности напряжённого состояния в разных кристаллитах.

Отчасти, указанные недостатки устраняет использование метода на основании дифракции тепловых нейтронов [124]. Как и в предыдущем случае, поверхность объекта исследования облучается потоком частиц – нейтронов с тепловым диапазоном энергии. Нейтронное излучение рассеивается кристаллической решёткой исследуемого материала с образованием пиков отражения в направлениях, которые удовлетворяют условию (1.25). В сплавах на основе железа тепловые нейтроны имеют длину пробега порядка десятков миллиметров [125]. Отсюда становится возможным производить измерения не только на поверхности, но и на некотором расстоянии в объёме материала и регистрировать не только обратное от поверхности излучение, но и отражения по

другим направлениям. Используя пару детекторов, возможно определять изменения межплоскостного расстояния в двух взаимно перпендикулярных направлениях [126], что позволяет упростить процесс разделения компонент тензора напряжений. Для исследования всего объёма тело перемещают (см. рис. 1.10) относительно нейтронного пучка и детекторов.

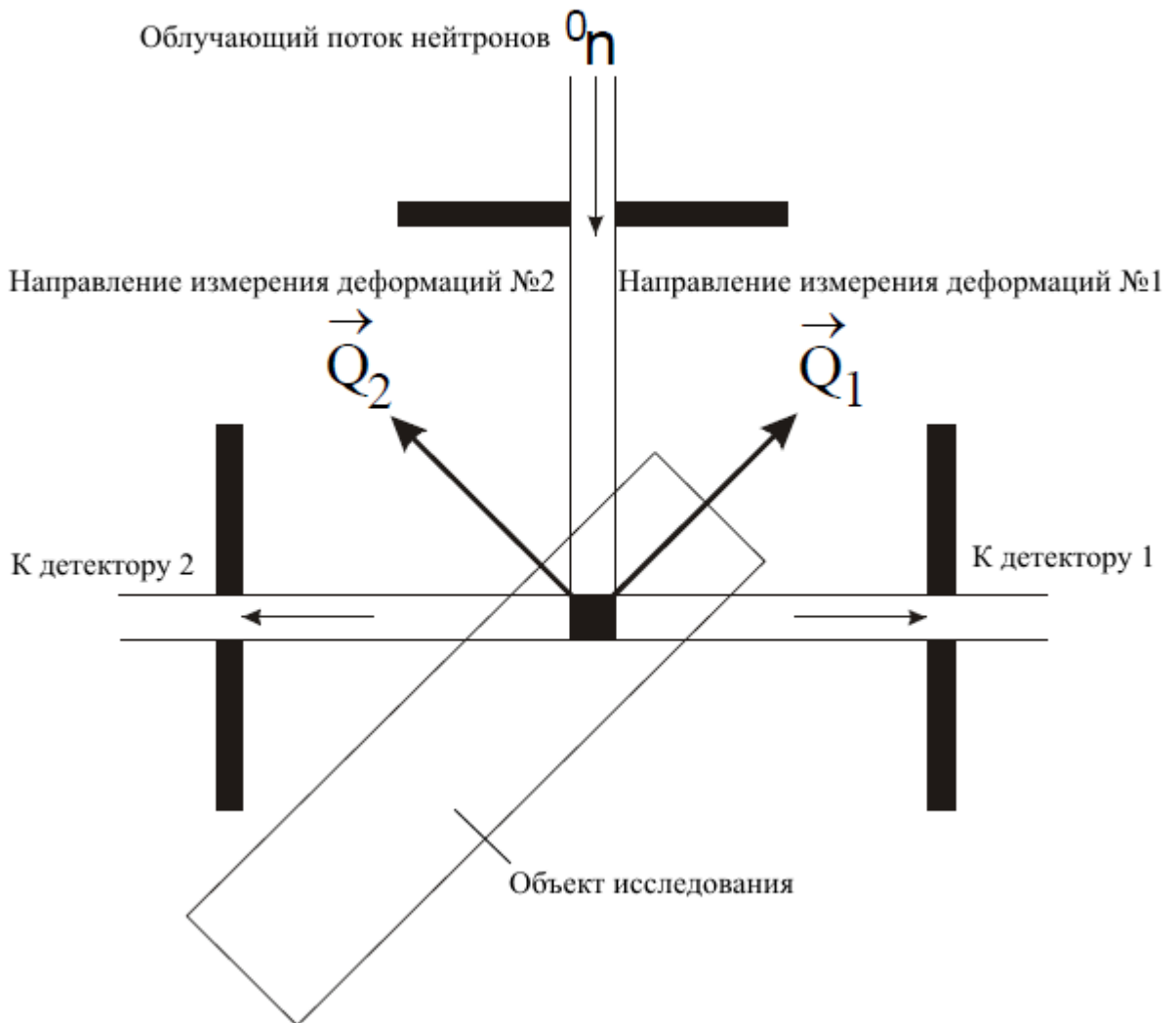


Рис. 1.10. Схема эксперимента при исследовании остаточных напряжений при помощи дифракции тепловых нейтронов. (Рисунок из [126])

Тем не менее, при исследовании остаточных напряжений методом дифракции тепловых нейтронов остаётся ряд недостатков, присущих методам рентгенографии. Хотя при облучении нейтронами становится возможным

выделять в теле материала рассеивающий объём существенно большего размера, чем при облучении рентгеновскими лучами, в рассеянии, всё же, участвуют отдельные кристаллиты. Измеренные в них микродеформации являются, также по существу, микродеформациями, осреднёнными по нескольким отражающим кристаллитам. Не исследован вопрос определения по этим микродеформациям остаточных микронапряжений.

Следует отметить проблемы, связанные с самими источниками нейтронного излучения. В настоящее время в их качестве могут выступать реакторы, ускорители (генераторы нейтронов) и радиоизотопные источники. Реакторы и ускорители представляют собой крайне дорогостоящие стационарные установки, эксплуатация которых требует значительных издержек и высококвалифицированного персонала. Радиоизотопные источники, способные генерировать нейтроны, тоже являются крайне дорогостоящими и несут риски, связанные с обращением с радиоактивными материалами и их нераспространением.

Отдельно необходимо упомянуть об обеспечении необходимой точности измерений. Для обеспечения приемлемой точности определения остаточных напряжений требуются крайне прецизионные измерения величины межплоскостного расстояния. Например, для обеспечения точности  $\sim 10$  МПа на материале с модулем упругости  $\sim 10^5$  МПа требуется определение деформаций с точностью  $\sim 10^{-4}$ . То есть, межплоскостные расстояния величиной  $\sim 1 \text{ \AA}$  должны измеряться с точностью  $\sim 0,001 \text{ \AA}$ . Такие значения требуют особо прецизионных измерений в обоих дифракционных методах.

Указанные методы имеют и общие недостатки. Так, оба метода связаны с ионизирующим излучением и подразумевают тот или иной объём дозовой нагрузки на персонал. Также оба метода применяются только к материалам,

имеющим кристаллическую структуру. Дифракционными методами невозможно проведение исследований стёкол, пластиков и других аморфных материалов.

### **1.2.2 Магнитно-электрические методы**

Исследование остаточных напряжений магнитно-электрическими методами включает в себя комплекс методик, основанных на различных эффектах и физических законах, связанных с той или иной зависимостью магнитных и электрических характеристик материала от внутренних механических напряжений.

Один из методов основан на скачкообразной зависимости величины намагниченности ферромагнитного материала от непрерывно изменяющегося внешнего намагничивающего поля [127]. Эффект впервые наблюдался в 1919 году немецким физиком Г. Г. Баркгаузеном [128] и связан с перестройкой доменной структуры ферромагнетиков с возрастанием напряжённости намагничивающего поля. В литературе встречаются различные наименования такого способа определения остаточных напряжений: метод шумов Баркгаузена, метод магнитных шумов, определение напряжений на основе эффекта Баркгаузена. Методика эксперимента представляет собой постепенное намагничивание небольшой области поверхности элемента и одновременное измерение величины намагниченности по различным направлениям. Записываются определяющие соотношения между осреднённой амплитудой скачков намагниченности от компонент тензора напряжений [129]. С этой целью проводится калибровочный эксперимент на «идентичном» образце (из того же материала, изготовленного по той же технологии и предпочтительно той же геометрии, что и исследуемый элемент) с известными заданными, или измеренными другим методом компонентами тензора напряжений.

Другая методика основывается на измерении величины анизотропии магнитной проницаемости. Известно [130], что она зависит от приложенного механического напряжения. Метод применяется для оценки одноосного напряжённого состояния [131]. Производится измерение величины магнитной проницаемости в направлениях, совпадающем и перпендикулярном к направлению действующего напряжения. Полагают что разность между этими величинами пропорциональна приложенному осевому напряжению. Для определения коэффициента пропорциональности предварительно проводят калибровочный эксперимент на «идентичном» образце. Формируют в некоторой его области одноосное напряжённое состояние и, варьируя величину действующего напряжения, проводят измерения соответствующих разностей между величинами магнитной проницаемости по направлению действия силы и в перпендикулярном направлении.

Третья методика связана с измерением коэрцитивной силы. В литературе встречаются следующие названия: метод магнитной структуроскопии [132] и коэрцитиметрический метод [133]. Величина коэрцитивной силы в ферромагнетиках связана с величиной осевой деформации в направлении, перпендикулярном направлению намагничивания [134]. Полагается линейная зависимость между ними [133]. Методика эксперимента [135] заключается в измерении коэрцитивной силы в точке на поверхности образца в трёх, или более направлениях, определении по этим данным осевой деформации и по ней и нахождении двух главных напряжений и угла ориентации главного направления. Калибровочные коэффициенты определяются в предварительных экспериментах, причём при этом существует возможность исключить использование упругих констант, учтя их в калибровочных коэффициентах [132].

Другой метод связан с измерениями остаточной намагниченности, известный как метод магнитной памяти металла (МПМ). Он основан на обратном

магнитострикционном эффекте Виллари [136]. Этот подход подразумевает измерение остаточной намагниченности металла, которая монотонно уменьшается с ростом напряжений и обращается в ноль при достижении напряжениями предела текучести [133]. В частности, получена следующая формула [137]:

$$\frac{H_r(\sigma)}{H_r^0} = (1 + 0,318\lambda_s k_r \sigma)^{-1}; \quad (1.28)$$

$$k_r = \frac{J_r^0}{H_c^0},$$

где  $H_r^0$  и  $H_r(\sigma)$  – соответственно напряжённость поля остаточной намагниченности металла в ненапряжённом состоянии при  $\sigma=0$  и под действием механического напряжения  $\sigma$ ,  $J_r^0$  – остаточная намагниченность в ненапряжённом состоянии,  $H_c^0$  – коэрцитивная сила металла в ненапряжённом состоянии,  $\lambda_s$  – магнитострикция насыщения металла. В работе [138] предлагается проводить предварительный калибровочный эксперимент. Имеющиеся публикации не содержат способа разделения компонент напряжённого состояния и подразумевают построение калибровочных кривых непосредственно для исследуемого отношения главных напряжений, хотя в зарубежных публикациях ещё в 1995 году появились первые предпосылки к определению двух компонент напряжённого состояния по результатам измерения остаточной намагниченности [139, 140].

Метод электросопротивления [141] основан на зависимости величины удельного электросопротивления от действующего механического напряжения. Как и в большинстве магнитных методов, предполагается пропорциональная зависимость величины электросопротивления от осевого напряжения с нахождением коэффициента пропорциональности из предварительного эксперимента, нет способа разделения компонент напряжённого состояния в



случае сложного напряжённого состояния. Для измерения величины удельного электросопротивления к поверхности исследуемого проводящего материала подводят два электрода, при этом используются острые электроды для прокалывания поверхностной оксидной плёнки с высоким сопротивлением (либо такая плёнка предварительно убирается обработкой). Через электроды пропускают переменный ток и измеряют значение сопротивления между ними. По полученному значению определяют величину эффективного удельного электрического сопротивления (по соотношениям для скин-эффекта), которое и связывают с величиной механического напряжения. Этот метод отличается тем, что, варьируя частоту тока, возможно изменять глубину его проникновения. Тем самым достигается измерение компонент напряжений, осреднённых по различной глубине. Это может служить основанием для построения методики определения неоднородных по глубине остаточных напряжений, однако на сегодняшний день результатов реализаций такого подхода в литературе не найдено.

Кроме прямого измерения величины удельного электросопротивления контактным методом, существует возможность бесконтактного измерения при помощи вихревых токов [142] (токов Фуко). Для этого в исследуемом теле при помощи индукционной катушки возбуждают вихревые токи и одновременно измеряют величину её активного сопротивления и индуктивности. В частности, это может быть реализовано введением в цепь катушки последовательной ёмкости и измерением характеристик резонансной частоты и добротности образовавшегося колебательного контура [143].

Анализируя известные магнитно-электрические методы, можно отметить следующие их особенности. Все эти методы основываются на предложенных эмпирических зависимостях между магнитно-электрическими характеристиками и компонентами тензора напряжений. В большинстве методов нет возможности

разделять компоненты сложного напряжённого состояния. Применяемые в магнитных методах структуроскопы дают нелокализованные измерения, в частности область измерения величин некоторыми приборами превосходит 1500 мм<sup>2</sup> [133]. Точность измерения остаточных напряжений относительно невысока – в лабораторных условиях порядка 15%, при натурных измерениях – до 30-36%, при этом величина остаточных напряжений напрямую влияет на точность и при измерении напряжений до уровня 100 МПа в стали ошибки могут достигать 60% [133, 144]. Магнитошумовой, коэрцитиметрический и МПМ-метод применяются только к материалам, проявляющим ферромагнитные свойства; методы, основанные на определении величины удельной электропроводности – только к проводящим материалам.

### 1.2.3 Методы акустоупругости

Интенсивное развитие динамической теории упругости относится к середине XX века и связано с работами Д. Юза и Дж. Келли, [145], Р. Бэнсона и В. Ралсона [146] (использовали термин «акустоупругость» («acoustoelasticity»)), советских учёных [147, 148].

Основой методов акустоупругости является линейная зависимость скоростей упругих волн от компонент тензора напряжений. Известно три основных метода акустоупругости [149].

Первая методика связана с изменением скорости упругой сдвиговой волны распространяющейся вдоль направления действия одноосного напряжения: величину этого напряжения можно определить, сравнивая измеренную скорость распространения волны в напряжённом материале со скоростью распространения волны в ненапряжённом состоянии.

По второй методике исследуется произвольная упругая сдвиговая волна, которая преобразуется в пару сдвиговых волн с взаимно перпендикулярными

векторами поляризации: направление вектора поляризации одной волны совпадает с направлением приложенного напряжения, а направление поляризации второй – перпендикулярно этой оси. Ввиду того, что волны имеют различную скорость распространения, при прохождении толщи материала они получают разность фаз, пропорциональную приложенному напряжению [150]. Измерение полученной разности фаз предоставляет возможность определить действующее осевое напряжение.

Третья методика связана с увеличением плотности дефектов в напряжённой кристаллической структуре. Увеличение объёмной плотности дефектов повышает поглощение упругих волн в материале, что позволяет определять компоненты напряжения по измерениям величины коэффициента затухания упругой волны.

Необходимо отметить ряд преимуществ, которые привели к широкому распространению методов акустоупругости. Метод не требует изготовления специальных образцов и допускает измерения на натурной конструкции [151], обладает высокой оперативностью получения результатов и не имеет существенных ограничений на исследуемые материалы. Наибольшее распространение получили методы определения напряжений на основе измерения скорости ультразвука [152]. В значительной мере это связано с наличием полного теоретического обоснования и простотой интерпретации. В 2007 году введён государственный стандарт (разработан Нижегородским филиалом ИМАШ РАН и ОАО «НИЦ КД») [153], регламентирующий измерения компонент тензора напряжений с использованием метода акустоупругости.

Несмотря на широкий список преимуществ, метод акустоупругости имеет ряд недостатков. Точность результатов измерений методом акустоупругости существенно ограничивается собственной акустической анизотропией

материала, которая может достигать в некоторых сталях десятков процентов. Эффект акустоупругости связан с упругими постоянными высших порядков [12, 11, 154, 155], вносящими малый вклад в упругое поведение материала. Для обеспечения приемлемой точности определения остаточных напряжений требуется прецизионные измерения скоростей ультразвуковых волн. В работе [152], в частности, указывается, что для обеспечения точности определения напряжений порядка 10% от предела текучести материала, требуется измерение скоростей упругих волн с относительной погрешностью порядка 0,1%–0,01%. Кроме того, для эффективного генерирования ультразвуковых волн с заданными характеристиками и их регистрации с необходимым временным разрешением, требуется сложная высокоточная аппаратура. Наконец, необходимо отметить, что степень локализации исследования лимитируется имеющимися в распоряжении ультразвуковыми датчиками, поскольку результаты измерения являются усреднёнными по объёму прозвучивания, который определяется произведением площади датчика на толщину слоя материала.

### **1.3 Сравнительный анализ возможностей экспериментальных методов**

Существующие методы исследования остаточного напряженно-деформированного состояния можно условно разделить на три группы.

Первая группа включает в себя комплекс методик, основанных на удалении части материала образца и измерении вызванных этим компонент тензора деформаций или вектора перемещений (механические методы). Этот комплекс включает в себя два класса методов – специальные методы, в которых применяются образцы конкретных форм, и определение остаточных напряжений происходит по заранее установленным для таких образцов соотношениям, и универсальные методы освобождения, которые не требуют образцов специфических форм.

Основным недостатком этой группы является необходимость частичного или полного нарушения целостности элемента. Достоинствами являются простота реализации и достижения высокой точности результатов. Наиболее существенным достоинством представляется тот факт, что компоненты тензора остаточных напряжений определяются в результате решения обратной задачи механики деформируемого твёрдого тела. При исследовании напряжений в изделиях сложной конфигурации специальными методами образцы конкретных форм должны быть вырезаны из них. Остаточные напряжения в процессе вырезки образца перераспределяются и их распределение в подготовленном образце не соответствует распределению в том же объёме исходного элемента. В случаях, когда вырезка образца из элемента конструкции не требуется и сам элемент имеет форму, для которой существует методика исследования, остаточное напряжённо-деформированное состояние устанавливается полностью. Класс универсальных методов освобождения не требует подготовки специальных образцов, напряжения определяются в произвольной точке поверхности тела. При этом создаваемые повреждения относительно малы и во многих случаях на эксплуатационных свойствах изделий не сказываются. Однако остаточные напряжения находятся только для приповерхностного слоя, а исследование напряжений по глубине элемента затруднено, или невозможно.

Вторая группа содержит методики, в которых измеряется микродеформация кристаллической решётки. В настоящее время эта группа исчерпывается дифракционными методами. Основным достоинством данной группы является возможность бесконтактного измерения компонентов тензора микродеформаций без повреждения образца. При этом определяются микронапряжения отдельных кристаллитов. Вопрос определения микронапряжений остаётся открытым по настоящий момент. Отнесение этих микронапряжений к напряжениям третьего рода также под вопросом.

Применение существующих на сегодняшний день методик требует дорогостоящего оборудования, а требования к точности измерений диктует необходимость прецизионных измерений, что дополнительно увеличивает затраты на оборудование. Кроме того, существующие методики предполагают работу с ионизирующим излучением, что влечёт за собой сопутствующие затраты и риски.

Третья группа представляет собой комплекс методик, основанных на измерении физических параметров, связанных с напряжённо-деформируемым состоянием твердого тела, так называемые корреляционные методы. В эту группу входят рассмотренные магнитные, электрические и акустические методы.

Достоинством третьей группы также является возможность проведения измерений без повреждения элемента. Методики, входящие в третью группу, требуют предварительного построения калибровочной кривой, либо определения калибровочных коэффициентов в дополнительном эксперименте. Построенные таким образом зависимости позволяют определить остаточные напряжения. Методы третьей группы требуют специфического оборудования, стоимость которого, однако, гораздо ниже оборудования второй группы. Специфика возбуждаемых эффектов выдвигает требования к материалам. Так, например, значительная часть магнитных методов требует наличия ферромагнитных свойств, электрических – проводимости и т. п. Анализ полученных результатов свидетельствует о том, что методы третьей группы в целом обладают невысокой точностью и применяются, в основном, к исследованиям одноосного напряжённого состояния. Аппаратура методов в большинстве методов не позволяет проводить локальные измерения. Результатом являются компоненты напряжения, усреднённые неким образом по области воздействия, в пределах которой они могут существенно изменяться.

В настоящем обзоре представлены методы, применяющиеся для определения значений компонент тензора остаточных напряжений. Не рассматривались методы позволяющие определять наличие остаточных напряжений в теле, например, метод химической пробы [156] и другие.

#### **1.4 Нормативная документация**

Нормативная база, касающаяся применения методов исследования остаточных напряжений, в настоящее время развита слабо. Имеющаяся документация охватывает отдельные аспекты и методики.

ГОСТ Р 52891–2007 [157], разработанный ИПМех РАН, описывает исследование остаточных напряжений методом сверления отверстий с регистрацией перемещений методом голографической интерферометрии. Стандарт регламентирует порядок подготовки и проведения измерений, обработки результатов, содержит численные значения коэффициентов, применяемых для расчёта компонент остаточных напряжений.

Акустические методы определения остаточных напряжений регламентируются ГОСТ Р 52731–2007 [153]. Стандарт определяет требования к средствам измерения и объекту контроля, порядок подготовки и проведения измерений и содержит общие правила обработки результатов.

Применение магнитных методов исследования остаточных напряжений для стального проката регламентируется ГОСТ 30415–96 [158], разработанным межгосударственным комитетом МТК 145 «Методы контроля металлопродукции» и принятым странами СНГ. Стандарт описывает общие требования к определению произвольных параметров стали на основе корреляционных зависимостей с магнитными характеристиками. Конкретный перечень определяемых параметров и характеристик, на основании которых они определяются в стандарте, не приводится.

Известен стандарт ГОСТ 32207–2013 [159], регламентирующий применение целого ряда методик для определения остаточных напряжений в колёсах железнодорожного транспорта. Стандарт регламентирует применение механического метода в виде радиальной и кольцевой разрезки колёс с регистрацией компонент тензора деформаций тензOMETрами, акустического ультразвукового метода и рентгеновского метода. Во всех случаях указывается методика проведения эксперимента, но отсутствуют численные значения коэффициентов, применяемых для пересчёта значений.

В США Американским сообществом по испытаниям и материалам (ASTM) с 1981 года введён и поддерживается стандарт серии E 837 [93], подробно описывающий методику измерения поля остаточных напряжений методом сверления отверстия с регистрацией компонент тензора деформаций розеткой тензOMETров. Стандарт описывает соответствующее оборудование, порядок подготовки и проведения испытаний, обработку результатов. В нём содержатся конкретные числовые значения, применяющиеся при обработке результатов измерений. Кроме того, в стандарте приведён известный опыт выполнения подобных измерений и обобщены некоторые результаты по исследованию достоверности измерений.

## **1.5 Выводы по главе 1**

В первой главе обсуждаются результаты известных исследований актуальной задачи определения трёхмерного неоднородного остаточного напряжённо-деформированного состояния физическими методами и методами механики деформируемого твёрдого тела.

1. Представлен краткий аналитический обзор обширного экспериментально-теоретического материала в области методов определения остаточного напряжённо-деформированного состояния. В результате анализа выделены



три группы методов: механические методы, основанные на измерении компонент тензора деформаций и вектора перемещений тела при образовании новых поверхностей (методы сечений, сверления отверстий, столбиков и т.п.); дифракционные методы, основанные на прямом измерении расстояния между атомными плоскостями кристаллической решётки (рентгеновский метод и метод дифракции тепловых нейтронов) и корреляционные методы, основанные на измерении физических характеристик, имеющих корреляционную связь с напряжённо-деформированным состоянием (электрические, магнитные и акустические методы).

2. На основе проведенного анализа сделан вывод о том, что ни один из известных современных методов не является универсальным, области применимости ряда методов ограничены вследствие уникальности необходимого оборудования, больших материальных затрат при применении, низкой точности и других факторов.
3. Имеющаяся нормативная база фрагментарна, не покрывает множество актуальных методов исследования остаточных напряжений и требует развития.
4. Применение большинства из дифракционных и корреляционных методов связано с необходимостью построения взаимосвязи компонент остаточного напряжённо-деформированного состояния с измеряемыми величинами, что представляет сложности в силу различных причин.
5. При применении механических методов важным вопросом является метод удаления материала, что связано с проблемами возникновения дополнительно индуцированных напряжений и деструкции поверхностей измерения.
6. По мнению автора для определения неоднородных полей остаточных напряжений в настоящее время наиболее целесообразным является совместная реализация метода пошагового сверления отверстий (стандарт

- ASTM E837), к преимуществам которого относятся сравнительная простота применения, особенно вне лабораторных условий, и оптических методов измерения компонент вектора перемещений: метода цифровой спекл-интерферометрии и корреляции цифровых изображений с автоматизацией сбора и обработки данных. Построению метода определения неоднородного поля остаточных напряжений на основе этих методов и посвящена эта работа.
7. В настоящее время совместно с методом сверления отверстий применяются два основных подхода: измерение компонент тензора деформаций при помощи тензорезистивных датчиков и измерение компонент вектора перемещений оптическими методами (DSPI/DIC). Отработаны и широко применяются методы вычисления однородного поля остаточных напряжений по результатам измерений в рамках этих подходов.
  8. Имеющийся математический аппарат позволяет вычислять неоднородные по глубине остаточные упругие напряжения по результатам измерения компонент тензора деформаций. Существующий метод вычисления неоднородных остаточных напряжений по результатам измерения компонент тензора деформаций имеет существенные недостатки и обладает низкой точностью.
  9. Определение полей остаточных напряжений по результатам измерения перемещений точек поверхности тела представляет собой перспективную и актуальную задачу, разработка которой ведётся одновременно рядом исследователей.
  10. Адекватность результатов вычисления напряжений зависит от точности и объёма измерений деформаций или перемещений и как следствие – от применяемых методов их регистрации.

## ГЛАВА 2. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ В ПЛОСКОСТИ ПОЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В ряде экспериментов с применением для регистрации перемещений спекл-интерферометрии отмечались несимметричные картины полос, которые вызываются наличием неоднородных полей напряжений в зоне высверленного отверстия. Такие поля напряжений приводят к несимметричному распределению деформаций вокруг отверстия. Поскольку деформации, возникающие при высверливании отверстия, определяются полем напряжений на контуре отверстия до высверливания, основным параметром, определяющим неоднородность деформаций, является разница компонент тензора напряжений на противоположных берегах контура отверстия.

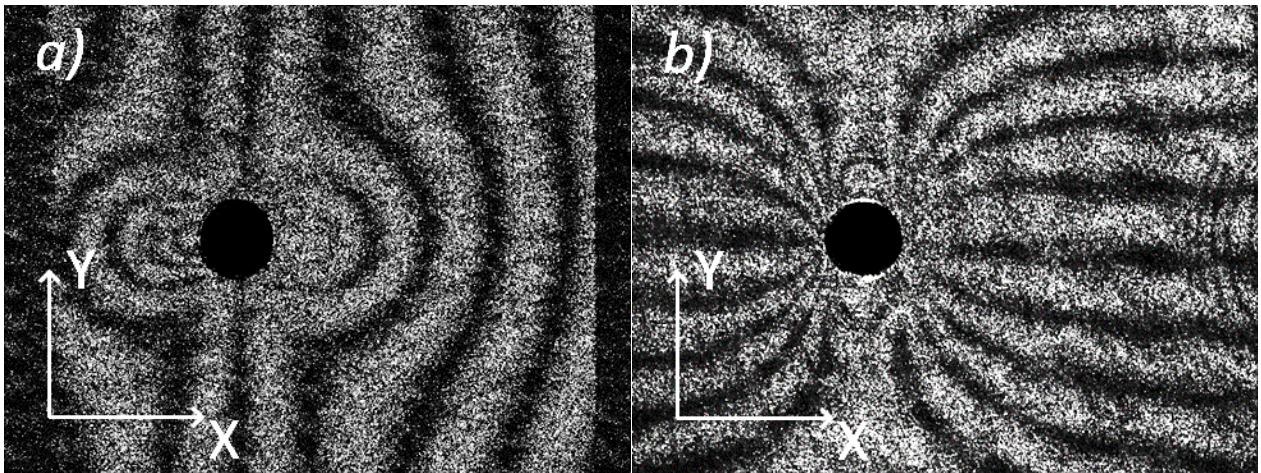


Рис. 2.1. Интерферограммы с асимметрией картины перемещений. *a)* –  $u_x$ , *b)* –  $u_y$

Методика, применяемая для определения однородного поля напряжений, может быть доработана [38, 40] для определения неоднородных в плоскости напряжений. В этом случае количество неизвестных увеличивается: помимо влияния самих компонент тензора напряжений добавляются их градиенты по различным направлениям.

## 2.1 Случай продольных градиентов напряжений

Рассмотрим случай на примере плоского напряжённого состояния. В силу дифференциальных уравнений равновесия если потребовать при отсутствии массовых сил  $\partial\sigma_x/\partial x \neq 0$ ,  $\sigma_y = 0$ , невозможно одновременно потребовать  $\partial\tau_{xy}/\partial y = 0$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Предположим, что в теле присутствуют остаточные компоненты тензора напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  такие что  $\partial\sigma_x/\partial x = -\partial\tau_{xy}/\partial y \neq 0$ ,  $\partial\sigma_x/\partial y = 0$ ,  $\partial\sigma_y/\partial y \neq 0$ ,  $\partial\sigma_y/\partial x = 0$  по крайней мере в зоне проведения измерений на контуре высверливаемого отверстия, остальные компоненты тензора напряжений равны нулю. Тогда, считая значения производных от компонент напряжений по координатам постоянными в пределах отверстия, в уравнения (1.19) можно ввести дополнительные члены в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} p(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} q\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + u_0, \\ v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} q(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} p\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + v_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$i = 1, \dots, I$$

Дополнительно введённые функции  $p = p(r, \theta)$  и  $q = q(r, \theta)$  определяются при помощи МКЭ-моделирования. Для случая плоского напряжённого состояния модель изображена на рис. 2.2 и представляет собой симметричную половину пластины с удалёнными границами, нагруженную на контуре отверстия напряжениями  $\sigma_x = cx$  и  $\tau_{xy} = -cy$ , где  $c$  – нормировочная константа. Условия симметрии выполняются на границе  $y=0$ .

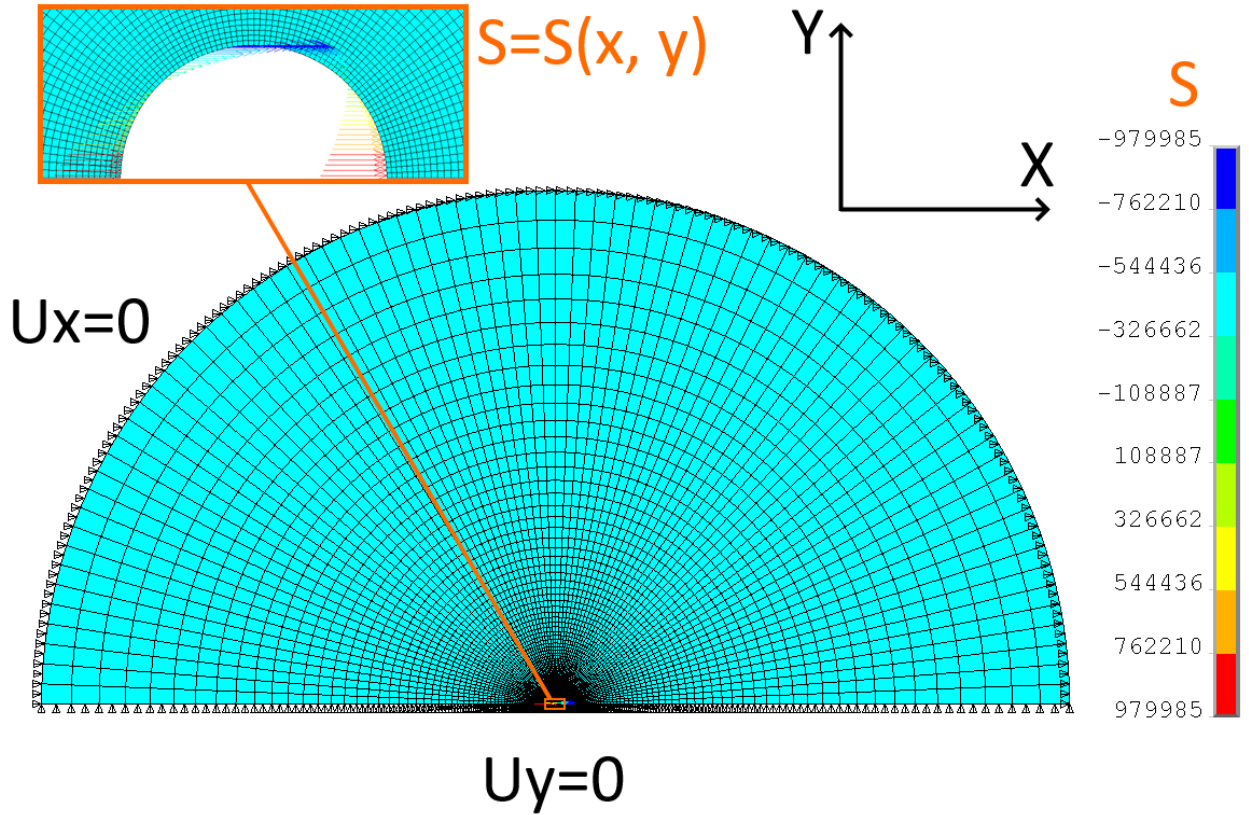


Рис. 2.2. Модель и схема нагружения для определения базовых функций для случая продольного градиента

Полученные в результате расчёта перемещения  $u=u(r, \theta)$ ,  $v=v(r, \theta)$ , представляют собой с точностью до множителя базовые функции:

$$\begin{aligned} p(r, \theta) &= \frac{E_c}{cE_r} u(r, \theta) \\ q(r, \theta) &= \frac{E_c}{cE_r} v(r, \theta) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь  $E_c$  – модуль Юнга, использованный при расчёте базовых функций,  $E_r$  – модуль Юнга материала, для которого проводится эксперимент,  $c$  – нормировочная константа.

На рис. 2.3–2.4 показаны результаты вычисления перемещений в пластине с отверстием радиусом  $r_0=1$  мм при  $c=10$  МПа/мм и  $E=100$  ГПа.

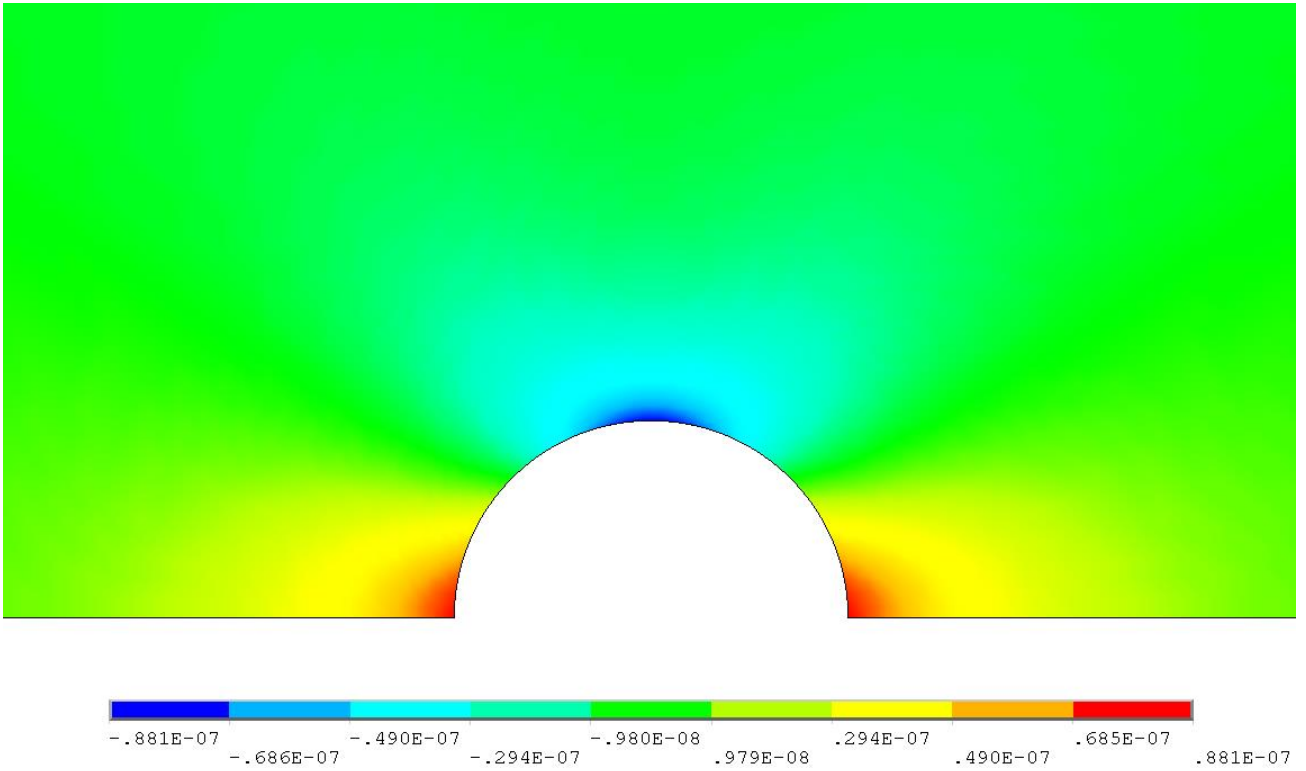


Рис. 2.3. Результаты расчёта поля  $u=u(r, \theta)$  для продольного градиента напряжений

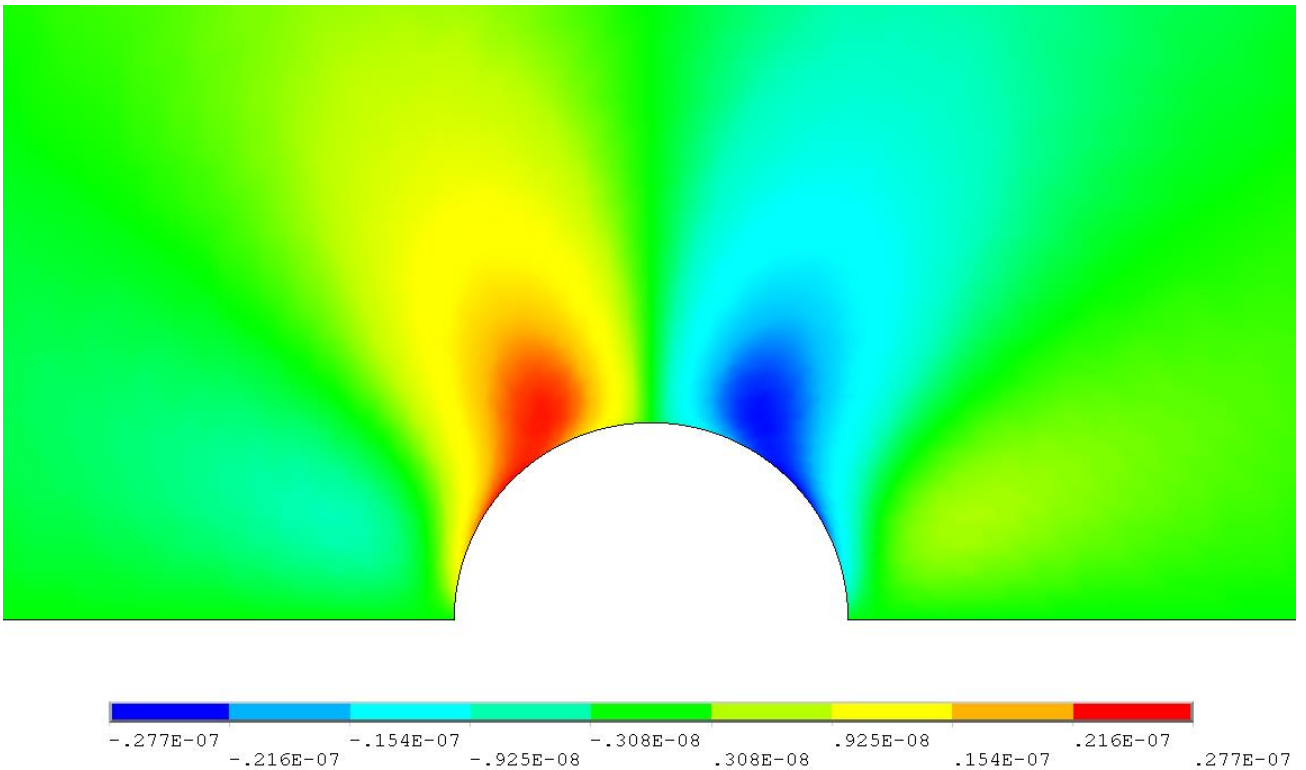


Рис. 2.4. Результаты расчёта поля  $v=v(r, \theta)$  для продольного градиента напряжений

Как видно из рисунков, поле перемещений носит локальный характер и очень быстро затихает на расстояниях соизмеримых с размером отверстия. Добавочный эффект такого поля перемещений становится различим при больших градиентах напряжений, что демонстрирует следующий пример. На рис. 2.5 показаны синтезированные интерферограммы перемещений стальной пластины (модуль Юнга  $200 \text{ ГПа}$ ), возникающие при одноосном растягивающем напряжении в центре отверстия  $100 \text{ МПа}$  и величине продольного градиента  $25 \text{ МПа/мм}$ .

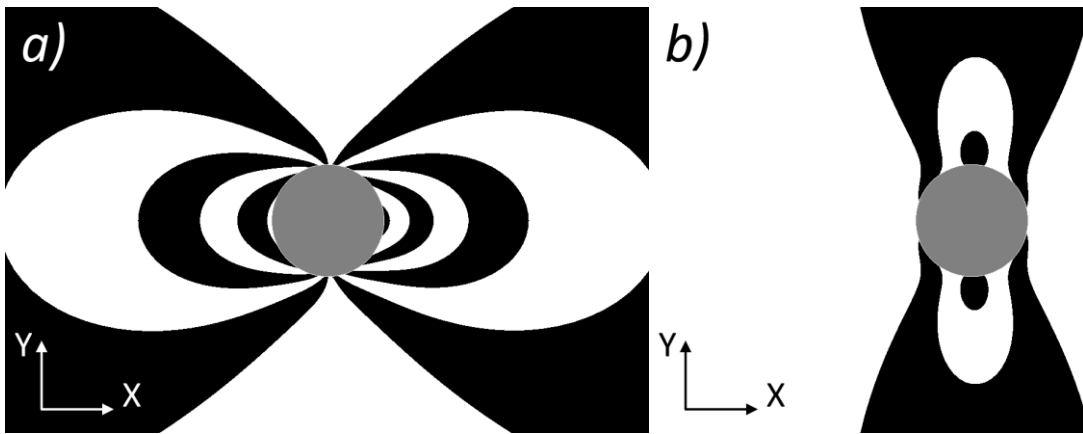


Рис. 2.5. Синтетические интерферограммы при  $\sigma_x=100 \text{ МПа}$ ,  $\partial\sigma_x/\partial x=25 \text{ МПа/мм}$ : a) –  $u$ ; b) –  $v$

На рис. 2.6 приведены аналогичные интерферограммы при отсутствии градиента (действуют только осевые растягивающие напряжения  $100 \text{ МПа}$ ).

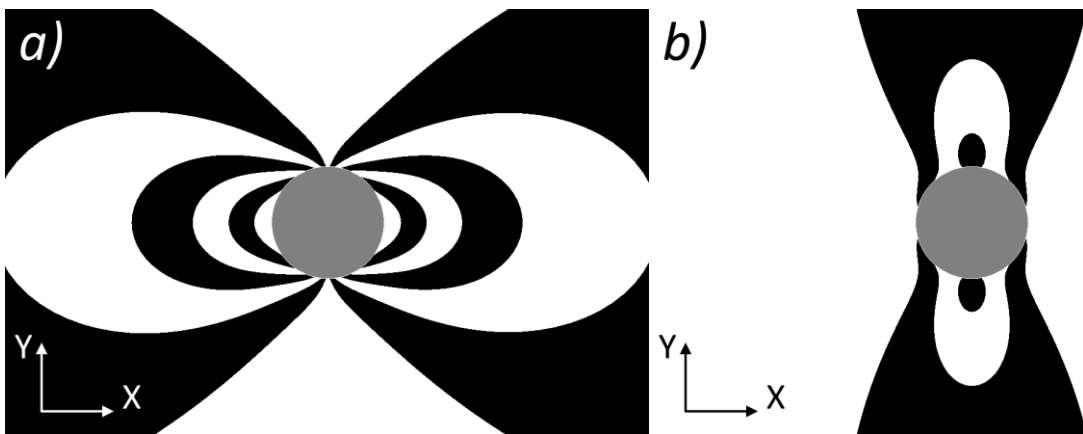


Рис. 2.6. Синтетические интерферограммы при  $\sigma_x=100 \text{ МПа}$ ,  $\partial\sigma_x/\partial x=0 \text{ МПа/мм}$ : a) –  $u$ ; b) –  $v$

Сравнивая рис. 2.5 и 2.6, можно отметить, что наличие градиента вызывает видимое смещение картины полос в направлении возрастания напряжений. Наиболее заметно этот эффект проявляется на компоненте перемещений сонаправленной с направлением градиента напряжений. При высоких значениях градиента асимметрия на интерферограмме этой компоненты может выражаться в разнице порядков полос на её противоположных сторонах. Картина полос на перпендикулярной компоненте мало искажается градиентом. Такие эффекты имеют место в эксперименте (см. рис. 2.1).

## 2.2 Случай поперечных градиентов напряжений

Рассмотрим неоднородное в поперечном направлении поле тензора остаточных напряжений. В данном случае предположим, что в теле действуют остаточные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  такие что  $\partial\sigma_x/\partial x = 0$ ,  $\partial\sigma_x/\partial y \neq 0$ ,  $\partial\sigma_y/\partial y = 0$ ,  $\partial\sigma_y/\partial x \neq 0$ , остальные компоненты тензора напряжений равны нулю (согласно дифференциальным уравнениям равновесия (2.1) можно потребовать строго нулевых значений всех компонент кроме  $\sigma_x$ ). Тогда аналогичное (2.2) выражение запишется в виде:

$$\begin{aligned} u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} s(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} t\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + u_0, \\ v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \frac{\partial\sigma_x}{\partial y} t(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial\sigma_y}{\partial x} s\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\quad + v_0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$i = 1, \dots, I$$

Модель для вычисления базовых функций  $s = s(r, \theta)$  и  $t = t(r, \theta)$  приведена на рис. 2.7. В этой задаче модель представляет собой симметричную половину пластины с удалёнными границами, нагруженную на контуре отверстия напряжениями  $\sigma_x = cy$ , где  $c$  – нормировочная константа. Условия симметрии выполняются на границе  $x=0$ .



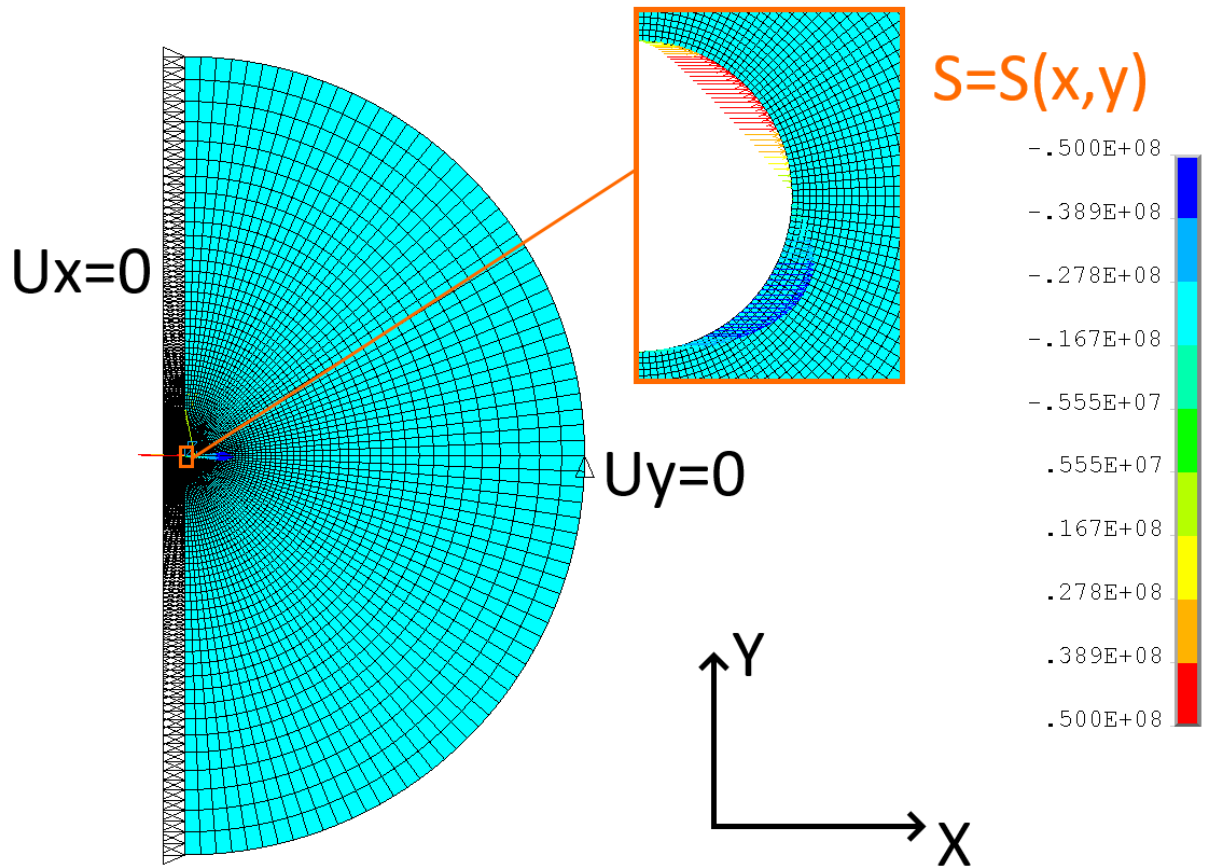


Рис. 2.7. Модель и схема нагружения для определения базовых функций для случая поперечного градиента

Как и в случае продольного градиента, перемещения  $u = u(r, \theta)$ ,  $v = v(r, \theta)$ , определяют базовые функции с точностью до множителя:

$$\begin{aligned} s(r, \theta) &= \frac{E_c}{cE_r} u(r, \theta) \\ t(r, \theta) &= \frac{E_c}{cE_r} v(r, \theta) \end{aligned} \quad (2.5)$$

В (2.5) использованы те же обозначения, что и в (2.3).

На рис. 2.8 показаны результаты вычисления перемещений в пластине с отверстием радиусом  $r_0 = 1$  мм при  $c = 10$  МПа/мм и  $E = 100$  ГПа.

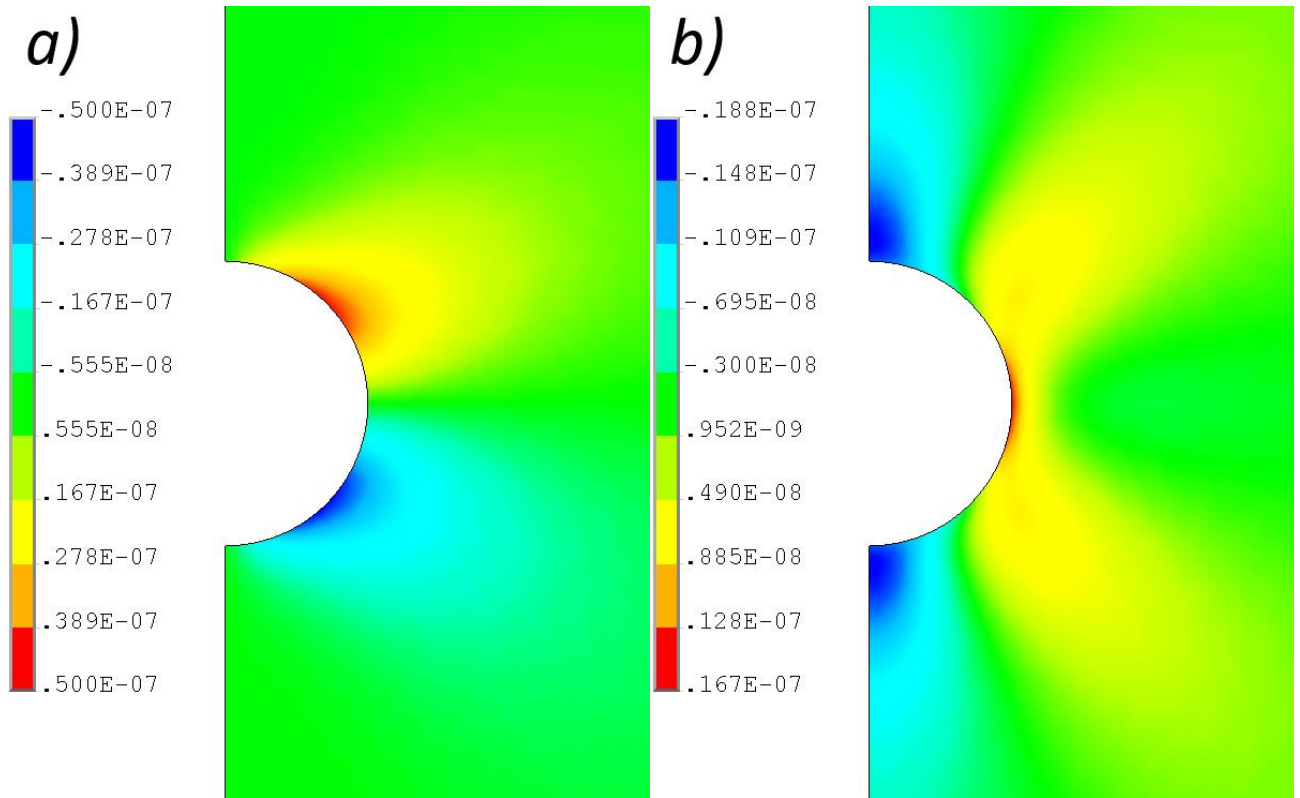


Рис. 2.8. Результаты расчёта полей перемещений для поперечного градиента напряжений: *a)* –  $u=u(r, \theta)$ ,  
*b)* –  $v=v(r, \theta)$

Поле перемещений поперечного градиента также носит локальный характер. Добавочный эффект этого поля менее различим, чем эффект поля перемещений в случае продольного градиента напряжений.

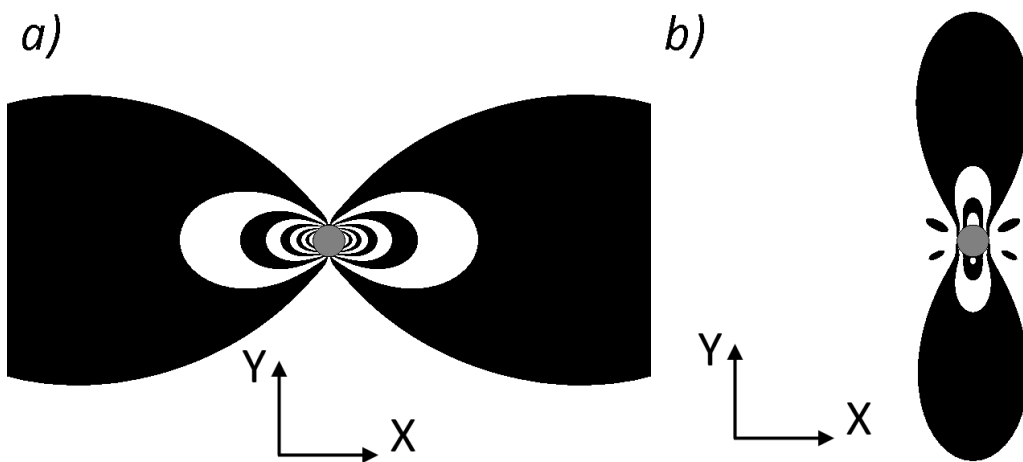


Рис. 2.9. Синтетические интерферограммы при  $\sigma_x=200$  МПа,  $\partial\sigma_x/\partial y=50$  МПа/мм: *a)* –  $u$ ; *b)* –  $v$

Рассмотрим пример со стальной пластиной (модуль Юнга  $200 \text{ ГПа}$ ). Осевые растягивающие напряжения в центре отверстия составляют  $200 \text{ МПа}$ , величина поперечного градиента  $50 \text{ МПа/мм}$ . На рис. 2.9 показаны синтезированные интерферограммы перемещений такой пластины. На рис. 2.10 приведены аналогичные интерферограммы при отсутствии градиента (действуют только осевые растягивающие напряжения  $200 \text{ МПа}$ ).

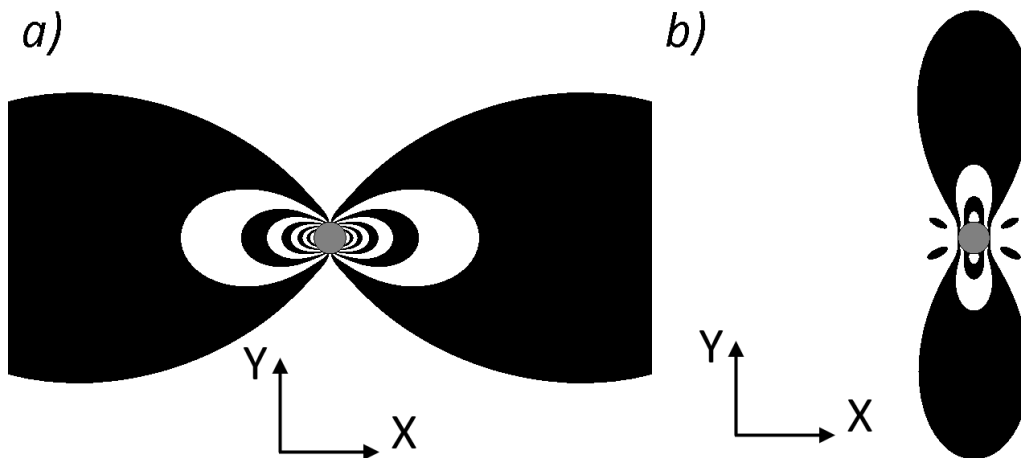


Рис. 2.10. Синтетические интерферограммы при  $\sigma_x=200 \text{ МПа}$ ,  $\partial\sigma_x/\partial y=0 \text{ МПа/мм}$ : а) –  $u$ ; б) –  $v$

Из рисунков видно, что в случае поперечного градиента интерферограммы мало отличаются от интерферограмм пластины без градиента, несмотря на большие значения величины градиента по сравнению со случаем продольного. Наибольший вклад добавочного поля перемещений наблюдается на поперечной компоненте перемещений  $v$ . Визуально различим эффект смещения картины полос, однако образование полос дополнительных порядков возможно только при очень больших значениях градиента.

### 2.3 Общий случай неоднородных в плоскости остаточных напряжений

Объединяя выражения (2.2) и (2.4) и в предположении, что в теле присутствуют компоненты остаточных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  такие что  $\partial\sigma_x/\partial x \neq 0$ ,  $\partial\sigma_x/\partial y \neq 0$ ,  $\partial\sigma_y/\partial y \neq 0$ ,  $\partial\sigma_y/\partial x \neq 0$ , а прочие компоненты тензора напряжений равны нулю, приходим к такому выражению:

$$\begin{aligned}
u_i &= \sigma_x f(r_i, \theta_i) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} p(r_i, \theta_i) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} s(r_i, \theta_i) - \sigma_y g\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad - \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} t\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} q\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + u_0, \\
v_i &= \sigma_x g(r_i, \theta_i) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} q(r_i, \theta_i) + \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} t(r_i, \theta_i) + \sigma_y f\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} s\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} p\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}\right) + v_0
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Дополнительно введённые базовые функции  $p = p(r, \theta)$ ,  $q = q(r, \theta)$ ,  $s = s(r, \theta)$  и  $t = t(r, \theta)$  при частных производных определяются в предварительном калибровочном расчёте при помощи МКЭ. На основании результатов оптических измерений уравнения (2.5) записываются для каждой экспериментальной точки, после чего величины  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\partial \sigma_x / \partial x$ ,  $\partial \sigma_x / \partial y$ ,  $\partial \sigma_y / \partial y$ ,  $\partial \sigma_y / \partial x$  находятся из получившейся переопределённой системы методом наименьших квадратов.

## 2.4 Выводы по главе 2

1. Предложен метод определения неоднородных в плоскости остаточных упругих напряжений по результатам измерения перемещений основанный на дополнении известного метода членами, описывающими зависимость от градиентов в плоскости.
2. Сформулированы задачи, позволяющие определять базовые функции для случая продольного и поперечного градиента главного напряжения.
3. Для случая плоского напряжённого состояния численно определены и визуализированы базовые функции при продольном и поперечном градиенте напряжений.
4. Визуализированы синтетические интерферограммы компонент вектора перемещений для тонкой стальной пластины, находящейся в условиях одноосного растяжения с градиентами обоих видов и без таковых. Дано пояснение к наблюдаемым в эксперименте эффектам.

### ГЛАВА 3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПО ГЛУБИНЕ ПОЛЕЙ ОСТАТОЧНЫХ УПРУГИХ НАПРЯЖЕНИЙ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПТИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ КОМПОНЕНТ ВЕКТОРА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Частично снять недостатки метода определения остаточных напряжений по результатам тензометрирования возможно при измерениях перемещений точек поверхности тела оптическими методами. В этом случае не только компоненты тензора напряжения, но и само положение центра отверстия также является определяемым из решения уравнений параметром, а ошибки измерений частично компенсируются за счёт переопределённости этой системы [44]. Перспектива увеличения точности за счёт увеличения числа точек измерения и некоторые технологические преимущества [27] позволяют предположить, что развитие метода сверления отверстий в ближайшем будущем будет происходить именно совместно с оптическими методами измерения перемещений.

Важным аспектом разрабатываемого метода становится возможность его применения не только для заранее выбранных точек измерения и шагов по глубине отверстия, но и для произвольных их значений. Работы в этом направлении ведутся как в области обработки измерений компонент тензора деформаций [160, 161], так и для измерений компонент вектора перемещений [2].

#### **3.1 Интегральная форма определяющих соотношений**

Определение компонент тензора напряжений по измеренным компонентам тензора деформациям в общем случае представляет собой обратную задачу механики деформируемого твёрдого тела.

Представление деформационного отклика, развивающегося при наращивании некоторой несплошности в материале, в виде интеграла по траектории фронта несплошности широко распространено [7, 8, 91, 92, 162–164]. В методе сверления отверстий в качестве такой несплошности выступает

цилиндрическое отверстие, наращиваемое по координате  $z$ ,  $0 \leq z \leq h$ . Для простоты примем, что в теле действует неоднородное поле одноосного напряжения  $\sigma_x = \sigma_x(z)$ . Тогда перемещения на плоской поверхности тела запишутся в виде интегральных уравнений:

$$\begin{cases} u(r, \theta, h) = \int_0^h C(r, \theta, h, z) \sigma_x(z) dz, \\ v(r, \theta, h) = \int_0^h S(r, \theta, h, z) \sigma_x(z) dz \end{cases} \quad (3.1)$$

Уравнения (3.1) представляют собой интегральные уравнения Вольтерры 1-го рода. Базовые функции  $C = C(r, \theta, h, z)$  и  $S = S(r, \theta, h, z)$ , являющиеся ядрами этих уравнений, определяют касательные компоненты вектора перемещений на поверхности тела ( $z=0$ ) с отверстием глубиной  $h$  при приложении на слой, находящийся на глубине  $z$ , единичных растягивающих напряжений.

Имея ядра уравнений (3.1), можно построить систему уравнений аналогичную (1.19) связывающую распределение трёх компонент тензора напряжений вдоль траектории наращивания отверстия с историей изменения компонент вектора перемещений в каждой точке области вблизи отверстия на поверхности тела, следующего вида:

$$\begin{cases} u_i(h) = \int_0^h C(r_i, \theta_i, h, z) \sigma_x(z) dz - \int_0^h S\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, h, z\right) \sigma_y(z) dz + \\ \quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^h T_1(r_i, \theta_i, h, z) \tau_{xy}(z) dz + u_0 \\ v_i(h) = \int_0^h S(r_i, \theta_i, h, z) \sigma_x(z) dz + \int_0^h C\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, h, z\right) \sigma_y(z) dz + \\ \quad + \frac{\sqrt{2}}{2} \int_0^h T_2(r_i, \theta_i, h, z) \tau_{xy}(z) dz + v_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

$i = 1, \dots, I$

где:

$$\begin{aligned}
 T_1(r, \theta, h, z) &\equiv C\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) + C\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right) - S\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) \\
 &\quad + S\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right) \\
 T_2(r, \theta, h, z) &\equiv C\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) - C\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right) + S\left(r, \theta - \frac{\pi}{4}, h, z\right) \\
 &\quad + S\left(r, \theta - \frac{3\pi}{4}, h, z\right)
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Таким образом, построение метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений сводится к решению двух задач: определению ядер уравнений (3.1) и построению способа решения системы (3.2).

### 3.2 Алгоритм автоматизированного вычисления базовых функций

Аналогично подходу к определению однородного напряжённого состояния принимается, что распределение компонент вектора перемещений вокруг отверстия на плоской границе в произвольном массивном теле на достаточном удалении от неоднородностей формы описывается решением для упругого полупространства.

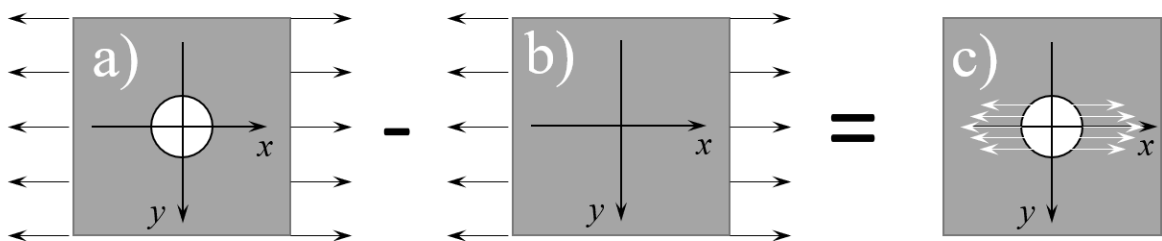


Рис. 3.1. Иллюстрация перехода от разности двух решений с нагрузкой на бесконечности к решению с нагрузкой на контуре

Рассмотрим упругое полупространство с действующими на бесконечности растягивающими осевыми напряжениями. При образовании отверстия в таком полупространстве на его поверхности возникнут дополнительные компоненты

вектора перемещения, которые равны разности компонент вектора перемещений сплошного полупространства и полупространства с отверстием.

Иными словами, решение задачи  $u_r^a = u_r^a(r, \theta)$ ,  $u_\theta^a = u_\theta^a(r, \theta)$  на рис. 3.1 а) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} u_r^a(r, \theta) = \frac{\sigma}{4\mu} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} r + U_p(r, h) + r \cos 2\theta + U_q(r, h) \cos 2\theta \right) \\ u_\theta^a(r, \theta) = -\frac{\sigma}{4\mu} (r - V_q(r, h)) \sin 2\theta \end{cases} \quad (3.4)$$

Эти выражения состоят из суммы компонент, описывающих решение задачи  $u_r^b = u_r^b(r, \theta)$ ,  $u_\theta^b = u_\theta^b(r, \theta)$  на рис 3.1 б):

$$\begin{cases} u_r^b(r, \theta) = \frac{\sigma}{4\mu} \left( \frac{1-\nu}{1+\nu} r + r \cos 2\theta \right) \\ u_\theta^b(r, \theta) = -\frac{\sigma}{4\mu} r \sin 2\theta \end{cases} \quad (3.5)$$

И компонент  $u_r^c = u_r^c(r, \theta)$ ,  $u_\theta^c = u_\theta^c(r, \theta)$ , являющихся решением задачи на рис 3.1 с):

$$\begin{cases} u_r^c(r, \theta) = \frac{\sigma}{4\mu} (U_p(r, h) + U_q(r, h) \cos 2\theta) \\ u_\theta^c(r, \theta) = \frac{\sigma}{4\mu} V_q(r, h) \sin 2\theta \end{cases} \quad (3.6)$$

В выражениях (3.4) - (3.6) и далее все величины размерности длины нормированы на радиус отверстия  $r_0$ ,  $\mu$  – параметр Ламе,  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Аналогичные рассуждения применяются в случае неоднородности в распределении напряжений по глубине. Выражение (3.6) можно переписать в терминах приращений:

$$\begin{cases} du_r^c(r, \theta, h, z) = \frac{\sigma}{4\mu} (u_p(r, h, z) + u_q(r, h, z) \cos 2\theta) dz \\ du_\theta^c(r, \theta, h, z) = \frac{\sigma}{4\mu} v_q(r, h, z) \sin 2\theta dz \end{cases} \quad (3.7)$$



Причём неизвестные функции перемещений  $u_p=u_p(r, h, z)$ ,  $u_q=u_q(r, h, z)$  и  $v_q=v_q(r, h, z)$  в (3.11) являются первообразными функций в (3.4) и (3.6), т.е.:

$$\begin{aligned} \int_0^h u_p(r, h, z) dz &= U_p(r, h) \\ \int_0^h u_q(r, h, z) dz &= U_q(r, h) \\ \int_0^h v_q(r, h, z) dz &= V_q(r, h) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Таким образом, для построения базовых функций  $C=C(r, \theta, h, z)$  и  $S=S(r, \theta, h, z)$  уравнения (3.1) требуется решить задачу о полупространстве с отверстием переменной глубины, нагруженном одноосным растяжением слоя в пределах глубины отверстия. Интересующим решением будет являться распределение тангенциальных компонент перемещений вокруг отверстия на поверхности упругого полупространства. Построение аналитического решения такой задачи затруднено, поэтому оно может быть получено численно с применением МКЭ.

Зная функции  $u_p$ ,  $u_q$  и  $v_q$ , функции  $C=C(r, \theta, h, z)$  и  $S=S(r, \theta, h, z)$  определяются через них в виде:

$$\begin{cases} C(r, \theta, h, z) = \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_r^c(r, \theta, h, z)}{dz} \cos \theta - \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_\theta^c(r, \theta, h, z)}{dz} \sin \theta \\ S(r, \theta, h, z) = \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_r^c(r, \theta, h, z)}{dz} \sin \theta + \frac{r_0}{\sigma} \frac{du_\theta^c(r, \theta, h, z)}{dz} \cos \theta \end{cases} \quad (3.9)$$

Подставляя (3.7) в (3.9), получим такие выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} C(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \cos \theta}{4\mu} (u_p(r, h, z) - u_q(r, h, z) - 2v_q(r, h, z) + \\ \quad + 2\cos^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))) \\ S(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \sin \theta}{4\mu} (u_p(r, h, z) + u_q(r, h, z) + 2v_q(r, h, z) - \\ \quad - 2\sin^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Выражения для функций  $T_1=T_1(r, \theta, h, z)$  и  $T_2=T_2(r, \theta, h, z)$  имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \sqrt{2} \sin \theta}{2\mu} (2u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z) - \\ \quad - 2\sin^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))) \\ T_2(r, \theta, h, z) = \frac{r_0 \sqrt{2} \cos \theta}{2\mu} (2u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z) - \\ \quad - 2\cos^2 \theta (u_q(r, h, z) + v_q(r, h, z))) \end{array} \right. \quad (3.11)$$

### 3.3 Нахождение базовых функций

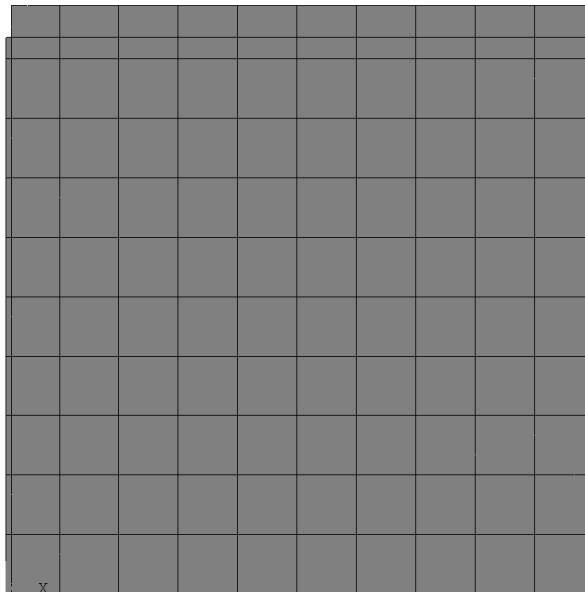
Для расчёта базовых функций требуется решить в МКЭ-постановке серию задач о теле с удалёнными границами и отверстиями различной глубины под действием одноосного растяжения каждого слоя в пределах глубины отверстия.

Для вычислений разумно использовать специализированные осегармонические конечные элементы [165], сводящие задачу с осесимметричной геометрией и не осесимметричной нагрузкой к двумерной постановке. Ранее уже предпринимались подходы к расчёту калибровочных значений с применением обобщённых осесимметричных элементов [166], однако подход с применением 12 узловых плоскостей обладает избыточной ресурсоёмкостью. Более рациональным является применение осегармонических элементов с одной узловой плоскостью и последовательным решением нескольких задач. В этом случае действующая нагрузка  $F=F(\theta)$  раскладывается в ряд такого вида:

$$F(\theta) = A_0 + \sum_N (A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) \quad (3.12)$$

Компоненты нагрузки  $A_n$ ,  $n = 0 \dots N$ , принято называть модами. Вклад каждой моды вычисляется независимо в отдельном расчёте. В случае одноосного растяжения (см. формулы (3.4) - (3.6)) нагрузка раскладывается на две моды: осесимметричную  $F = A_0$  (также называемой р-модой) и гармоническую моду второго порядка:  $F(\theta) = A_2 \cos(2\theta) + B_2 \sin(2\theta)$  (называемую q-модой). В этом случае размерность задачи снижается в 6 раз по сравнению с применением обобщённых осесимметричных элементов с 12 узловыми плоскостями.

Удалённые границы являются имитацией бесконечного упругого полупространства, поэтому сначала требуется решить вопрос о степени их удаления. Требуется соблюсти баланс между влиянием удалённости границ на точность решения и размером расчётной области, рост которой вызывает рост размерности задачи, а следовательно, и вычислительного времени.



**Рис. 3.2.** Расчётная область для исследования влияния удаления границ. Разбиение на квадраты соответствует шагам по удалённости границ

Для оценки влияния удалённости границ проведено решение серии задач с использованием осегармонических элементов для расчётной области, содержащей отверстие  $h=6r_0$ , и границами, удалёнными по двум осям на расстояния от  $10r_0$  до  $110r_0$  (рис. 3.2). Использовались элементы второго порядка с характерным размером  $0,1r_0$ . Область нагружена единичным нормальным давлением на верхнем слое контура толщиной  $0,1r_0$ .

Для оценки использовались значения компонент перемещений на поверхности модели на расстояниях  $r_0$ ,  $5r_0$  и  $10r_0$  от оси симметрии,  $r_0$  – радиус отверстия.

На рис. 3.3–3.5 показано влияние удаления границ расчётной области на величину компонент перемещений в р- и q-модах в точках, расположенных на расстояниях  $r_0$ ,  $5r_0$  и  $10r_0$  от оси симметрии. Для q-моды распределения отражают зависимость максимальные значения перемещений по углу.

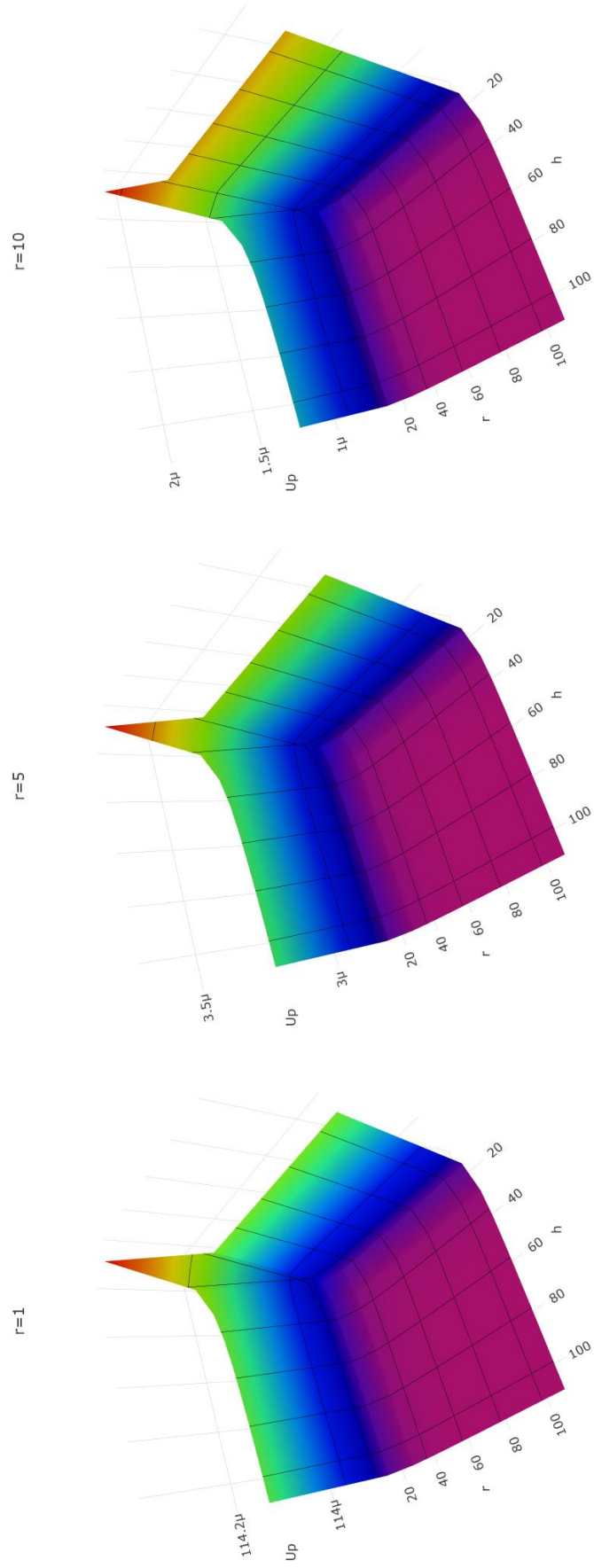


Рис. 3.3. Влияние удаления границ на значения радиальных перемещений  $u_p = u_p(r, h, z)$  для нулевой ( $\rho$ ) моды

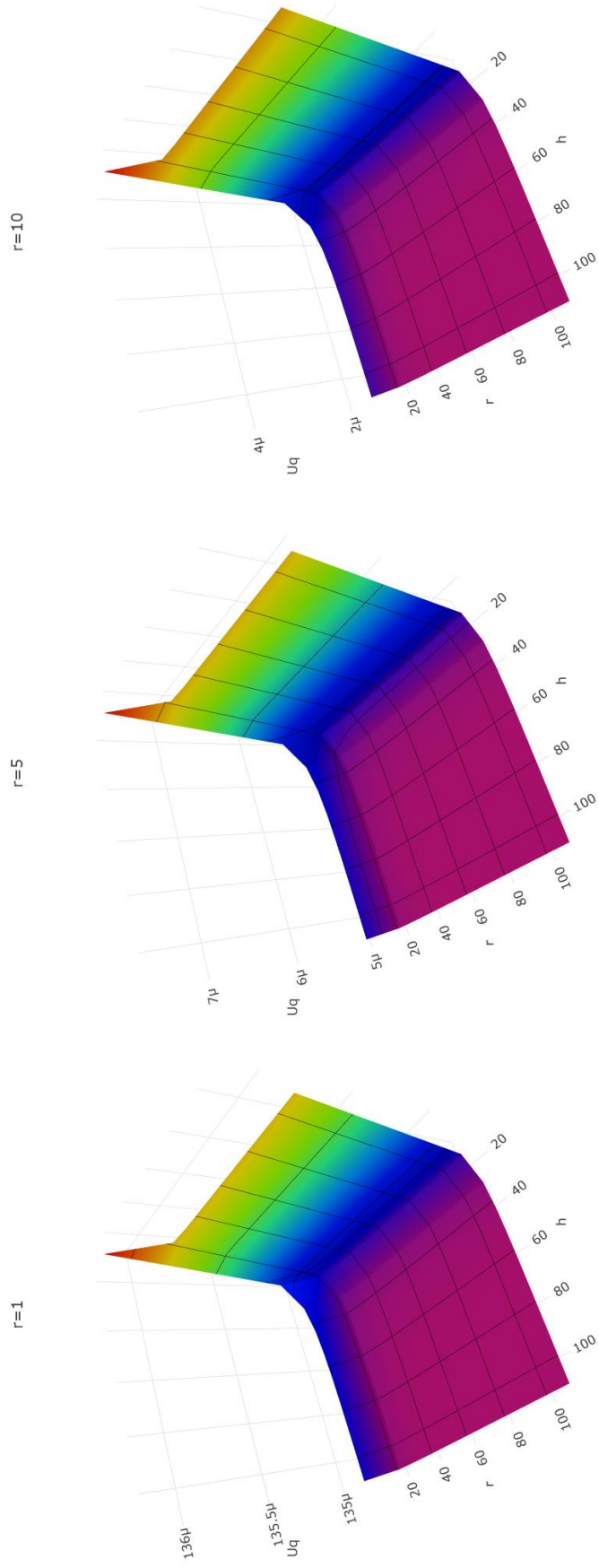


Рис. 3.4. Влияние удаления границ на значения радиальных перемещений  $u_q = u_q(r, h, z)$  для второй ( $q$ ) моды

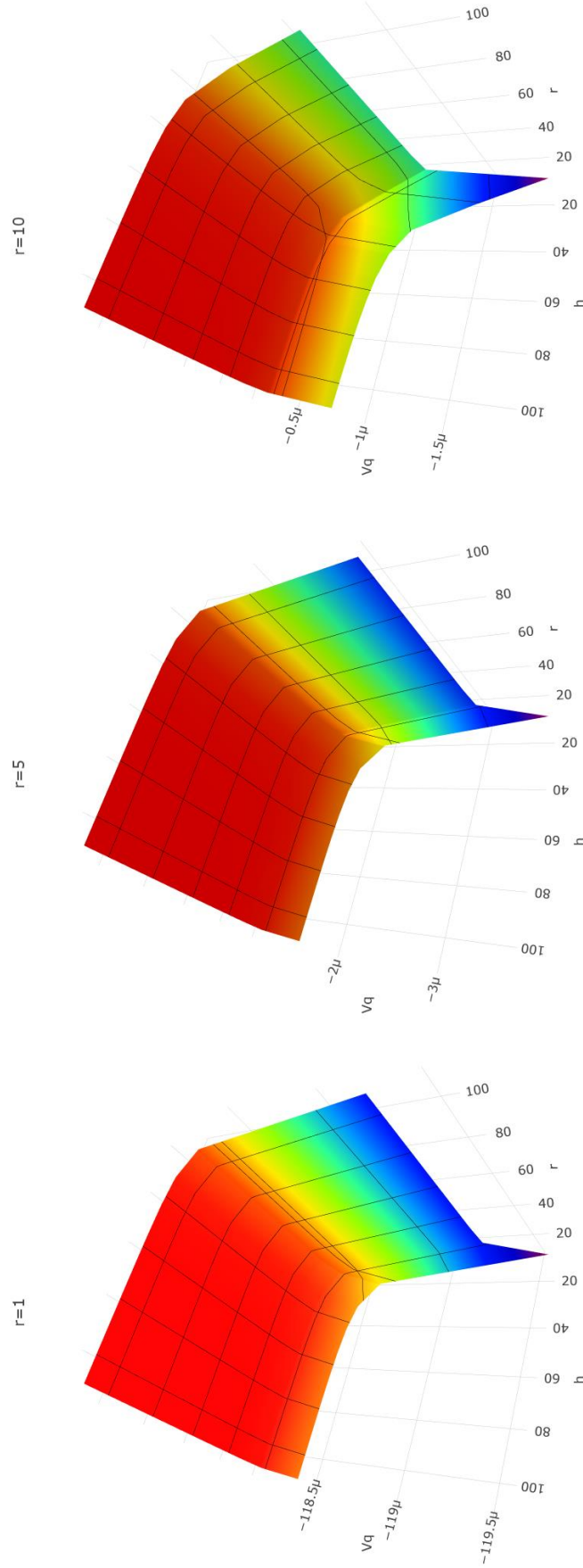


Рис. 3.5. Влияние удаления границ на значения тангенциальных перемещений  $v_q = v_q(r, h, z)$  для второй (q) моды

Как видно, из рисунков, величина всех компонент перемещений начинает стабилизироваться при удалении границ приблизительно на  $50r_0$ . В случае р-моды (полностью осесимметричная нагрузка) и радиальная и глубинная граница показывают одинаковый уровень влияния на величину перемещений. В случае q-моды (вторая гармоника нагрузки) удаление глубинной границы при малых значениях показывает заметно большее влияние на значения перемещений, чем удаление радиальной.

Для дальнейших расчётов выбраны удаления границ в  $75r_0$ . Относительная ошибка по величине перемещений для такой модели не превышает 2,5% по всем компонентам. Причём большие ошибки связаны с эффектом малой базы (см. таблицу 3.1).

Таблица 3.1. Величины ошибки в значениях перемещений при удалении границ на  $75r_0$

	$r = 1r_0$	$r = 5r_0$	$r = 10r_0$
$U_p$	$7 \cdot 10^{-4} \%$	$5 \cdot 10^{-2} \%$	$4 \cdot 10^{-1} \%$
$U_q$	$2 \cdot 10^{-3} \%$	$9 \cdot 10^{-2} \%$	$7 \cdot 10^{-1} \%$
$V_q$	$2 \cdot 10^{-3} \%$	$3 \cdot 10^{-1} \%$	2,3 %

Для проведения расчётов разработан алгоритм на языке APDL [165] (Приложение А), реализующий автоматизированное циклическое перестроение модели с отверстием заданной глубины, приложение нагрузок на заданный слой и последовательное решение осегармонической задачи для р- и q-моды. Блок-схема алгоритма приведена на рис. 3.6. Для решения задач применён проприетарный решатель PCG на основе метода сопряжённых градиентов с предобуславливателем.



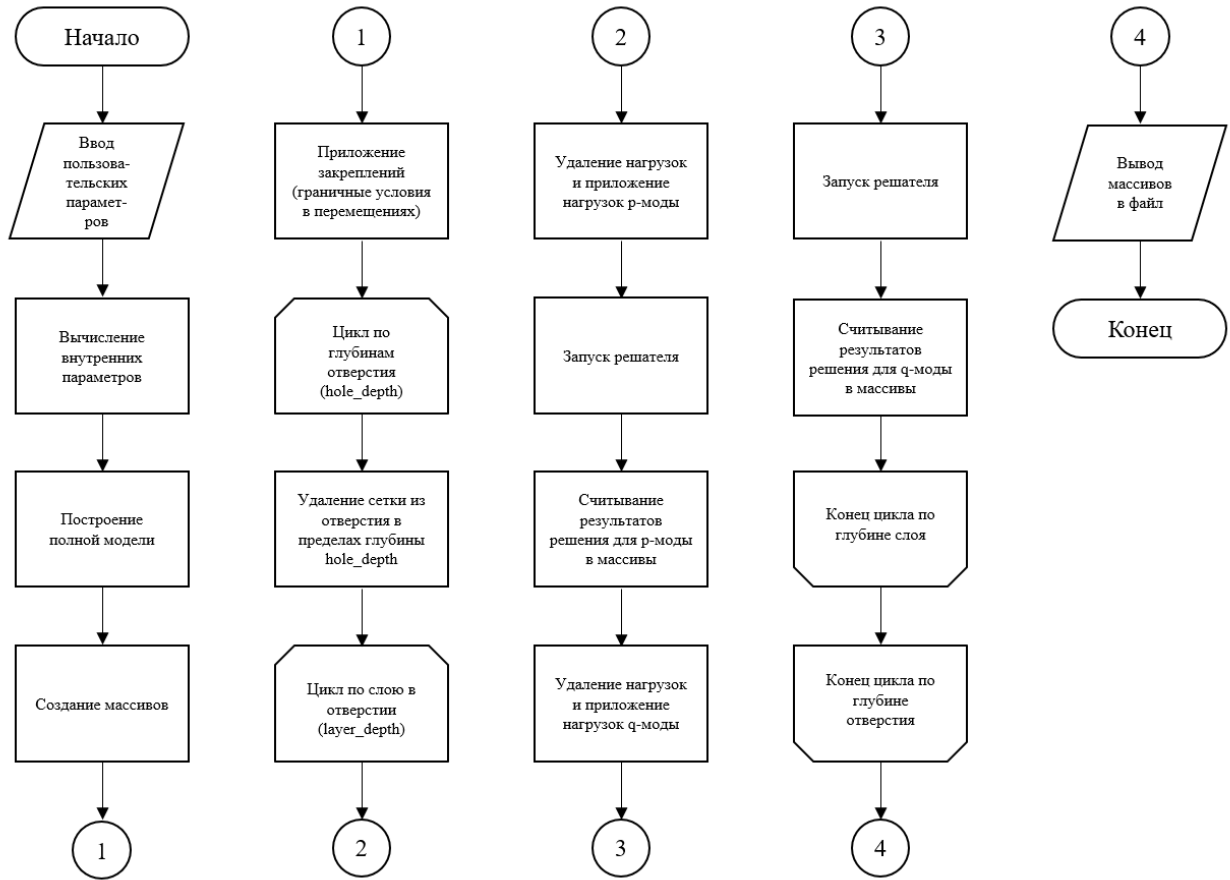


Рис. 3.6. Блок-схема расчётного алгоритма

Для расчёта значений функций  $u_p = u_p(r, h, z)$ ,  $u_q = u_q(r, h, z)$  и  $v_q = v_q(r, h, z)$  выбраны параметры, приведённые в таблице 3.2.

Таблица 3.2. Численные значения параметров модели

Параметр	Значение
Радиус отверстия	1
Радиус внешней границы модели	75
Радиус зоны получения результатов	10
Минимальная глубина отверстия	0,1
Максимальная глубина отверстия	8
Высота модели по границам	75
Шаг приращения глубины отверстия	0,1
Размер элемента модели	0,1
Прикладываемое давление	100
Модуль упругости	200000
Коэффициент Пуассона	0,3

Общее время выполнения алгоритма составило 766467 секунд (8,87 дня) при параметрах запуска, представленных в таблице 3.3.

Таблица 3.3. Технические параметры запуска алгоритма

Параметр	Значение
Число задействованных ядер процессора	12
Частота ядра процессора	3,00 ГГц
Тип распараллеливания	С распределённой памятью
Объём задействованной памяти	33033 МБ
Число отдельных задач	3240x2

Полученные в результате расчёта функции  $U_p=U_p(r, h)$ ,  $U_q=U_q(r, h)$  и  $V_q=V_q(r, h)$  визуализированы в виде поверхностей на рис. 3.7–3.9.

Функции  $u_p=u_p(r, h, z)$ ,  $u_q=u_q(r, h, z)$  и  $v_q=v_q(r, h, z)$  зависят от трёх параметров и не могут быть визуализированы в виде поверхностей. Срезы этих функций при нескольких фиксированных значениях глубины  $h$  представлены в виде поверхностей на рис. 3.10.

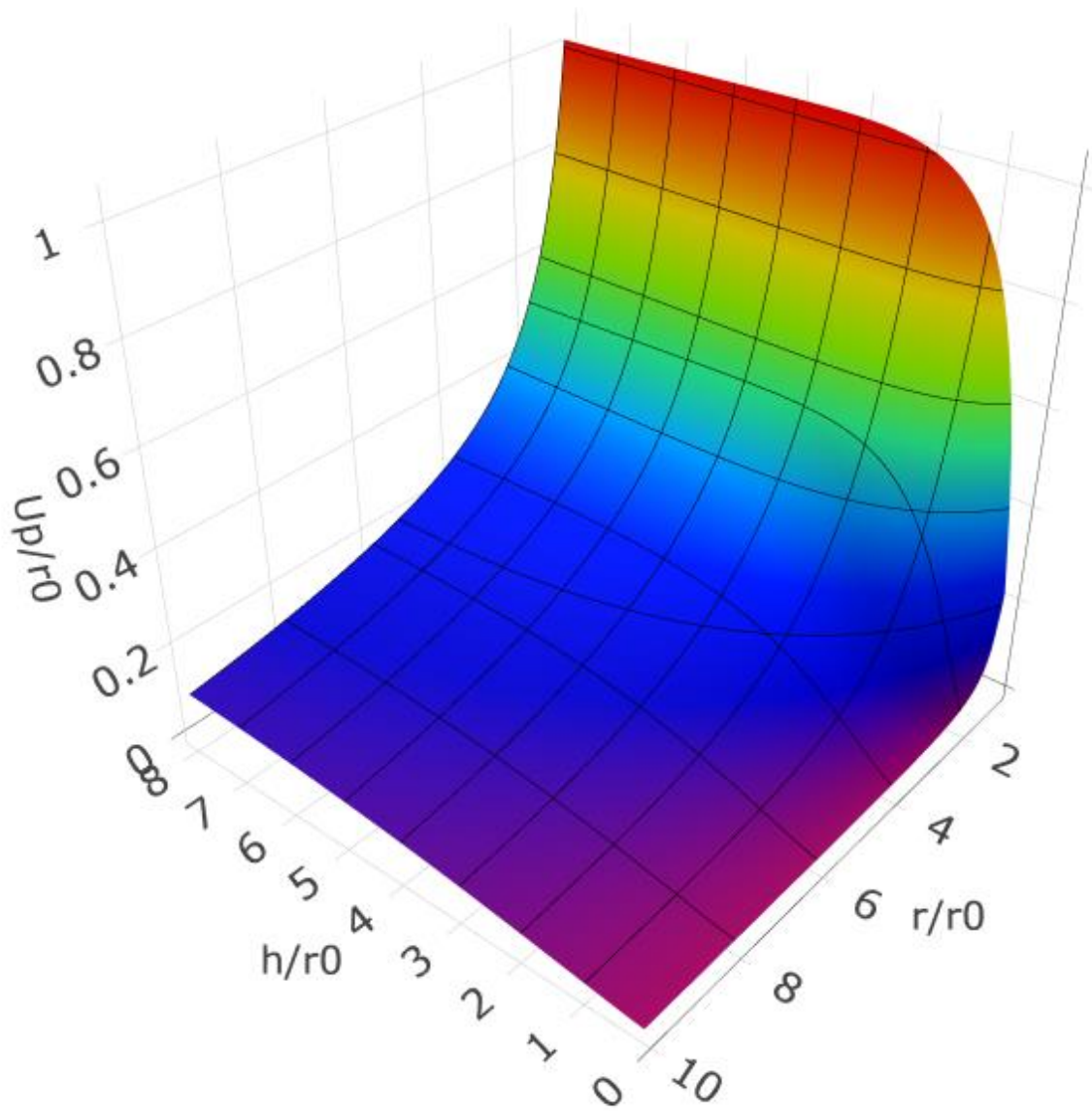


Рис. 3.7. Численные значения функции  $U_p = U_p(r, h)$

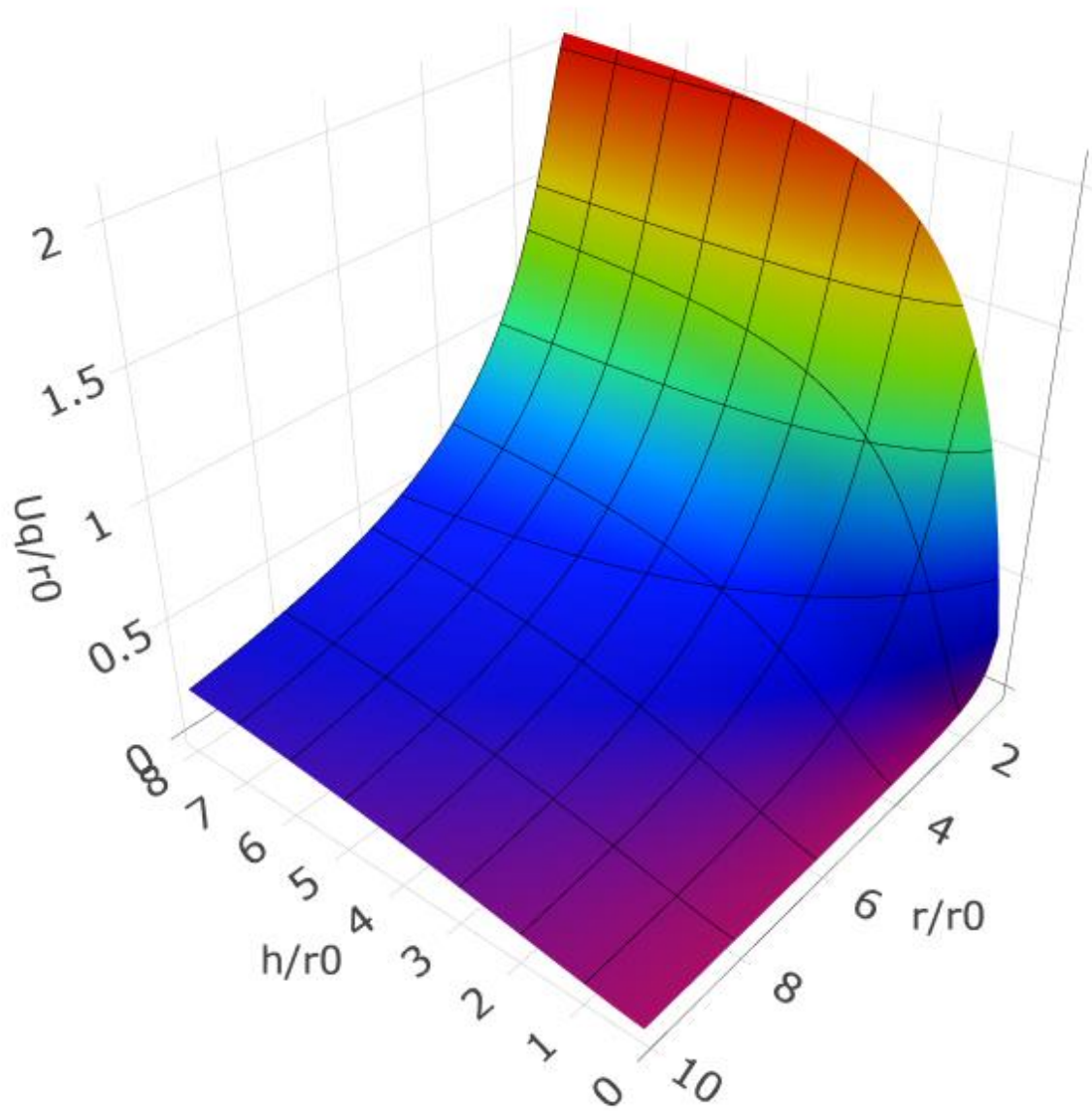


Рис. 3.8. Численные значения функции  $U_q = U_q(r, h)$

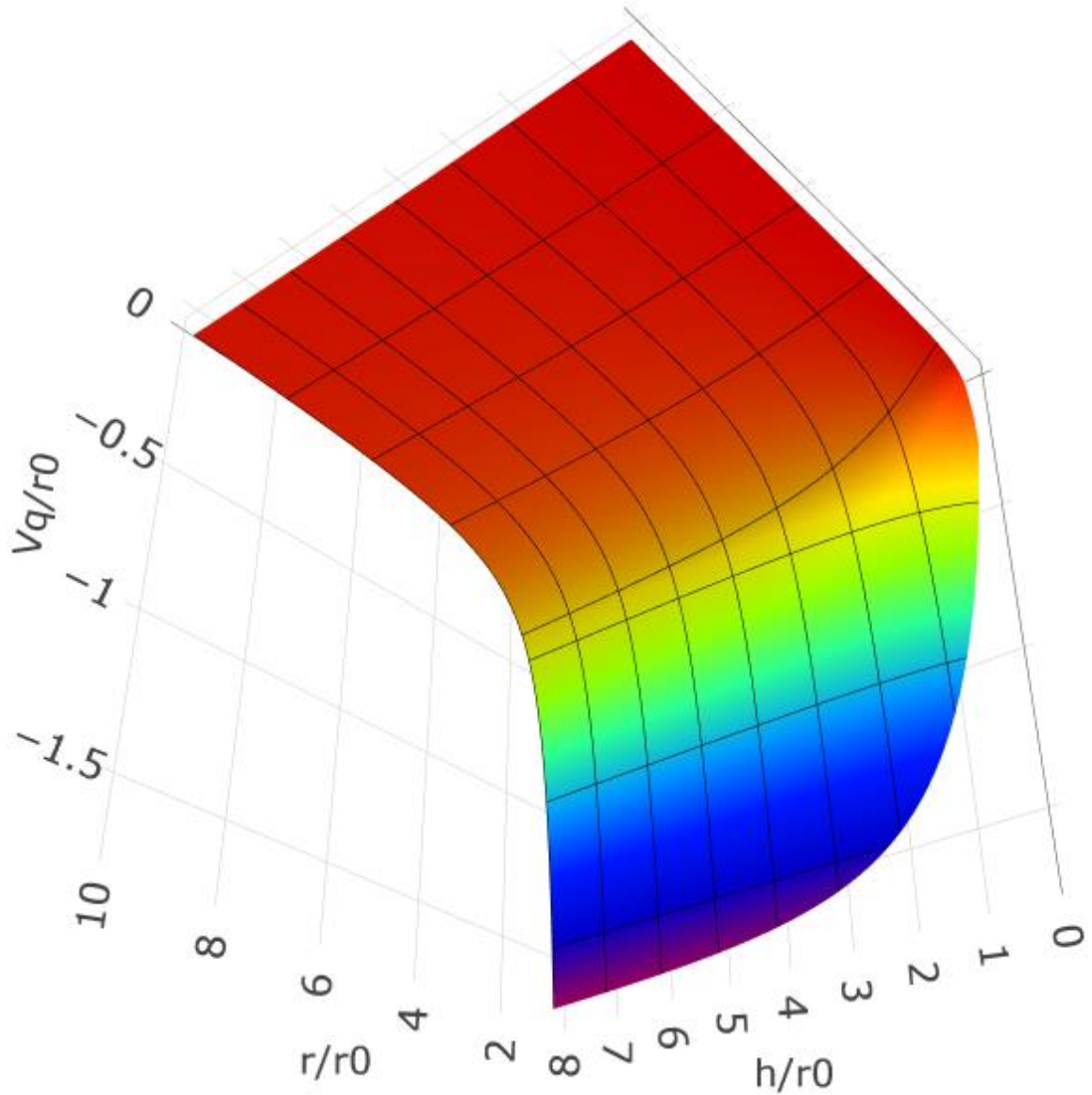


Рис. 3.9. Численные значения функции  $V_q = V_q(r, h)$

Вид этих поверхностей согласуется с имеющимися экспериментальными данными, свидетельствующими о том, что отклик на поверхности перестаёт нарастать при достижении глубиной отверстия  $h$  величин  $\sim 3r_0$  [162]. На рисунках 3.7–3.9 видно, что при достижении отверстием глубины  $h = 3r_0$  дальнейший рост всех компонент перемещений замедляется.

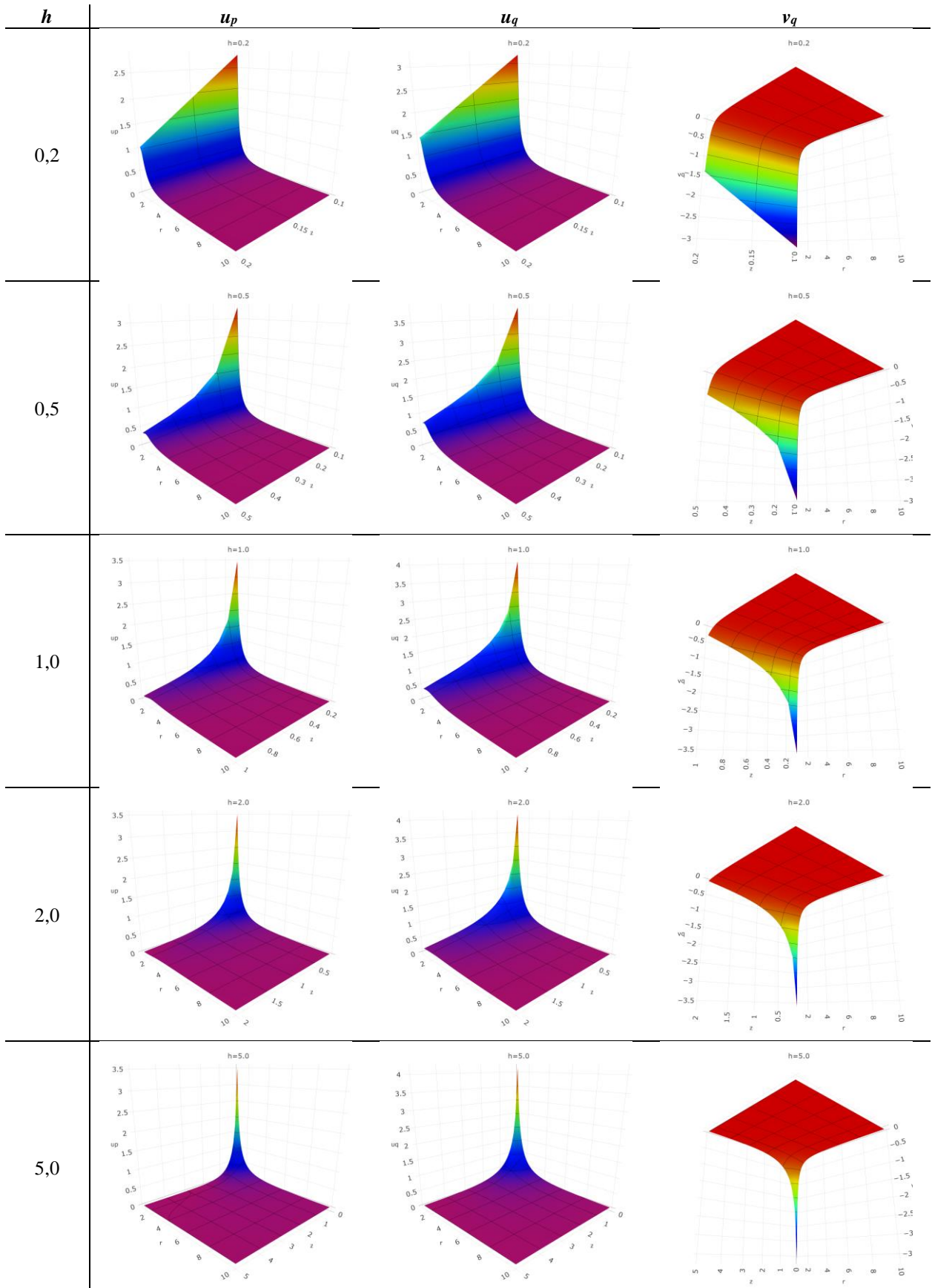


Рис. 3.10. Срезы функций  $u_p=u_p(r, h, z)$ ,  $u_q=u_q(r, h, z)$  и  $v_q=v_q(r, h, z)$

### 3.4 Определение неоднородного поля остаточных напряжений

На современном этапе развития эксперимента не представляется возможным непрерывная регистрация компонент вектора перемещений на поверхности тела в процессе наращивания отверстия, позволяющая определять  $\sigma_x = \sigma_x(z)$ ,  $\sigma_y = \sigma_y(z)$  и  $\tau_{xy} = \tau_{xy}(z)$  как непрерывные функции при решении системы (3.2). Однако возможно, аналогично подходу, применяемому в стандарте ASTM E837, определить эти величины в виде ступенчатых функций, положив величину напряжений постоянной в пределах каждого шага  $z_j$ ,  $j=1, \dots, J$  по глубине отверстия.

Пусть функции  $\sigma_x(z)$ ,  $\sigma_y(z)$  и  $\tau_{xy}(z)$  определены как:

$$\sigma_x(z) = \begin{cases} \sigma_x^1, 0 < z < z_1 \\ \sigma_x^2, z_1 < z < z_2 \\ \dots \\ \sigma_x^n, z_{J-1} < z < z_J \end{cases} ; \sigma_y(z) = \begin{cases} \sigma_y^1, 0 < z < z_1 \\ \sigma_y^2, z_1 < z < z_2 \\ \dots \\ \sigma_y^n, z_{J-1} < z < z_J \end{cases} ; \quad (3.13)$$

$$\tau_{xy}(z) = \begin{cases} \tau_{xy}^1, 0 < z < z_1 \\ \tau_{xy}^2, z_1 < z < z_2 \\ \dots \\ \tau_{xy}^n, z_{J-1} < z < z_J \end{cases}$$

Тогда выражения (3.2) можно переписать в виде сумм интегралов:

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_i(z_{J_0}) = u_0 + \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_x^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i, z_{J_0}, z) dz - \\
- \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_y^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_{J_0}, z) dz + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^{J_0} \tau_{xy}^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} T_1(r_i, \theta_i, z_{J_0}, z) dz \\
v_i(z_{J_0}) = v_0 + \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_x^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i, z_{J_0}, z) dz + \\
+ \sum_{j=1}^{J_0} \sigma_y^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_{J_0}, z) dz + \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{j=1}^{J_0} \tau_{xy}^j \int_{z_{j-1}}^{z_j} T_2(r_i, \theta_i, z_{J_0}, z) dz
\end{array} \right. , \quad (3.14)$$

$$i = 1, \dots, I, J_0 = 1, \dots, J$$

Процедура вычисления напряжений тогда сводится к определению методом наименьших квадратов решения системы вида:

$$\left\{ \begin{array}{l}
u_1^1 \\
v_1^1 \\
u_2^1 \\
\vdots \\
u_1^2 \\
\vdots \\
v_1^J
\end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccccccc}
c_1^1(z_1) & \bar{s}_1^1(z_1) & t_1^1(z_1) & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\
s_1^1(z_1) & \bar{c}_1^1(z_1) & \bar{t}_1^1(z_1) & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\
c_2^1(z_1) & \bar{s}_2^1(z_1) & t_2^1(z_1) & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
c_1^1(z_1) & \bar{s}_1^1(z_1) & t_1^1(z_1) & c_1^1(z_2) & \dots & 0 & 1 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s_1^J(z_1) & \bar{c}_1^J(z_1) & \bar{t}_1^J(z_1) & s_1^J(z_2) & \dots & \bar{t}_1^J(z_j) & 0 & 1
\end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l}
\sigma_x^1 \\
\sigma_y^1 \\
\tau_{xy}^1 \\
\sigma_x^2 \\
\sigma_y^2 \\
\vdots \\
\tau_{xy}^J \\
u_0 \\
v_0
\end{array} \right\} \quad (3.15)$$

Вектор свободных членов системы (3.15) содержит измеренные в эксперименте перемещения  $u_i, v_i, i=1, \dots, I$ , вектор неизвестных содержит компоненты напряжений  $\sigma_x^j, \sigma_y^j, \tau_{xy}^j$  на каждом слое отверстия  $z_j, j=1, \dots, J$  и перемещения тела как жёсткого целого  $u_0, v_0$ , а матрица коэффициентов формируется путём численного интегрирования функций  $C=C(r, \theta, h, z), S=S(r, \theta, h, z), T_1=T_1(r, \theta, h, z)$  и  $T_2=T_2(r, \theta, h, z)$  по правилам, обозначенным в системе (3.14):



$$\begin{aligned}
c_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} C(r_i, \theta_i, z_n, z) dz; \quad \bar{c}_i^n(z_j) = \int_{z_{j-1}}^{z_j} C\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_n, z\right) dz; \\
s_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} S(r_i, \theta_i, z_n, z) dz; \quad \bar{s}_i^n(z_j) = - \int_{z_{j-1}}^{z_j} S\left(r_i, \theta_i - \frac{\pi}{2}, z_n, z\right) dz; \\
t_i^n(z_j) &= \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\sqrt{2}}{2} T_1(r_i, \theta_i, z_n, z) dz; \quad \bar{t}_i^n(z_j) = \int_{z_{j-1}}^{z_j} \frac{\sqrt{2}}{2} T_2(r_i, \theta_i, z_n, z) dz \\
&\quad i = 1, \dots, I, j = 1, \dots, J
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Алгоритм определения неоднородных остаточных напряжений сводится к следующему:

1. Входными данными являются вектора измеренных в эксперименте перемещений  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , вектора координат  $\mathbf{r}_u, \boldsymbol{\theta}_u, \mathbf{r}_v, \boldsymbol{\theta}_v$  точек, в которых данные перемещения были измерены, модуль сдвига (вторая константа Ламе) материала  $\mu$ , вектора глубин отверстия  $h_u$  и  $h_v$ , при которых произведены измерения.
2. Формируются вектора  $\mathbf{r}, \mathbf{h}$  уникальных значений  $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v, \mathbf{h}_u$  и  $\mathbf{h}_v$ .
3. Производится сплайн-интерполяция вычисленных в п. 3.3 функций  $u_p = u_p(r, h, z)$ ,  $u_q = u_q(r, h, z)$  и  $v_q = v_q(r, h, z)$  для  $r \in \mathbf{r}, h \in \mathbf{h}, z \in \mathbf{h}$ .
4. Вектора  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ , объединяются в вектор неизвестных  $\mathbf{U}$ . Матрица коэффициентов уравнения (3.15)  $\mathbf{C}$  инициализируется нулями.
5. По формулам (3.16) с использованием (3.10), (3.11) и интерполированных на шаге 3 значений функций  $u_p, u_q$  и  $v_q$  производится вычисление и построчное заполнение ненулевых членов матрицы  $\mathbf{C}$ .
6. Сформированная система обращается методом наименьших квадратов. Результат обращения записывается в вектор неизвестных  $\mathbf{S}$ .
7. Вектор неизвестных  $\mathbf{S}$  раскладывается на вектора напряжений  $s_x, s_y, s_{xy}$  и вектор смещений  $\mathbf{U}_0$ . Полученные вектора являются результатом применения алгоритма.

### 3.5 Анализ результатов тестирования метода

Работоспособность методики может быть проверена в численном эксперименте. Рассмотрим брусок (рис. 3.11) из идеально упругопластического материала нагруженный упругопластическим чистым изгибом.

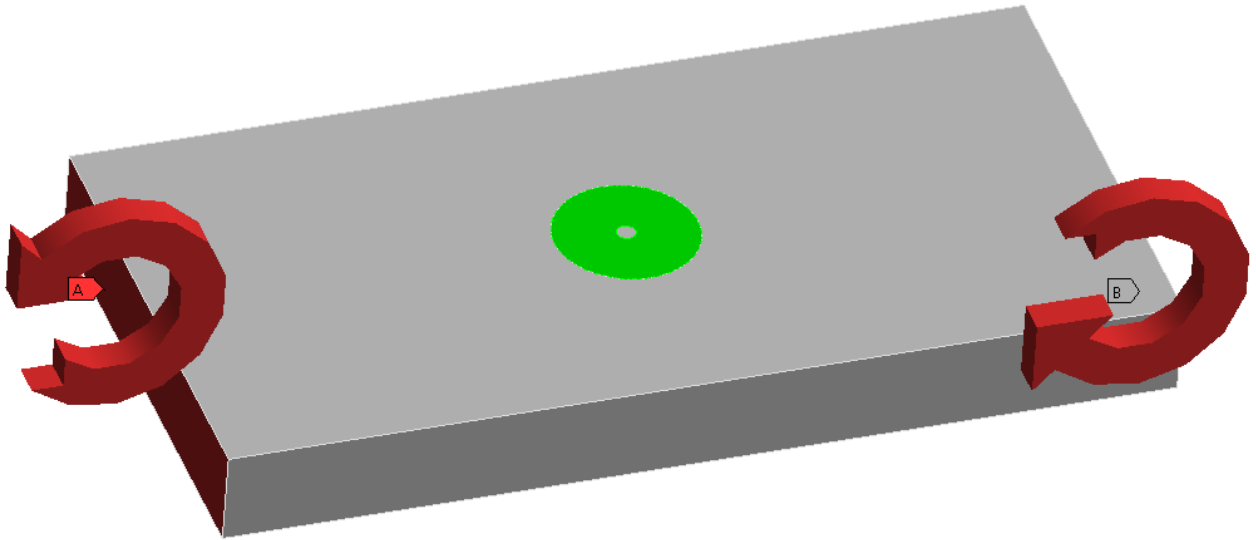


Рис. 3.11. Схема нагружения бруска

Брусок имеет размеры  $100 \text{ мм} \times 50 \text{ мм} \times 10 \text{ мм}$  и сделан из материала, свойства которого приведены в таблице 3.4:

Таблица 3.4. Механические характеристики материала бруска

Параметр	Значение
Модуль упругости	200 ГПа
Коэффициент Пуассона	0,3
Предел текучести	250 МПа
Секущий модуль	0 МПа

Брусок нагружается поворотом торцов в противоположных направлениях на угол:

$$\alpha = \frac{1,5\sigma_T l}{Eh} \quad (3.17)$$

где  $\sigma_T$  – предел текучести материала,  $E$  – модуль упругости,  $l$  – длина бруска,  $h$  – высота его сечения. Такой угол поворота торцов обеспечивает гарантированное упругопластическое нагружение бруска, но до образования пластического шарнира. Зона пластичности распространяется на глубину 1,6 мм от поверхности бруска. Распределение компонент напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  под нагрузкой по высоте сечения  $h$  приведено на рис. 3.12.

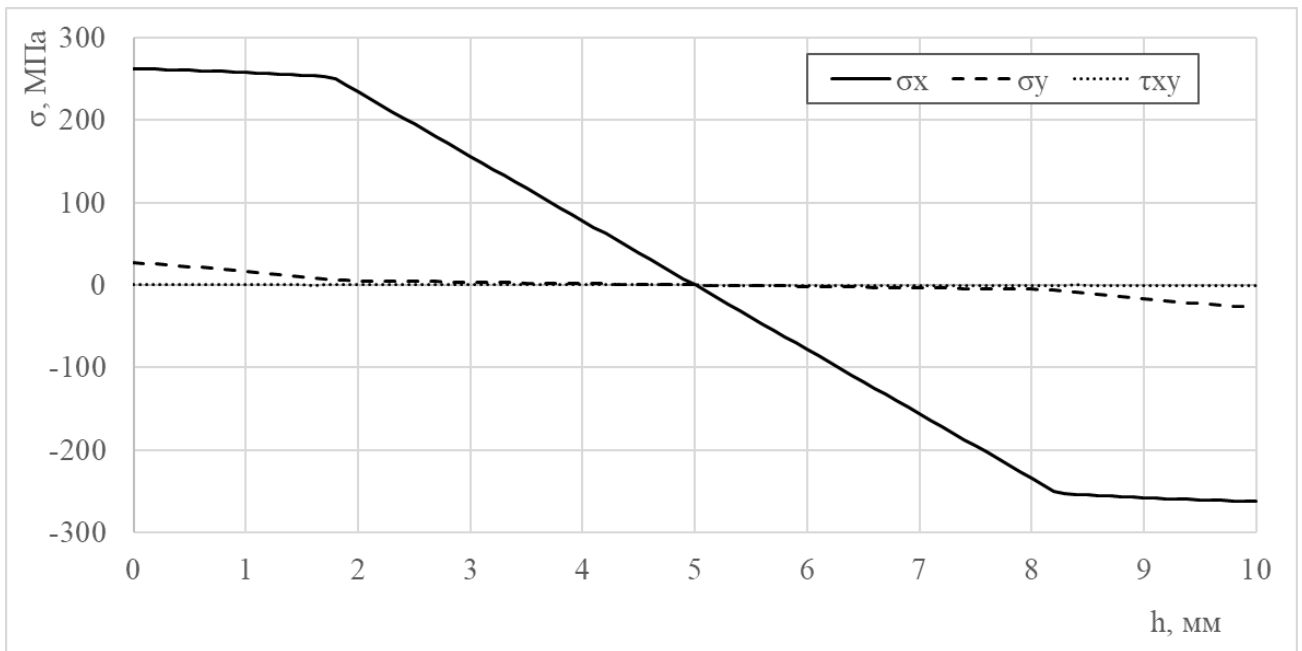


Рис. 3.12. Распределение компонент напряжений под нагрузкой

После нагружения до угла поворота  $\alpha$ , определяемого по выражению (3.17), производится частичная разгрузка обратным поворотом сечения до  $\alpha = 0^\circ$ , чему соответствует распределение компонент напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  приведённое на рис. 3.13.

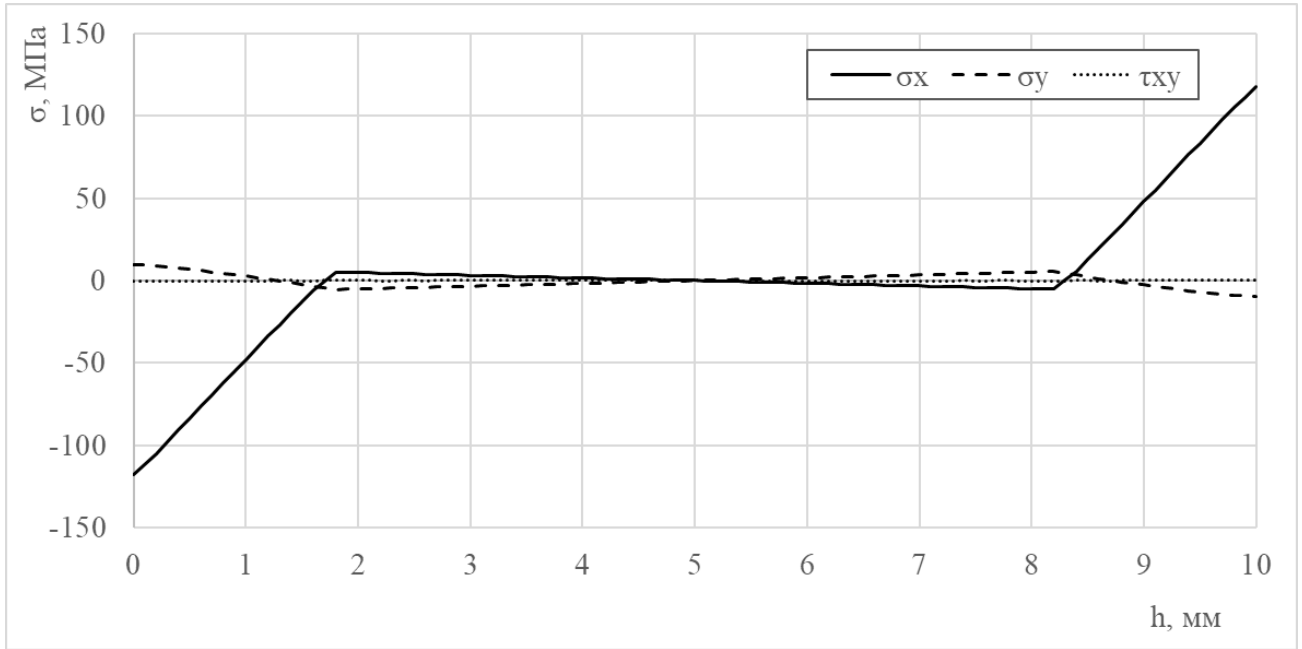


Рис. 3.13. Распределение компонент напряжений после разгрузки

После разгрузки производится поэтапное формирование отверстия послойным обнулением жёсткости элементов, составляющих отверстие, вплоть до образования сквозного отверстия. Отверстие радиусом  $1\text{ мм}$  формируется шагами по глубине  $0,2\text{ мм}$ . На каждом шаге углубления отверстия производится вывод в файл узловых перемещений  $u_i, v_i, i=1, \dots, I$  в зоне радиусом  $7,5\text{ мм}$ . На рис. 3.11 соответствующая зона выделена зелёным цветом. Всего в указанной области находилось 1033 узла сетки, для каждого из которых выведены две компоненты перемещений в плоскости.

После вывода всех компонент вектора перемещений в файлы производилось вычисление приращений этих компонент на каждой глубине отверстия  $z_j, j=1, \dots, J$  относительно разгруженного состояния без отверстия. Таким образом, вычисленные приращения имитируют измеренные в эксперименте величины компонент перемещений, возникающие на поверхности образца при высверливании отверстия на заданную глубину. Необходимо отметить, что разработанная задача не соответствует заложенным в исходных предпосылках метода представлениям об измеряемом теле, как об упругом

полупространстве, что необходимо для оценки метода в максимально возможно приближенных к эксперименту условиях.

Рассчитанные узловые перемещения и координаты узлов подавались на вход специально разработанному алгоритму расчёта коэффициентов по формулам (3.16) на языке программирования Python, интерполируя функции  $u_p$ ,  $u_q$  и  $v_q$  (рис. 3.10) и формируя систему вида (3.15) (Приложение Б).

Сформированная система решалась методом наименьших квадратов. Полученные в результате решения ступенчатые функции напряжений вида (3.13) приведены на рис. 3.14 столбчатыми диаграммами в сравнении с истинными значениями соответствующих компонент напряжений показанными непрерывными графиками.

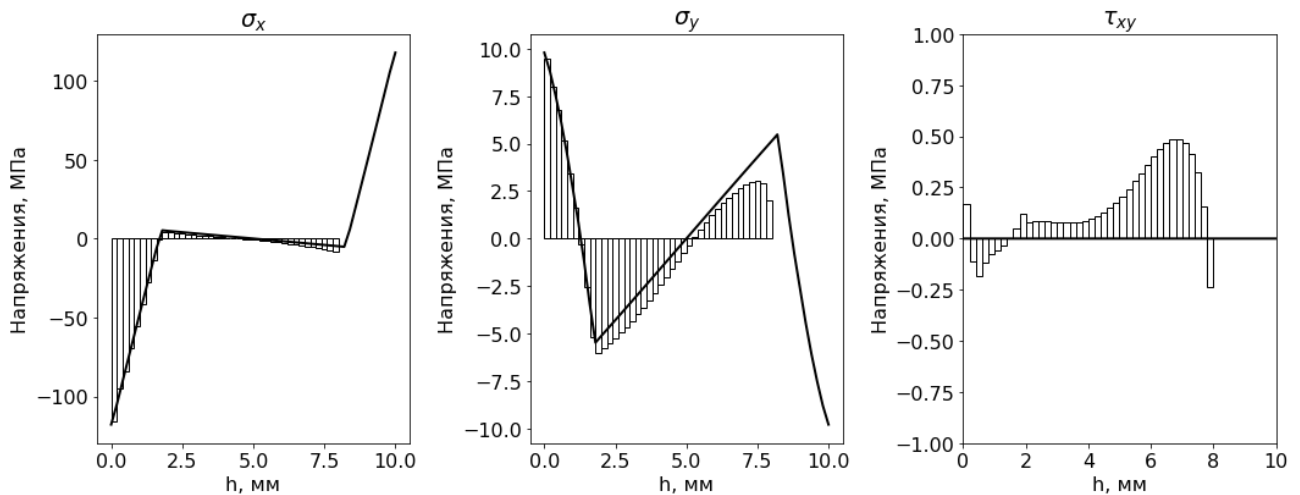


Рис. 3.14. Результаты восстановления компонент напряжений

Как видно из сравнения восстановленных значений компонент напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  с истинными, наибольшая по значению компонента  $\sigma_x$  восстанавливается достаточно точно вплоть до глубины 5 мм или  $5r_0$ . Такой диапазон заведомо превышает диапазон чувствительности современных методов измерения перемещений. Компонента  $\sigma_y$  точно восстанавливается до глубины 2 мм или  $2r_0$ , однако следует отметить, что заметная ошибка на более высоких глубинах связана с эффектом малой базы этой компоненты (максимальные значения  $\sigma_y$

составляют менее 10% от значений  $\sigma_x$ ). Тот же эффект наблюдается и для компоненты  $\tau_{xy}$ . На всём диапазоне глубин наблюдается ошибка величиной до 0,5 МПа.

При анализе точности результатов имеет смысл ограничиться практически достижимой максимальной глубиной  $4r_0$ . В пределах этой глубины ошибка определения ненулевых компонент не превышает 1 МПа, ошибка определения касательных напряжений составляет менее 0,25 МПа.

### 3.6 Обоснование требований к точности и объёму измерений

Для определения возможности применения метода на практике требуется установить требуемую точность определения перемещений и необходимое количество точек, в которых проводятся измерения.

В качестве входных данных для восстановления компонент тензора напряжений используется массив данных измерения компонент вектора перемещений  $u_i^j, v_i^j, i=1, \dots, I, j=1, \dots, J$ , определённые в точках поверхности тела  $r_i, \theta_i$  на каждом шаге по глубине  $j$ . Для определения требований к точности этих измерений, к значениям  $u_i^j, v_i^j$  в рассматриваемом методе добавляется массив численного шума  $\Delta u_i^j, \Delta v_i^j$ . Значения  $\Delta u_i^j, \Delta v_i^j$ , представляют собой случайные величины, сгенерированные по нормальному распределению с нулевым средним  $M=0$  и варьируемым стандартным отклонением  $s$ . В качестве основного параметра, характеризующего точность в рассматриваемом методе, принимается стандартное отклонение разности интенсивности напряжений  $\Delta\sigma_u$  на каждом шаге по глубине отверстия  $j$ , рассчитанное по нескольким реализациям добавленного численного шума. В каждой реализации шума величина  $\Delta\sigma_u$  определяется как разность между интенсивностью истинных и определённых в результате процедуры восстановления напряжений.

Для оценки чувствительности метода к ошибкам измерения и объёму входной информации проводится численный эксперимент, постановка которого аналогична п. 3.5, но размеры бруска составляют  $100 \text{ мм} \times 50 \text{ мм} \times 20 \text{ мм}$ , предел текучести материала составляет 500 МПа, а разгрузка производится до нулевого изгибающего момента. Для такого тела характерные уровни интенсивности остаточных напряжений составляют порядка 100 МПа в приповерхностных слоях, а соответствующие её упругим характеристикам величины перемещений порядка единиц и десятков микрометров в области измерений.

Полученные в расчёте значения перемещений подвергаются дополнительной обработке: внесению шума (п. 3.6.2), фильтрации по различным параметрам (п.3.6.3) и семплированию различного объёма данных (п. 3.6.4).

Характерными для оптических методов измерения перемещений величинами стандартного отклонения  $s$  является величина, в среднем равная  $0,01 \text{ мкм}$ . В данной работе рассматриваются четыре уровня величины  $s$ :  $0,001 \text{ мкм}$ ,  $0,005 \text{ мкм}$ ,  $0,01 \text{ мкм}$  и  $0,05 \text{ мкм}$ . В качестве нижнего порога чувствительности при регистрации перемещений принимается величина  $0,13 \text{ мкм}$ . Радиус зоны деструкции принимается равным  $0,3r_0$ . В качестве порога чувствительности по глубине принимается величина  $h_{max}=5r_0$ . Приемлемым уровнем  $\Delta\sigma_u$  принимается значение  $\Delta\sigma_u^*=10 \text{ МПа}$ .

### 3.6.1 Эталонное решение

В качестве эталонного решения (рис. 3.15) выступают значения компонент тензора напряжений, полученные на полном массиве, состоящим из 1033 точек с нулевым уровнем шума ( $s=0$ ).

На рис. 3.15, *a*) представлены результаты восстановления компонент тензора напряжений в области определения базовых функций, на рис. 3.15 *b*) – до порога чувствительности. На рис. 3.15 *c*) изображена кривая зависимости

$\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$ . Результаты восстановления напряжений приводятся для одной произвольной реализации вносимого шума, а стандартное отклонение  $\Delta\sigma_u$  рассчитывается по 250 реализациям шума. Для эталонного решения заданный уровень отклонения от фактических напряжений не достигается в пределах пороговой глубины.



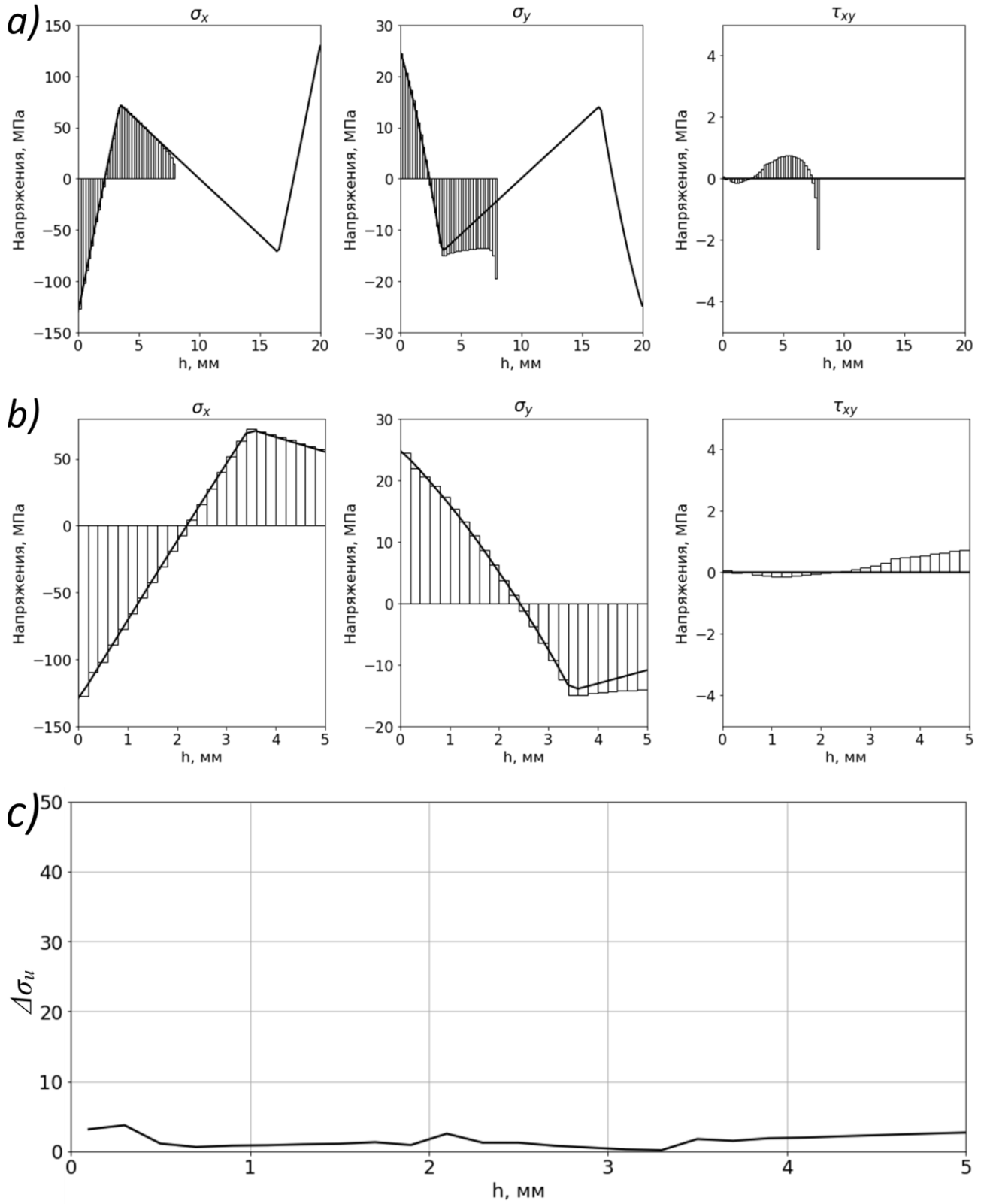


Рис. 3.15. Эталонное решение. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

### 3.6.2 Влияние шума

Для оценки влияния погрешности измерения перемещений рассматриваются четыре уровня величины  $s$ :  $0,001$  мкм,  $0,005$  мкм,  $0,01$  мкм и  $0,05$  мкм.

На рис. 3.16–3.19 приведены соответствующие результаты тестов. Из рисунков видно, что  $\Delta\sigma_u^*$  при величине  $s=0,001$  мкм не достигается, при  $s=0,005$  мкм достигается на глубине  $h_{lim}=3r_0$ , при  $s=0,01$  мкм – на глубине  $h_{lim}=1,8r_0$ , а при  $s=0,05$  мкм – уже на глубине  $h_{lim}=0,5r_0$ .

В таблице 3.5 приведены сводные данные по величине  $\Delta\sigma_u$  от уровня  $s$  на различных глубинах отверстия.

Таблица 3.5. Зависимость  $\Delta\sigma_u$  от  $h/r_0$  для различных  $s$

$s$	$h/r_0$				
	0,5	1	1,5	2	2,5
0,0001 мкм	1,1 МПа	0,9 МПа	1,2 МПа	2,1 МПа	1,7 МПа
0,0005 мкм	1,5 МПа	1,8 МПа	3,2 МПа	6,3 МПа	8,1 МПа
0,001 мкм	2,1 МПа	3,3 МПа	5,5 МПа	13,9 МПа	19,1 МПа
0,005 мкм	9,1 МПа	17,9 МПа	43,6 МПа	90,6 МПа	121,1 МПа

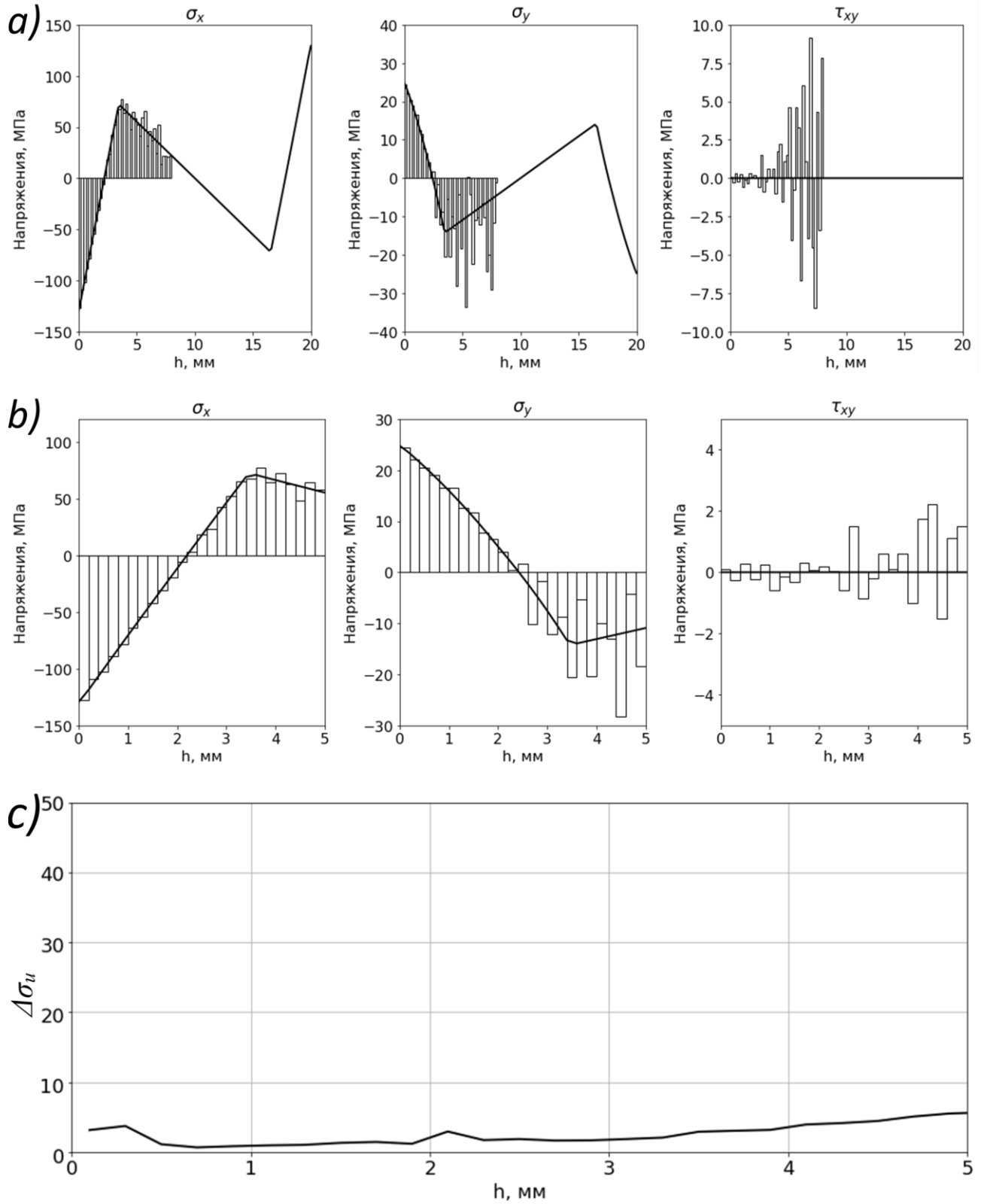


Рис. 3.16.  $s=0,001$  мкм. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

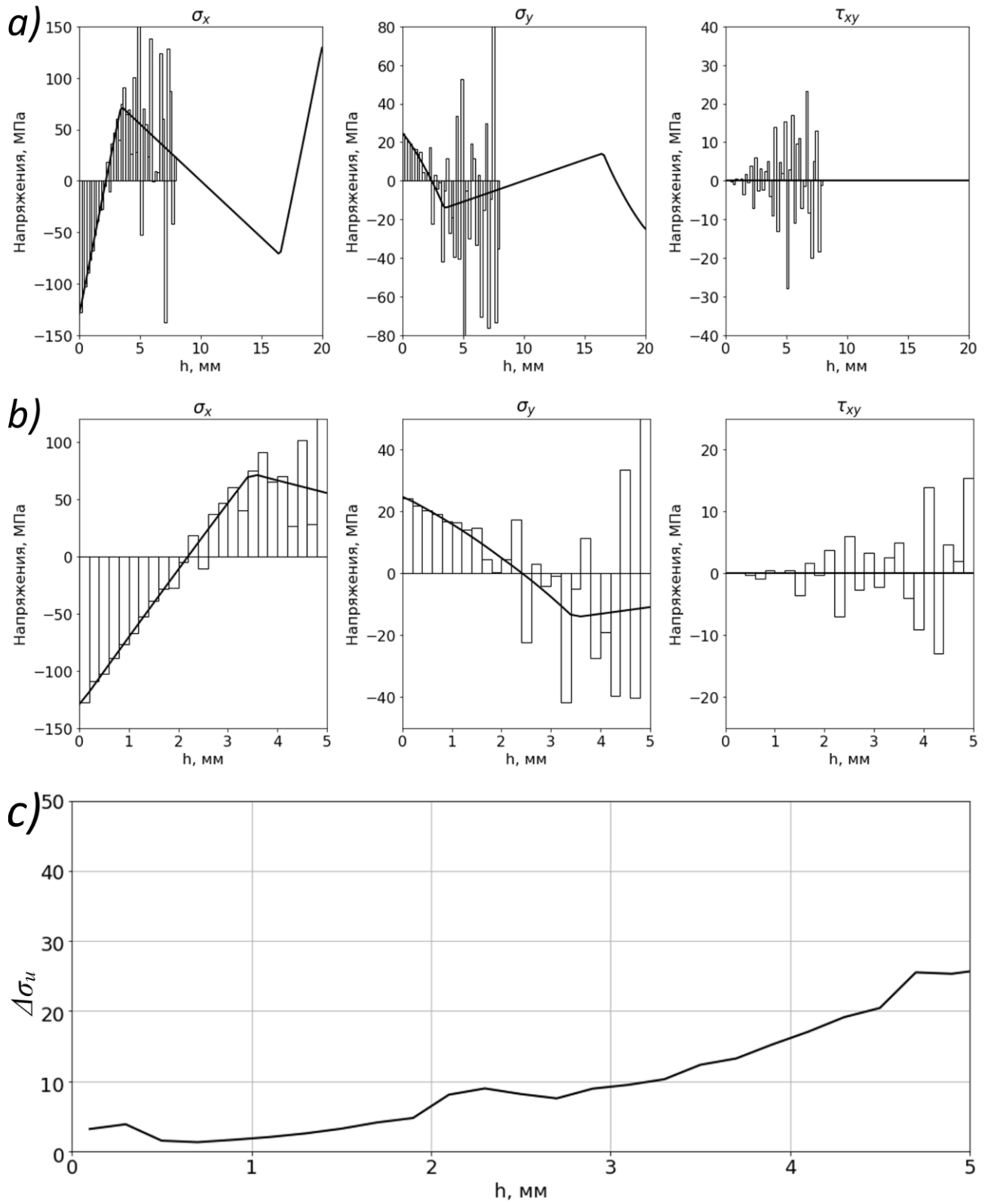


Рис. 3.17.  $s=0,005$  мкм. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

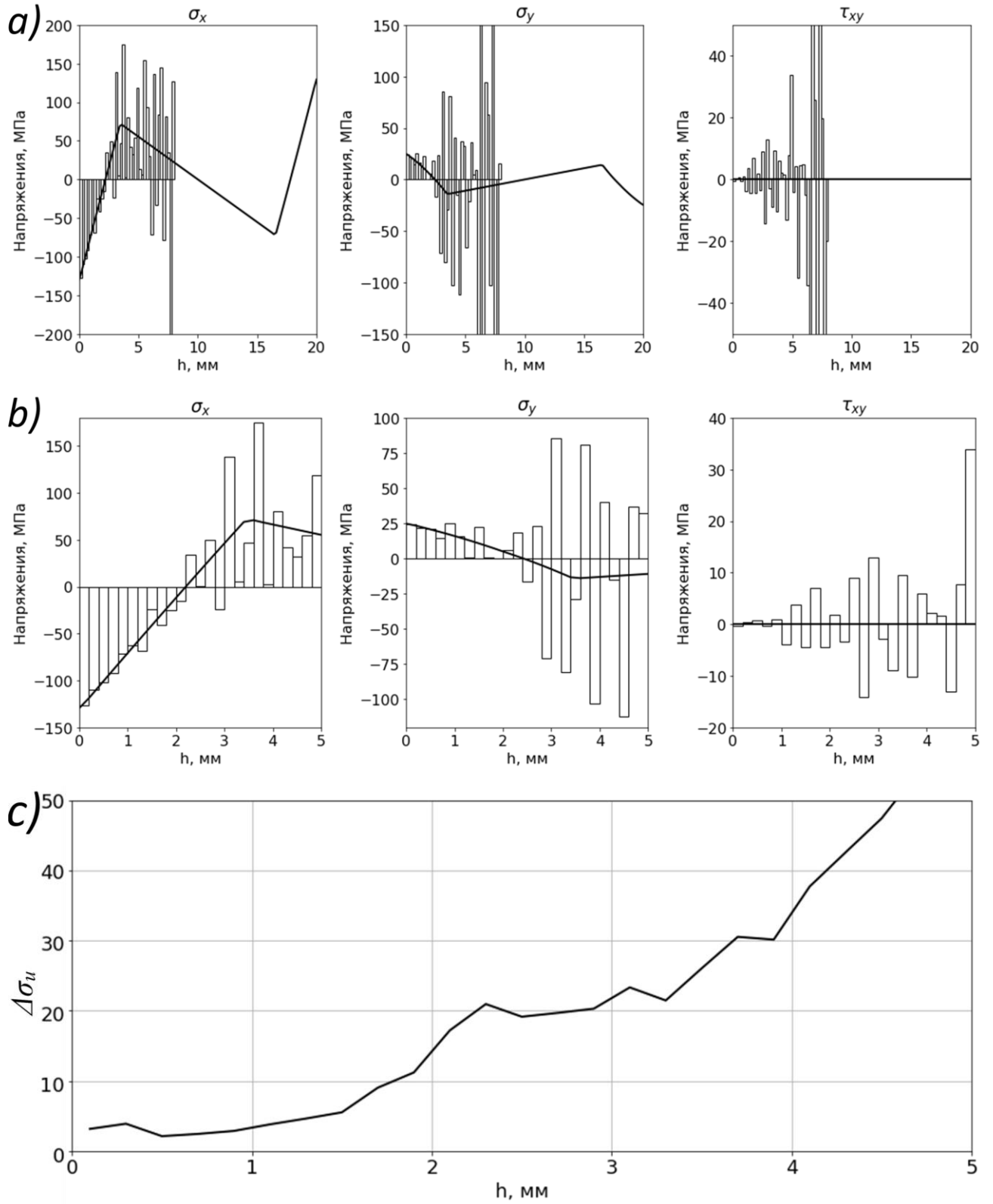


Рис. 3.18.  $s=0,01$  мкм. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

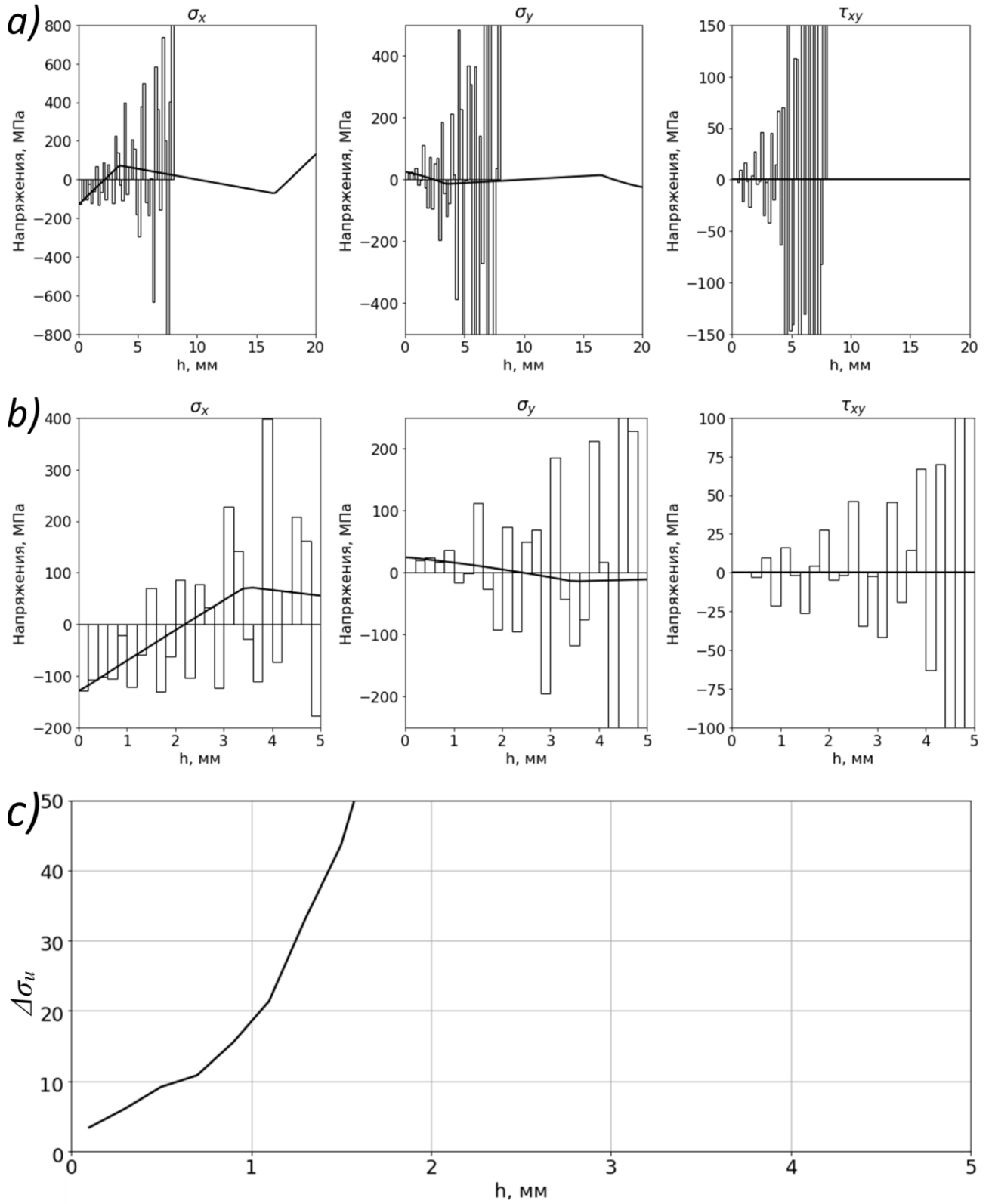


Рис. 3.19.  $s=0,05$  мкм. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

### 3.6.3 Влияние фильтрации

При проведении практических измерений источником фильтрации данных выступают два параметра: нижний порог чувствительности ( $0,13$  мкм), и размер области деструкции вокруг отверстия ( $0,3r_0$ ).

При фильтрации данных по порогу чувствительности из 41320 исходных измерений каждой компоненты (1033 узла сетки  $\times$  40 шагов по глубине, в каждом узле на каждом шаге определяются обе компоненты) остаются только 15758 результатов измерений компоненты  $u$  и 7059 измерений компоненты  $v$ . В сумме обе компоненты дают 27,6% от объёма исходных измерений. При фильтрации по радиусу расположения точек измерений остаётся 34000 измерений каждой компоненты (82,3% исходного объёма). При фильтрации по обоим условиям сразу остаются 9924 измерений компоненты  $u$  и 3693 измерений компоненты  $v$ , или суммарно 16,5% измерений.

В тестах с применением фильтрации данных величина стандартного отклонения  $s=0,01$  мкм, что соответствует типичному отклонению при оптических измерениях.

На рис. 3.20–3.22 приведены результаты тестов влияния фильтрации на точность определения напряжений.

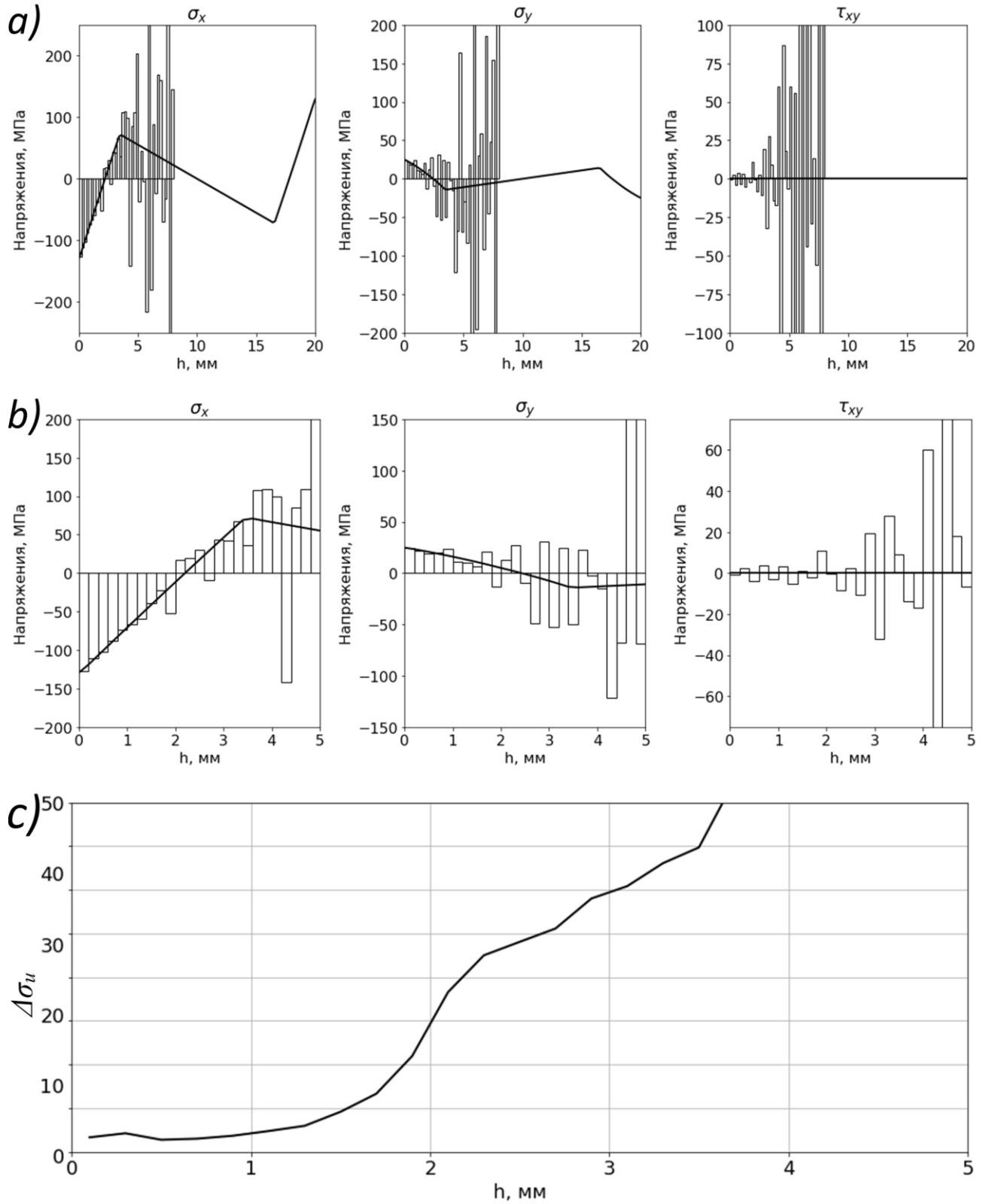


Рис. 3.20. Фильтрация по порогу чувствительности. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$



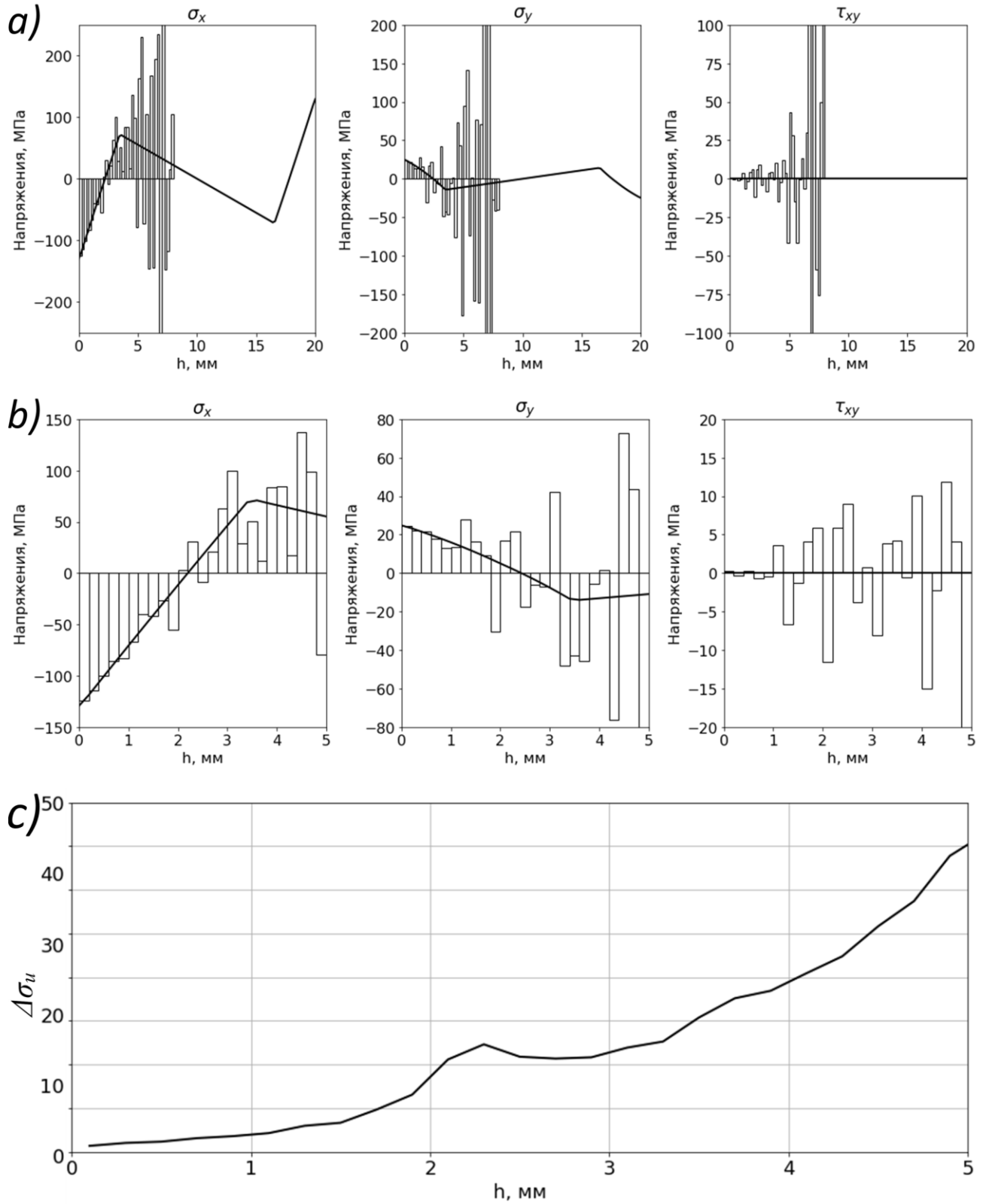


Рис. 3.21. Фильтрация по радиусу расположения точек. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

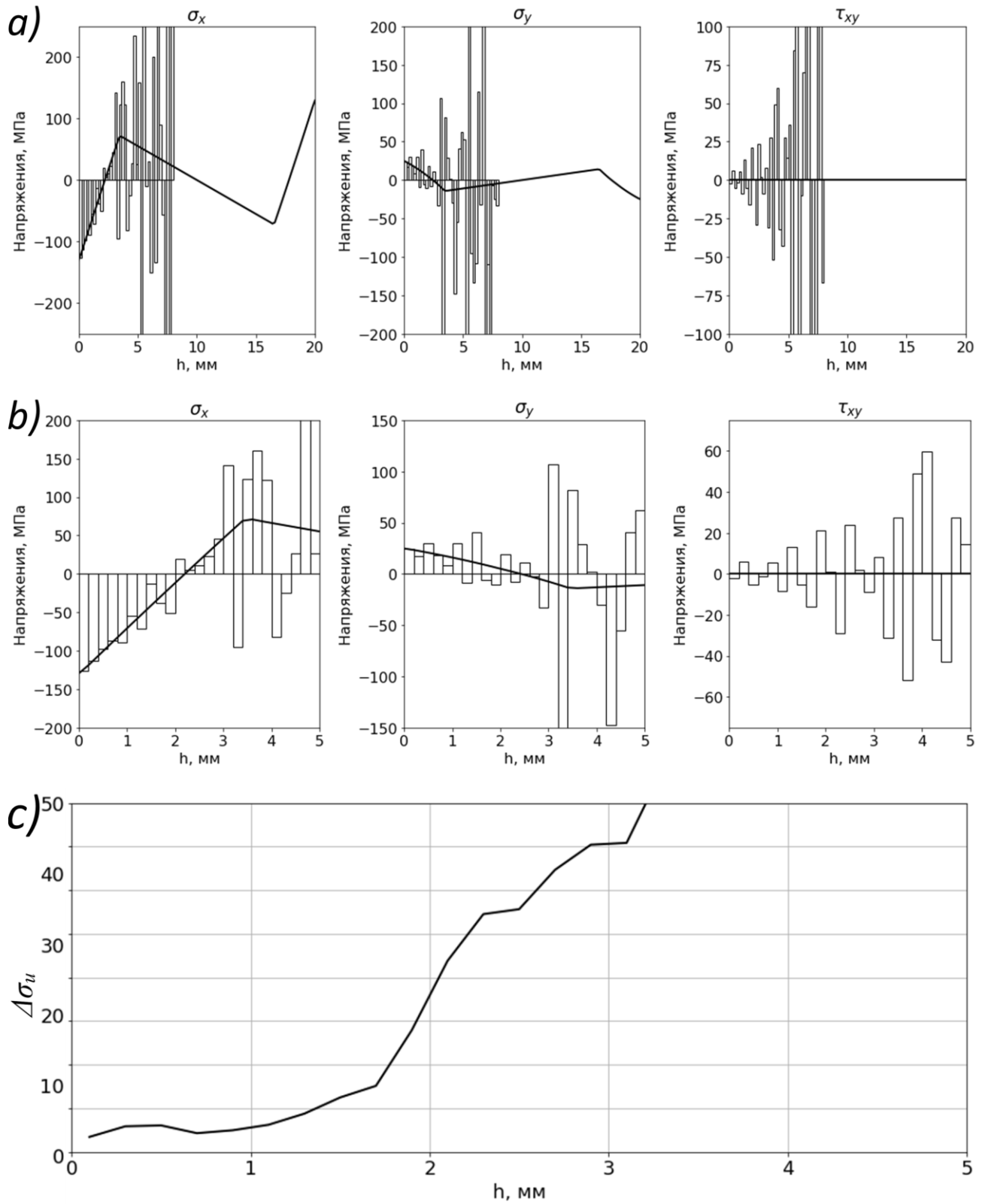


Рис. 3.22. Фильтрация по порогу чувствительности и радиусу расположения точек. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

Из рисунков можно сделать вывод, что снижение числа измерений играет решающую роль в изменении точности. Так, при фильтрации по радиусу расположения точек (рис. 3.21) изменение точности относительно тестов без фильтрации (рис. 3.18) относительно мало, несмотря на то, что исключаются точки с наибольшими по абсолютному значению величинами перемещений. Так, отклонение  $\Delta\sigma_u^*$  достигается на глубине  $h_{lim}=1,7r_0$  против  $h_{lim}=1,8r_0$  в тесте без фильтрации. В то же время исключение большого числа точек с малыми абсолютными значениями перемещений приводит к заметному снижению точности. Несмотря на то, что глубина, на которой отклонение достигает  $\Delta\sigma_u^*$ , снижается незначительно (до  $h_{lim}=1,5r_0$  при фильтрации только по порогу чувствительности и до  $h_{lim}=1,3r_0$  при фильтрации по обоим параметрам), после глубины  $h=1,5r_0$  отверстия наблюдается резкий рост стандартного отклонения интенсивности напряжений.

В таблице 3.6 приведены сводные данные по величине стандартного отклонения определяемой интенсивности напряжений от типа используемой фильтрации.

Таблица 3.6. Зависимость  $\Delta\sigma_u$  от  $h/r_0$  при различных типах фильтрации

Тип фильтрации	$h/r_0$				
	0,5	1	1,5	2	2,5
Нет	2,1 МПа	3,3 МПа	5,5 МПа	13,9 МПа	19,1 МПа
$u, v > 0,13$ мкм	2,8 МПа	5,4 МПа	9,2 МПа	29,3 МПа	48,1 МПа
$r > 1,3$ мм	2,4 МПа	4,0 МПа	6,7 МПа	17,4 МПа	21,8 МПа
$u, v > 0,13$ мкм, $r > 1,3$ мм	6,1 МПа	5,6 МПа	12,5 МПа	35,9 МПа	55,7 МПа

### 3.6.4 Снижение числа измерений

При проведении оценки чувствительности к снижению числа измерений в качестве исходной используется полученная после фильтрации по обоим параметрам выборка из 13617 измерений (9924 для компоненты  $u$  и 3693 для компоненты  $v$ ). Данная выборка соответствует приблизительно 340 измерениям

обоих компонент на один шаг приращения отверстия по глубине. Для проведения тестирования исходная выборка уменьшается случайным образом до 75%, 50% и 25% от исходного объёма данных. Причём, обе компоненты уменьшаются пропорционально своему исходному объёму. Количественные характеристики выборок, применяющихся для тестов, приведены в таблице 3.7.

Таблица 3.7. Количественные характеристики уменьшенных выборок

Объём выборки	Количество измерений			Количество измерений на шаг (в среднем)		
	Всего	u	v	Всего	u	v
100%	13617	9924	3693	340	248	92
75%	10213	7443	2770	255	186	69
50%	6809	4962	1857	170	124	46
25%	3404	2481	923	85	62	23

На рис. 3.23–3.25 приведены результаты тестов на выборках уменьшенного объёма. Рисунки демонстрируют постепенную деградацию точности измерений с уменьшением объёма входных данных. При объёме равном 85 измерений на шаг (рис. 3.25) точность измерений становится неприемлемой для практических целей на всём диапазоне глубин отверстия.

В таблице 3.8 приведены сводные данные по величине стандартного отклонения определяемой интенсивности напряжений от объёма входных данных.

Таблица 3.8. Зависимость  $\Delta\sigma_u$  от глубины отверстия  $h/r_0$  при различных объёме экспериментальных данных

Объём выборки (количество точек на шаг)	$h/r_0$				
	0,5	1	1,5	2	2,5
100% (340)	6,1 МПа	5,6 МПа	12,5 МПа	35,9 МПа	55,7 МПа
75% (255)	8,0 МПа	6,8 МПа	14,2 МПа	38,9 МПа	70,1 МПа
50% (170)	9,5 МПа	8,9 МПа	17,5 МПа	49,1 МПа	84,6 МПа
25% (85)	20,5 МПа	14,9 МПа	31,8 МПа	78,1 МПа	128,2 МПа

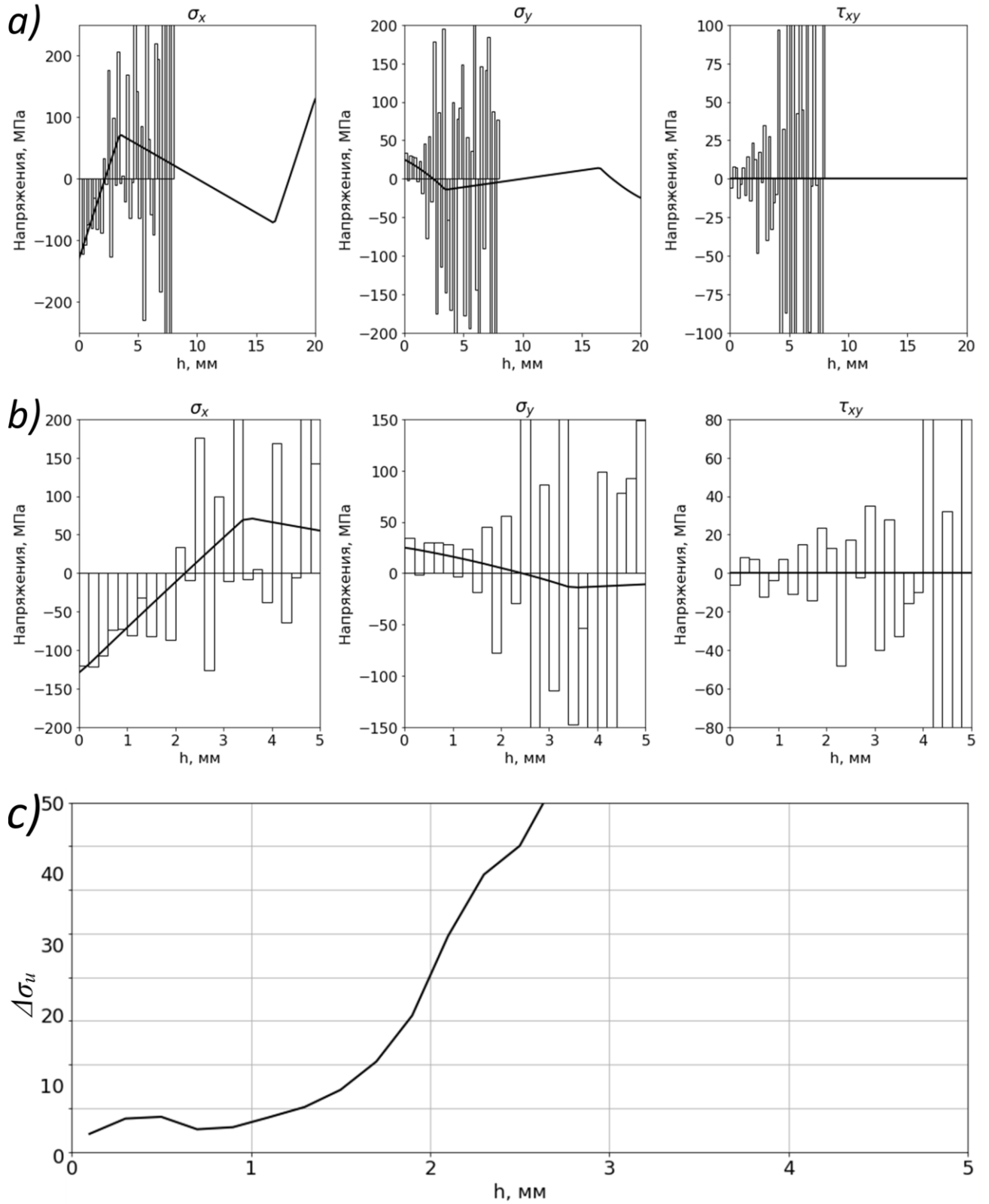


Рис. 3.23. Использование 75% выборки измерений. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

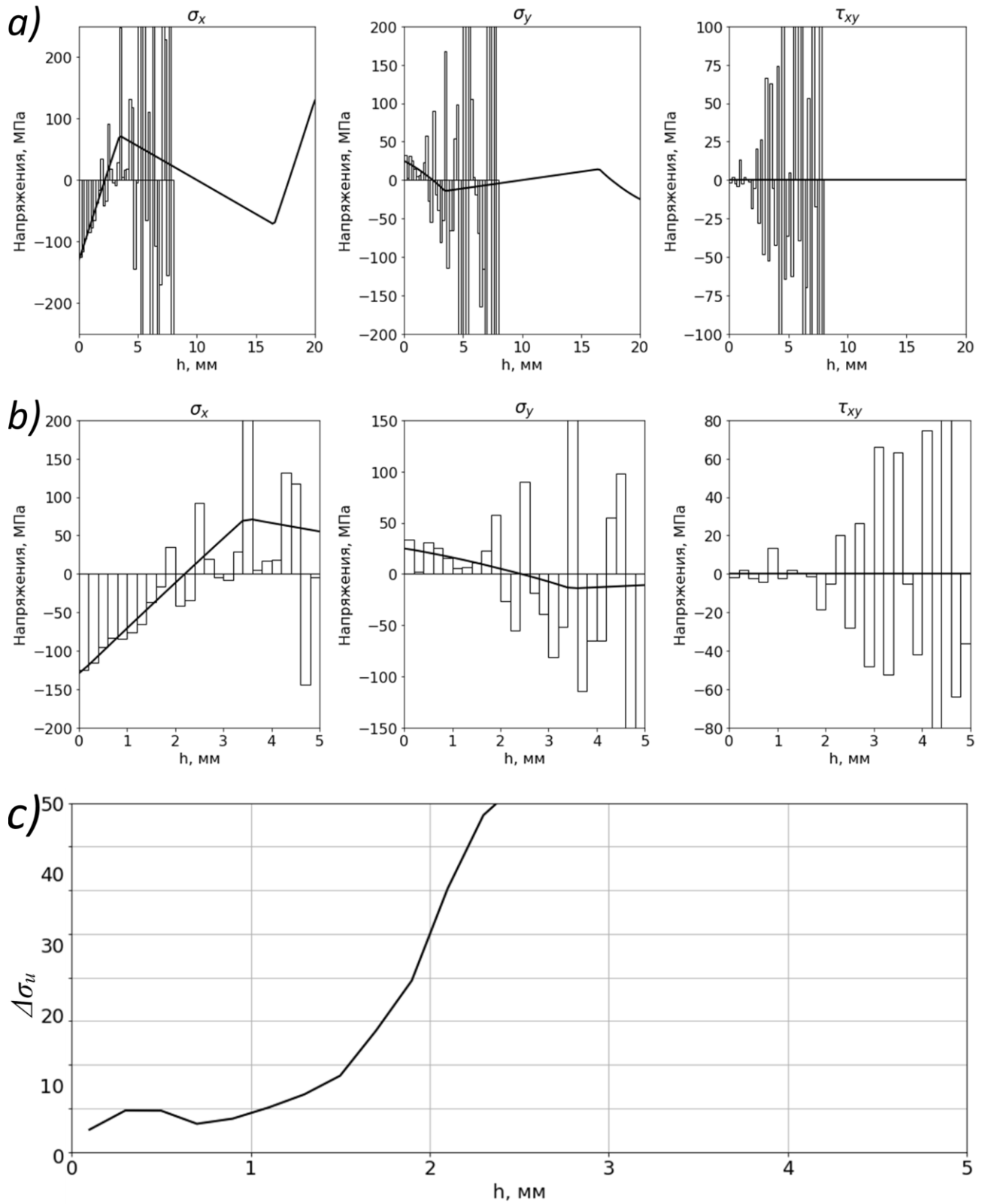


Рис. 3.24. Использование 50% выборки измерений. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

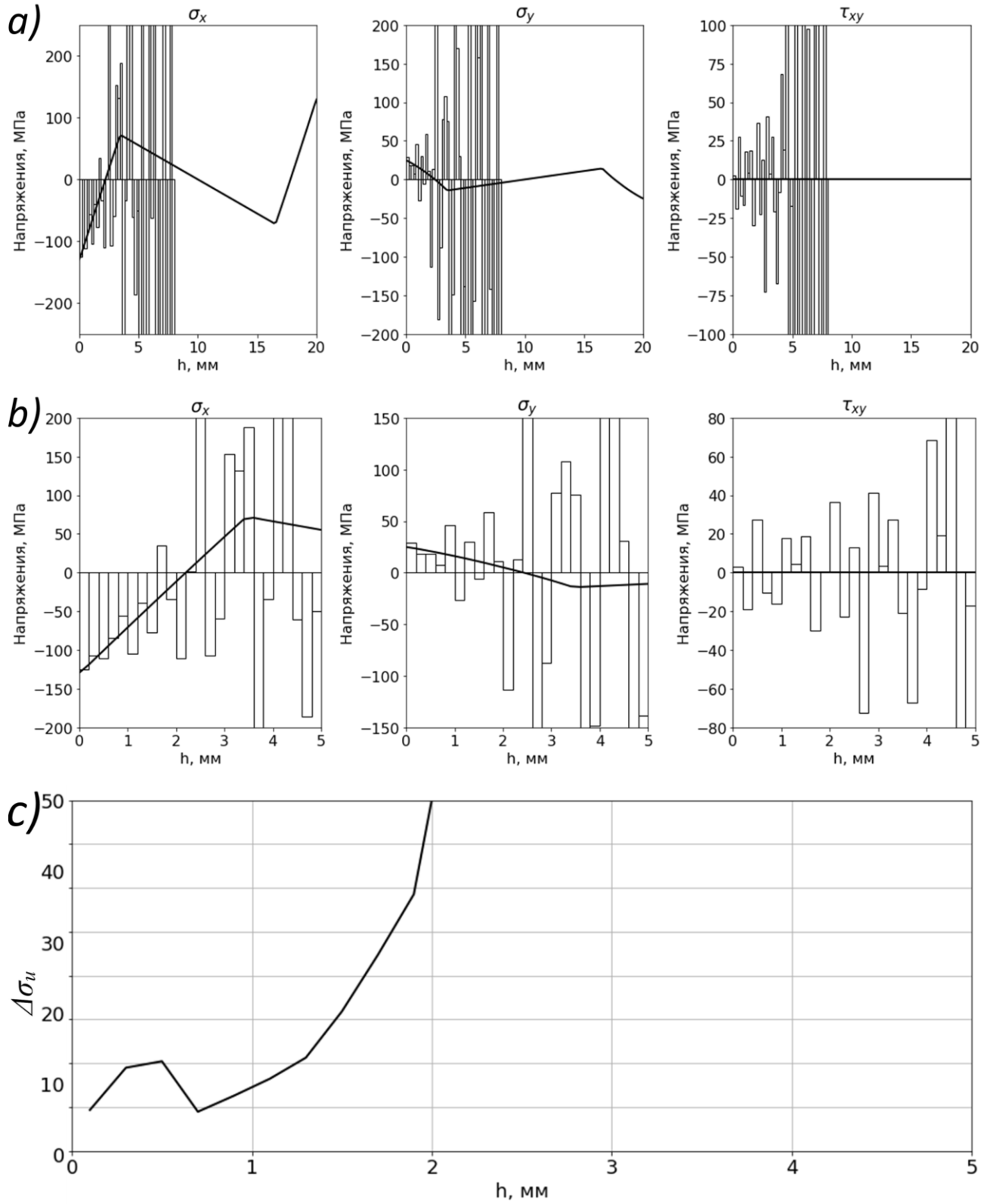


Рис. 3.25. Использование 25% выборки измерений. а) – напряжения восстановленные по всей области определения базовых функций; б) – напряжения восстановленные до порога чувствительности; в) – зависимость  $\Delta\sigma_u = \Delta\sigma_u(h)$

### 3.6.5 Заключение

Обобщая проведённые тесты, можно отметить следующее. Вносимые в измерения экспериментальные ошибки заметно влияют на точность метода. Характерные для современных методов уровни точности измерений позволяют определять напряжения до глубины  $h_{lim}=1,5r_0$ . Метод слабо чувствителен к выбору расположения конкретных точек проведения измерений. Решающее значение для точности метода имеет количество независимых измерений на каждом шаге по глубине отверстия. С увеличением числа измерений может быть увеличена глубина, до которой выполняются измерения с заранее заданной точностью.

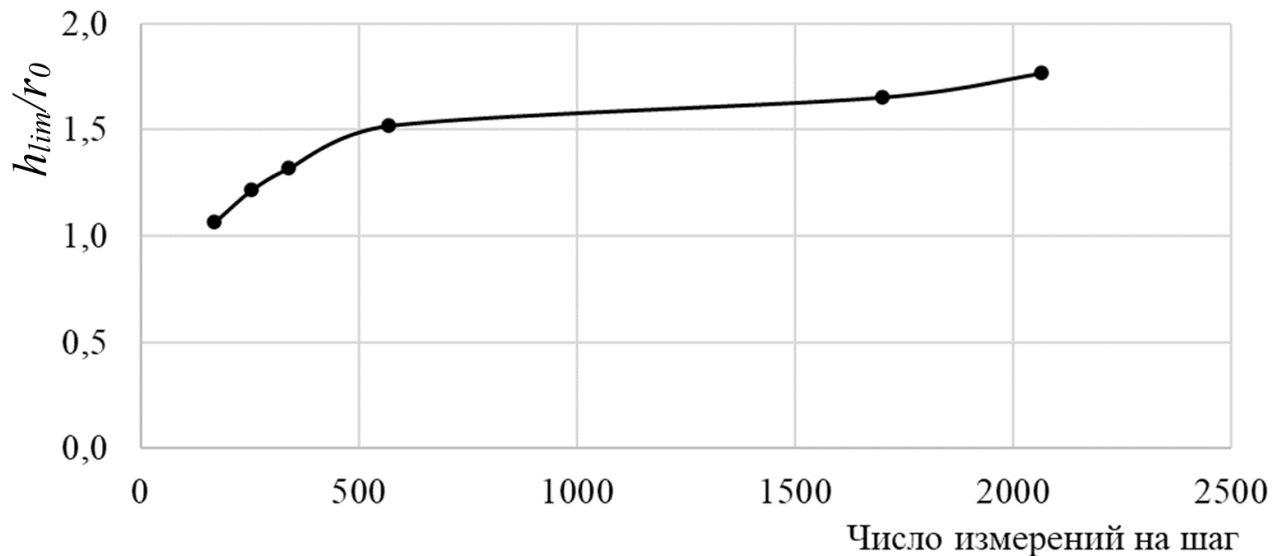


Рис. 3.26. Зависимость предельной глубины определения напряжений от числа измерений на шаге

На рис. 3.26 построена зависимость предельной глубины измерения  $h_{lim}$  от числа измерений на каждом шаге по критерию достижения  $\Delta\sigma_u^*$ .



### 3.7 Выводы по главе 3

1. Построено теоретическое обоснование и разработан новый метод определения неоднородных по глубине остаточных упругих напряжений по результатам измерения перемещений.
2. Разработан алгоритм вычисления базовых функций, необходимых для реализации метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений. Вычислены их значения для упругого полупространства.
3. Разработана программная реализация предложенного метода, выполняющая вычисление остаточных упругих напряжений по результатам измерения перемещений.
4. Проведено тестирование метода в численном эксперименте. Результаты показывают хорошую точность метода. Восстановленные компоненты тензора напряжений хорошо согласуются с известным решением задачи, в которой остаточное напряженное состояние сформировано изгибом бруса из упруго-идеальнопластического материала. Получено, что наибольшая компонента тензора напряжений восстанавливается достаточно точно вплоть до глубины пять радиусов отверстия, что превышает диапазон чувствительности современных методов измерения перемещений. Остальные компоненты (не менее чем на порядок меньшие) точно восстанавливаются до глубины двух радиусов.
5. Определены требования к объёму и точности измерения перемещений для достижения требуемой точности вычисления остаточных напряжений. Получено, что приемлемый уровень отклонения интенсивности напряжений при случайном шуме со стандартным отклонением 0,001 мкм не превышает, при отклонении 0,005 мкм этот уровень достигается на глубине трёх радиусов отверстия, при отклонении 0,01 мкм – на глубине 1,8 радиуса, а при отклонении 0,05 мкм – на глубине 0,5 радиуса. Снижение числа измерений

играет решающую роль в изменении точности. При фильтрации по радиусу расположения исключается небольшое количество точек с высокими значениями перемещений и точность определения остаточных напряжений падает незначительно. В то же время исключение большого числа точек с малыми абсолютными значениями перемещений приводит к заметному снижению точности. Характерные для современных методов уровни точности измерений позволяют определять напряжения до глубины 1,5 радиуса. Метод слабо чувствителен к выбору расположения конкретных точек проведения измерений.

## ГЛАВА 4. ОЦЕНКА ОБЛАСТИ ПРИМЕНИМОСТИ УПРУГИХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

В данной работе в рамках феноменологического подхода рассматривается метод определения трехмерного неоднородного остаточного напряженно-деформированного состояния в предположении линейно-упругого деформирования. Поскольку высверливаемое отверстие является концентратором напряжений, применение метода сверления отверстий может приводить к неупругому деформированию. В данной главе ставится задача определения границ применимости предложенного метода в таких случаях.

### 4.1 Тестовый эксперимент

Рассмотрим следующий эксперимент. Брусок прямоугольного поперечного сечения размерами  $200 \text{ мм} \times 36 \text{ мм} \times 18 \text{ мм}$  из алюминиевого сплава с пределом текучести  $\sigma_T \approx 250 \text{ МПа}$  [18] находится в условиях чистого изгиба. Глубина отверстия-индикатора принимается равной  $h=3 \text{ мм}$  при  $r_0=1 \text{ мм}$ , что обеспечивает примерно постоянное осевое напряжение в пределах отверстия. При этом было проверено, что в образце практически отсутствуют остаточные напряжения.

На поверхности образца выполнена серия опытов по высверливанию отверстий при различных уровнях осевого напряжения. Измерение компонент вектора перемещений выполнялось методом спекл-интерферометрии. В таблице 4.1 приведены результаты расчётов однородных напряжений по методу, описанному в п. 1.1.6.4.

Таблица 4.1. Результаты тестового эксперимента

№№	Задано		Восстановлено	
	$\sigma_1$ , МПа	$\sigma_2$	$\sigma_1$ , МПа	$\sigma_2$ , МПа
1	80	0	81	5
2	110		112	-4
3	140		130	-6
4	170		177	-13
5	200		191	-17
6	230		254	2
7	260		335	20
8	290		486	30

Начиная с некоторого значения действующего напряжения наблюдается рост погрешностей определения обеих компонент напряжений. Погрешность используемого метода оценивается величиной  $\sim \pm 15$  МПа [49]. При этом из таблицы видно, что начиная с некоторого уровня действующих напряжений наблюдаются большие погрешности.

## 4.2 Вычислительный эксперимент

Получить экспериментальным путём аналогичные результаты при других видах напряженного состояния представляется затруднительным. В связи с этим были выполнены численные эксперименты.

Рассматривается тело с удалёнными границами в условиях двухосного напряжённого состояния. Модель представляет собой элемент симметрии в  $\frac{1}{4}$  часть тела. Часть модели, соответствующая удаляемому при высверливании материалу, выделена в отдельную подобласть для процедур, связанных с перестроением сетки. При нанесении конечно-элементной сетки применяется радиально-кольцевая структура со сгущением вблизи границ отверстия.

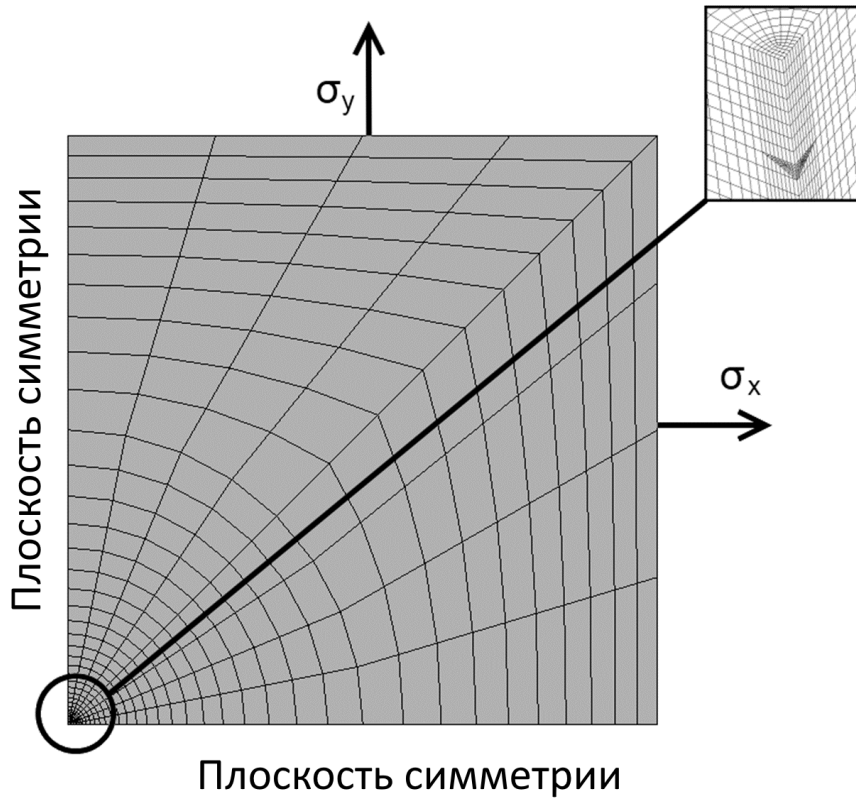


Рис. 4.1. Конечноэлементная модель для исследования

Для описания поведения материала использовалась упругопластическая модель по теории течения Мизеса и изотропным упрочнением. Диаграмма деформирования принималась полилинейной. В таблице 4.2 приведены упругие постоянные материала и характеристики диаграммы деформирования, соответствующие стали 09Г2С.

Таблица 4.2. Механические свойства тестового материала

Упругие константы		Диаграмма деформирования	
Модуль упругости, ГПа	Коэффициент Пуассона	Истинные напряжения, МПа	Истинные деформации, $10^{-3}$
205	0,33	325,0	1,6
		352,0	3,0
		355,0	6,0
		360,4	9,0
		370,5	12,0
		380,7	15,0
		391,0	18,0
		415,4	23,0

При формулировке граничных условий учитывались соотношения симметрии напряженно-деформированного состояния тела в целом. В качестве нагрузок, моделирующих остаточные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в теле, рассматривалось однородное осевое напряжение, прикладываемое к соответствующим боковым граням. Рассматривается серия таких задач при разных уровнях интенсивности напряжений  $\sigma_i = \beta \sigma_T$ ,  $0,6 \leq \beta \leq 1$ .

Рассматривались отношения осевых напряжений  $g = \sigma_y / \sigma_x$  в диапазоне от  $-1$  до  $1$  с шагом  $0,05$ , что обуславливает 41 точку для каждого уровня интенсивности напряжений.

Для проведения вычислений была разработана программа на языке APDL, выполняющая эту серию расчётов в автоматическом режиме. На первом шаге нагрузка прикладывалась к полной модели (тело без отверстия) и вычислялись перемещения на внешней поверхности. На втором и последующих шагах из модели послойно удалялась сетка, соответствующая области отверстия, и вычислялись перемещения на поверхности тела с отверстием. Для имитации экспериментальных данных, получаемых методом спекл-интерферометрии, массив результатов вида «координата узла – перемещения в узле» преобразовывался в массив вида «координата точки на полосе на спеклограмме – целочисленный порядок полосы». При этом для параметров виртуальной экспериментальной установки устанавливались значения:  $\lambda = 532$  нм,  $\varphi = 45^\circ$ . Дальнейшие действия соответствовали процедуре обработки экспериментальных данных при определении однородных остаточных напряжений по результатам измерения перемещений.

В итоге проведенного моделирования экспериментов по определению компонент тензора остаточных напряжений в упругом приближении получен массив данных, несущий информацию о зависимости восстановленных значений

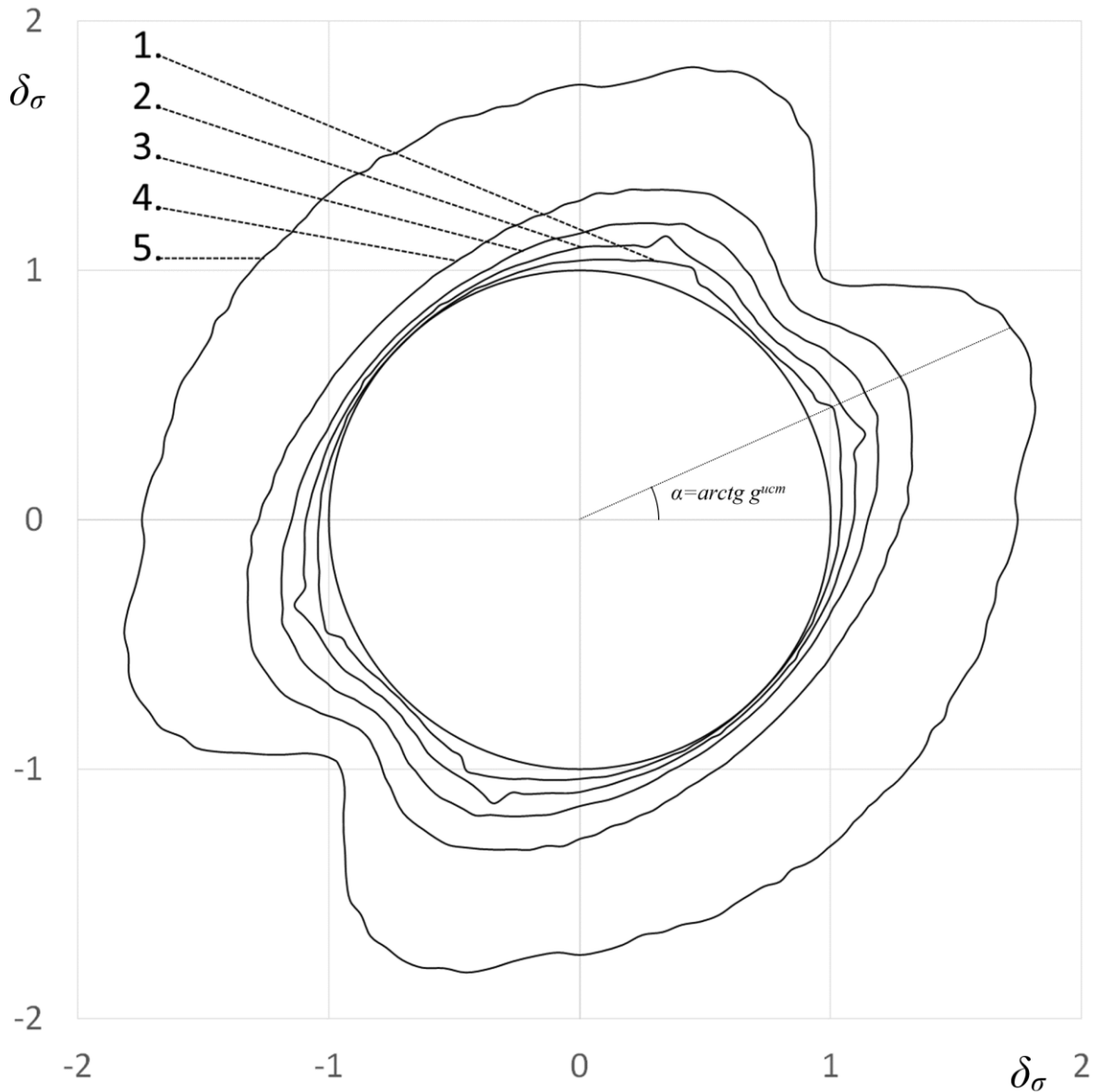
компонент тензора напряжений от значений приложенных напряжений. Точность восстановления остаточных напряжений будем характеризовать двумя параметрами: отношением интенсивности восстановленных напряжений  $\sigma_u^{восст}$  к интенсивности истинных  $\sigma_u^{ист}$ :  $\delta_\sigma = \sigma_u^{восст} / \sigma_u^{ист}$  и отношением осевых восстановленных напряжений  $g^{восст}$ .

### 4.3 Результаты вычислений

Результаты представлены в виде диаграммы ошибок (рис. 4.2). Каждый замкнутый контур на ней соответствует определенному значению  $\beta$ . Точка на контуре соответствует определенным значениям  $\delta_\sigma$  и  $g^{ист}$ . Диаграмма построена таким образом, что параметр  $g^{ист}$  равен тангенсу угла наклона  $\alpha$  радиус-вектора, проведенного из начала координат к рассматриваемой точке  $g^{ист} = tg\alpha$ , а длина радиус-вектора равна величине ошибки  $\delta_\sigma$ .

Приведенная диаграмма демонстрирует, что для случая чистого сдвига ( $g = -1$ ) значение  $\delta_\sigma = 1,1$  имеет место при уровне  $\beta = 0,8$ , для случаев одноосного растяжения или сжатия ( $g = 0$ ) и равного двухосного растяжения или сжатия ( $g = 1$ ) – при  $\beta = 0,7\sigma_T$ .

Полученный результат достаточно хорошо коррелирует с приведенными ранее экспериментальными данными. Наиболее опасными являются случаи неравного двухосного растяжения или сжатия при  $g = 0,25 - 0,35$ . Для этих напряженных состояний ошибка  $\delta_\sigma$  при  $\beta = 0,9$  достигает 40%.



**Рис. 4.2.** Диаграмма ошибок при различных уровнях  $(\sigma)_{ист}$ :

1 –  $0,6\sigma$ , 2 –  $0,7\sigma$ , 3 –  $0,8\sigma$ , 4 –  $0,9\sigma$ , 5 –  $1,0\sigma$

На рис. 4.3 представлен график зависимости между истинными отношениями компонент напряжений  $g^{ист}$  и восстановленными  $g^{восст}$ . В целом ошибка определения  $g$  не велика и не превышает 11% даже при величине  $\beta=1$ .



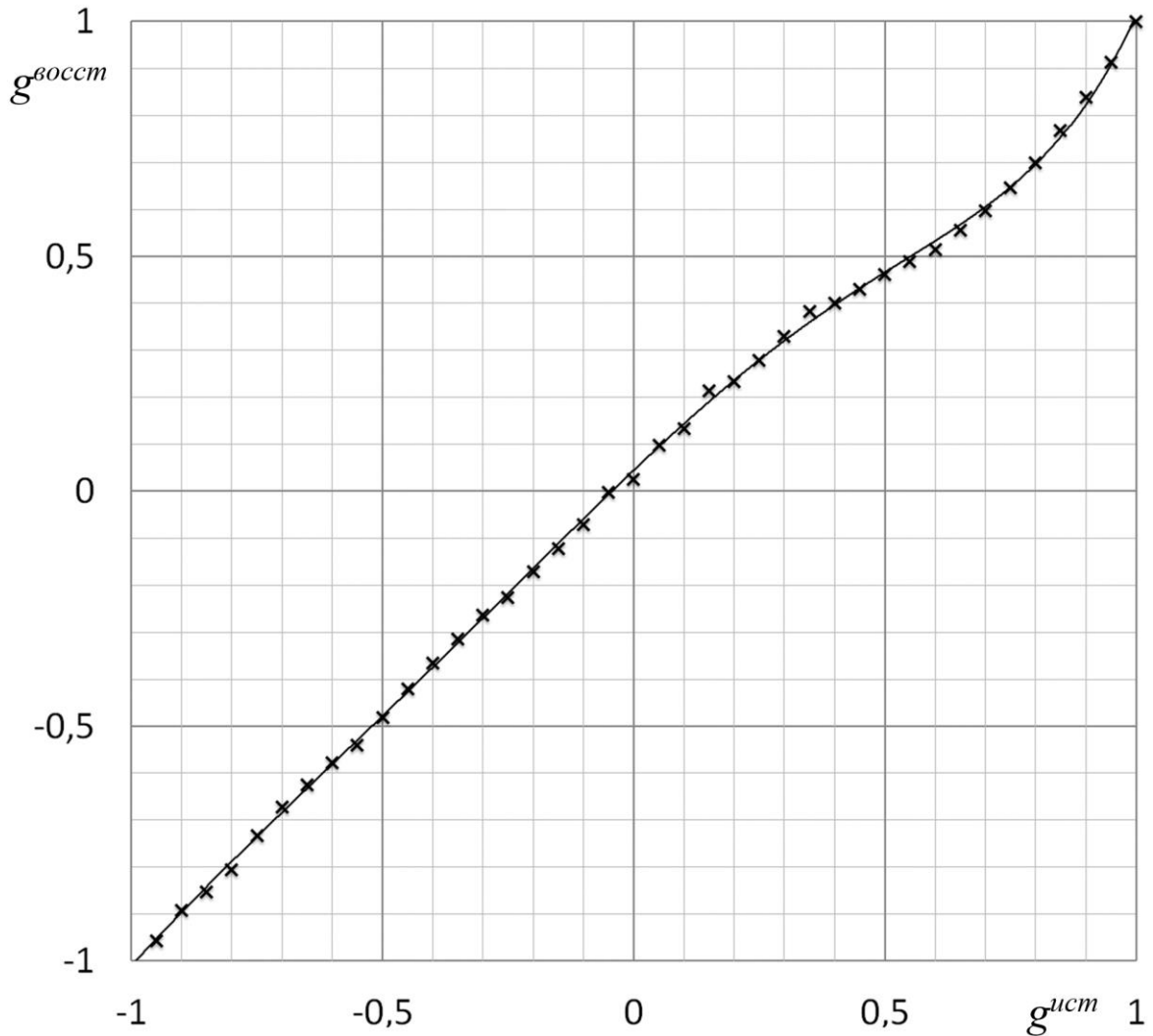


Рис. 4.3. Зависимость  $g^{восст}$  от  $g^{ист}$  при  $\beta=1,0$

По результатам проведенных исследований можно положить что при решении обратной задачи определения остаточных напряжений параметр  $g$  определяется достаточно точно из решения упругой задачи (максимальная ошибка 11%). При этом интенсивность остаточных напряжений определяется упругим решением до  $\beta \leq 0,7$ .

#### 4.4 Выводы по главе 4

1. Проведён вычислительный эксперимент для оценки диапазона применимости упругих определяющих соотношений в задаче определения остаточных напряжений по результатам измерения компонент вектора перемещений.

2. Проанализированы зависимости отношения восстановленных к истинным напряжениям от уровня истинной интенсивности напряжений и отношения главных компонент. Консервативно диапазон достоверных измерений для применения соотношений теории упругости может быть оценён величиной интенсивности остаточных напряжений равной 0,6–0,7 от предела текучести материала.
3. При интенсивностях напряжений выше 0,7 от предела текучести разница между вносимыми ошибками при чистом сдвиге и при соотношении главных компонент напряжений 0,25–0,35 достигает 40%.
4. Отношение главных компонент остаточных напряжений определяется достаточно точно из решения упругой задачи (ошибка не превышает 11%).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определение неоднородных полей остаточных напряжений по известным значениям компонент тензора деформаций или вектора перемещений является актуальной и сложной проблемой обратных задач механики деформируемого твердого тела.

Решение этой проблемы связано с необходимостью иметь наиболее точную экспериментальную информацию. Наиболее актуальным подходом, на наш взгляд, будет определение остаточных напряжений на основе анализа больших массивов экспериментальных измерений компонент вектора перемещений и результатов численного решения серий модельных задач. Совместная реализация метода пошагового сверления отверстий и измерений локальных полей перемещений методом цифровой спекл-интерферометрии или методом корреляции цифровых изображений представляет собой перспективный путь в этом направлении.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. В результате анализа обширного экспериментально-теоретического материала по проблеме определения остаточного напряжённо-деформированного состояния выделены три группы экспериментальных методов: методы измерения компонент тензора деформаций и вектора перемещений при образовании новых поверхностей, методы измерения расстояний между кристаллографическими плоскостями и методы измерения физических величин, имеющих корреляционную связь с напряжённо-деформированным состоянием. Показано, что в настоящее время наиболее эффективным является метод пошагового сверления отверстий с измерением компонент вектора перемещений оптическими методами с автоматизацией сбора и обработки данных. Известные теоретические подходы позволяют с

достаточной степенью точности определять однородное остаточное напряжённое состояние как по данным тензометрирования, так и по результатам оптических измерений, а подход к определению неоднородных полей остаточных напряжений по результатам измерения деформаций тензометрическими датчиками обладает рядом недостатков.

2. В работе предложен подход к определению трёхмерного неоднородного поля упругих остаточных напряжений, который состоит из: метода определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений, основанного на дополнении известных определяющих соотношений для компонент вектора перемещений членами с производными от главных компонент тензора напряжений, и метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений на основе определяющих соотношений в виде интегральных операторов Вольтерры. Подход основан на результатах измерений компонент вектора перемещений оптическими методами при использовании метода пошагового сверления отверстия. Дано теоретическое обоснование предложенного подхода.
3. Определены базовые функции метода определения неоднородных в плоскости остаточных напряжений для бесконечной пластины. Представлен алгоритм вычисления базовых функций для метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений. По предложенному алгоритму найдены базовые функции для упругого полупространства. Полученные результаты согласуются с известными опытными данными и расчётными значениями компонент тензора деформаций поверхности тела в зависимости от глубины отверстия по стандарту ASTM E837.
4. Проведено тестирование предложенного метода определения неоднородных по глубине остаточных напряжений. Восстановленные компоненты тензора напряжений хорошо согласуются с известным решением тестовой задачи.

Определены требования к точности и объёму экспериментальных данных необходимых для определения остаточных напряжений с заданной погрешностью. Показано, что точность современных оптических методов измерений компонент вектора перемещений является приемлемой для определения неоднородного поля остаточных напряжений согласно рассмотренному подходу. Построена зависимость предельной глубины определения остаточных напряжений при заданной точности их определения от числа измерений компонент перемещений на поверхности.

5. Исследована область применимости определяющих соотношений теории упругости для нахождения остаточных напряжений. Консервативно диапазон достоверных измерений для применения соотношений теории упругости может быть оценён величиной интенсивности остаточных напряжений равной 0,6–0,7 от предела текучести материала. При больших интенсивностях напряжений разница между вносимыми ошибками при чистом сдвиге и при соотношении главных компонент напряжений 0,25–0,35 достигает 40%. Отношение главных компонент остаточных напряжений определяется достаточно точно из решения упругой задачи (ошибка не превышает 11%).

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Razumovskii I.A., Usov S.M. Development of the Hole-Drilling Method as Applied to the Study of Inhomogeneous Residual Stress Fields // Journal of Machinery Manufacture and Reliability, Vol. 50, No. 8, 2021. pp. 727-734.
2. Schajer G.S. Optical Hole-Drilling Residual Stress Calculations Using Strain Gauge Formalism // Experimental Mechanics, No. 61, 2021. pp. 1369–1380.
3. Ospina O. Investigation of the Measurement of Through-Thickness Residual Stress by Combining Digital Speckle Pattern Interferometry and the Slitting Method, UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA, Florianópolis, MoS Dissertation 2020.
4. Биргер И.А. Остаточные напряжения. М.: URSS, 2015. 234 pp.
5. Fairfax E.J., Steinzig M. A Summary of Failures Caused by Residual Stresses // Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. 2015. P. 209—214.
6. Андрюкова Е.А., Буркин С.П., Шимов Г.В. Остаточные напряжения в металлопродукции. Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2015. 247 pp.
7. Schajer G.S., Rickert T.J. Incremental computational technique for residual stress calculations // Experimental and Applied Mechanics. 2011. No. 6. pp. 185-191.
8. Razumovsky I.A. Methods for Determination of Inhomogeneous Residual Stress Fields // In: Handbook of Residual Stress and Deformation of Steel. ASM International, 2002. pp. 125-138.
9. Келлер И.Э., Трофимов В.Н., Владыкин А.В., Плюснин В.В., Петухов Д.С., Виндокуров И.В. К вопросу о реконструкции остаточных напряжений и деформаций пластины после дробеструйной обработки // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки, Vol. 22, No. 1, 2018. pp. 40-64.
10. Келлер И.Э., Дудин Д.С., Петухов Д.С., Пермяков Г.Л., Трушников Д.Н. Способ определения остаточных напряжений в ребре на жестком основании, Патент на изобретение № 2797771, декабрь 20, 2022.

11. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об особенностях идентификации неоднородного предварительного напряжённого состояния в термоупругих телах // Прикладная математика и механика, Vol. 81, No. 1, 2017. pp. 103-110.
12. Ватульян А.О., Недин Р.Д. К восстановлению характеристик плоского начального напряжённого состояния // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела, No. 5, 2020. pp. 27-37.
13. Рябев Л.Д. Перспективы атомной энергетики в России // Доклады третьего российско–американского семинара "Продление ресурса безопасной эксплуатации" (19 – 22 мая 1997 г.). М. 1997. pp. 57 – 83.
14. Вишняков Я.Д., Писарев В.Д. Управление остаточными напряжениями в металлах и сплавах. М.: Металлургия, 1989. 254 pp.
15. Карапетян А.Р., Плотников А.С., Смирнов М.И., Спиридонов Ю.А. Расчётные методы определения влияния напряжений на качество резки // Стекло и керамика. 2013. No. 1. pp. 1 – 5.
16. Кудрявцев И.В. Влияние остаточных напряжений на усталостную прочность стали. М.: ВИНТИ, 1957. 17 pp.
17. Новиков Н.Н. Теория термической обработки металлов. М.: Металлургия, 1978. 392 pp.
18. Анпилов А.В., Кисилёв А.С., Кисилёв А.С., Ларкин А.И., Одинцев И.Н., Осинцев А.В., Тутнов А.А., Щепинов В.П., Щиканов А.Ю., Фонтен Ж. Определение остаточных сварочных напряжений на основе совместного использования методов голографической интерферометрии и конечных элементов. М.: МИФИ, 2007. 124 pp.
19. Apalkov A.A., Odintsev I.N., Schepinov V.P., Yu S.A. Research of welding stresses in the pipelines DU-300 of the Smolensk and Kursk NPP's // The third international conference pipelines safety. (6 – 10 September 1999). М. 1999. Vol. 4. pp. 68 – 81.
20. ASM Handbook. Ed. by Shipley R. J., Becker W. T. Vol. 11: Failure Analysis and Prevention. Materials Park. OH: ASM International, 2002. 1164 pp.

21. Maleki E., Farrahi G.H., Kashyzadeh K.R., Unal O., Gugaliano M., Bagherifard S. Effects of Conventional and Severe Shot Peening on Residual Stress and Fatigue Strength of Steel AISI 1060 and Residual Stress Relaxation Due to Fatigue Loading: Experimental and Numerical Simulation // *Metals and Materials International*, No. 27, 2021. pp. 2575–2591.
22. Winiarski B., Benedetti M., Fontanari V., Allahkarami M., Hanan J.C., Schajer G.S., Withers P.J. Comparative Analysis of Shot-Peened Residual Stresses Using Micro-Hole Drilling, Micro-Slot Cutting, X-ray Diffraction Methods and Finite-Element Modelling // *Residual Stress, Thermomechanics & Infrared Imaging, Hybrid Techniques and Inverse Problems*. Cham. 2016. Vol. Volume 9. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. pp. 215–223.
23. Maleki E., Unal O., Guagliano M., Bagherifard S. Analysing the Fatigue Behaviour and Residual Stress Relaxation of Gradient Nano-Structured 316L Steel Subjected to the Shot Peening via Deep Learning Approach // *Metals and Materials International*, No. 28, 2022. pp. 112–131.
24. Vantadori S., Valeo J.V., Zanichelli A. Fretting fatigue and shot peening: a multiaxial fatigue criterion including residual stress relaxation // *Tribology International*, No. 151, 2020.
25. Ahmad M., Peng R.L., König M., Johansson S. Bending Fatigue Behavior of Blast Cleaned Grey Cast Iron // *Materials Research Proceedings*. 2016. Vol. 2. pp. 193-198.
26. Одинцев И.Н., Плугатарь Т.П., Плотников А.С. Оценка влияния дробеструйной обработки на распределение остаточных напряжений в поверхностном слое образцов из алюминиевого сплава // *Научные труды VI Международной научной конференции "Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении"*. Москва. 2019. pp. 297-298.
27. Rahimi S., Violatos I. Comparison Between Surface and Near-Surface Residual Stress Measurement Techniques Using a Standard Four-Point-Bend Specimen // *Experimental Mechanics*, No. 62, 2022. pp. 223–236.
28. Peng Y., Zhao J., Chen L.S., Dong J. Residual stress measurement combining blind-hole drilling and digital image correlation approach // *Journal of Constructional Steel Research*, No. 176, 2021.



29. Pástor M., Hagara M., Virgala I., Kalavský A., Sapietová A., Hagarová L. Design of a Unique Device for Residual Stresses Quantification by the Drilling Method Combining the PhotoStress and Digital Image Correlation // *Materials*, No. 14 (2):314, 2021.
30. Albertazzi A., Viotti M., Veiga C. A Portable Optical DSPI System for Residual Stresses Measurement by Hole Drilling Using the Integral Method in Terms of Displacement // *Materials Research Proceedings*. 2016. Vol. 2. pp. 449-454.
31. Harrington J., Schajer G.S. Measurement of Structural Stresses by Hole-Drilling and DIC // *Experimental Mechanics*, No. 57, 2017. pp. 559–567.
32. Hagara M., Trebuna F., Pástor M., Hunady R., Lengvasky P. Analysis of the aspects of residual stresses quantification performed by 3D DIC combined with standardized hole-drilling method // *Measurement*, No. 137, 2019. pp. 238–256.
33. Simon N., Gibmeier J. Consideration of Tool Chamfer for Realistic Application of the Incremental Hole-Drilling Method // *Materials Research Proceedings*. 2016. Vol. 2. pp. 473-478.
34. Чернышёв Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М. Полезные и опасные остаточные напряжения // *Природа*. 2002. No. 10.
35. Guo J., Fu H., Pan B., Kang R. Recent progress of residual stress measurement methods: A review // *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 34, No. 2, 2021. pp. 54-78.
36. Семёнова М.М., Плотников А.С., Одинцев И.Н. Совершенствование методики измерения остаточных напряжений методом зондирующего отверстия // XXVI Международная Инновационно-ориентированная конференция молодых учёных и студентов МИКМУС-2014. Труды конференции. Москва. 2015. pp. 561-565.
37. Одинцев И.Н., Плугатарь Т.П., Плотников А.С. Практические аспекты применения разрушающих методов определения остаточных напряжений в сочетании с электронной спекл-интерферометрией // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник трудов. В 4-х томах. Уфа. 2019. Vol. 3. pp. 731-733.
38. Каракозов Е.В., Одинцев И.Н., Плотников А.С., Плугатарь Т.П. Оценка высокоградиентных компонент остаточных напряжений по данным метода

сверления зондирующих отверстий // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения (МИКМУС - 2019). Сборник трудов конференции. Москва. 2020. pp. 90-93.

39. Plugatar T.P., Odintsev I.N., Plotnikov A.S. A study of residual stress distributions in case-hardened material layers // AIP Conference Proceedings. 14th International Conference on Mechanics, Resource and Diagnostics of Materials and Structures, MRDMS 2020. Ekaterinburg. 2020. Vol. 2315. P. 040028.
40. Karakozov E., Odintsev I., Plotnikov A., Plugatar T. Determination of high-gradient components of residual stress by data of test hole drilling method // IOP Conference Series: Materials and Engineering. International Conference of Young Scientists and Students "Topical Problems of Mechanical Engineering", ToPME 2019. Moscow. 2020. Vol. 747. P. 012019.
41. Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. Идентификация неоднородных полей остаточных напряжений на основании оптических измерений // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. Москва. 2022. Vol. 2. pp. 224-241.
42. Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. Моделирование неоднородного поля остаточных напряжений при проектировании и изготовлении высокотехнологичной продукции // Системы управления полным жизненным циклом высокотехнологичной продукции в машиностроении: новые источники роста. Материалы V всероссийской научно-практической конференции. Москва. 2022. pp. 200-204.
43. Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. Об определении неоднородного поля остаточных напряжений на основе измерений компонент вектора перемещений // Ломоносовские чтения. Научная конференция. 18-22 апреля 2022 года. Тезисы докладов. Москва. 2022. Vol. Секция механики. pp. 73-74.
44. Plotnikov A.S., Osintsev A.V., Schepinov V.P. Measurement of the displacements of points on the surface of a body by means of the konus hologram interferometer // Measurement Techniques, Vol. 54, No. 2, 2011. pp. 143-149.

45. Smirnov M.I., Karapetyan A.R., Spiridonov Y.A., Plotnikov A.S. Computational methods for determining the effect of stress on cutting quality // *Glass and Ceramics*, Vol. 70, No. 1-2, 2013. pp. 14-17.
46. Apalkov A.A., Odintsev I.N., Plotnikov A.S. Estimation of range of reliable measurements of residual stresses by hole drilling method // *Inorganic Materials*, Vol. 53, No. 15, 2017. pp. 1496-1501.
47. Plotnikov A.S., Zavoychinskaya E.B. On the Method for Identifying Inhomogeneous Fields of Residual Stresses // *Moscow University Mechanics Bulletin*, Vol. 78, No. 2, 2023. pp. 63-70.
48. Плотников А.С., Осинцев А.В., Щепинов В.П. Измерение перемещений точек поверхности тела с помощью голографического интерферометра "КОНУС" // *Измерительная техника*, No. 2, 2011. pp. 25-28.
49. Апальков А.А., Одинцеев И.Н., Плотников А.С. Оценка диапазона достоверных измерений остаточных напряжений методом сверления отверстий // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*, Vol. 82, No. 2, 2016. pp. 47-52.
50. Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. О методе определения неоднородного поля остаточных напряжений с использованием цифровой спекл-интерферометрии и метода сверления отверстий // *Композиты и наноструктуры*, Vol. 14, No. 1 (53), 2022. pp. 16-30.
51. Плотников А.С., Завойчинская Э.Б. О методе идентификации неоднородных полей остаточных напряжений // *Вестник Московского университета. Математика. Механика*, No. 3, 2023. pp. 41-47.
52. Гайдученко Б.И. Остаточные напряжения и усталость проволоки // *Материалы научно-производственного семинара 27–29 сентября 1965 г. М.: Черметинформация. 1967. С. 3 – 31.*
53. Калакуцкий Н.В. О внутренних напряжениях чугуна и стали., Санкт-Петербург, 1887.
54. Брокгауз Ф.А., Ефрон И.А. Энциклопедический словарь Ф. А. Брокгауза и И. А. Ефрона. С.–Пб: Брокгауз–Ефрон, 1890 – 1907.
55. Витман Ф.Ф. Остаточные напряжения. Л.; М.: Гостехиздат, 1933. 64 pp.

56. Гликман Л.А., Греков Д.И. Остаточные напряжения в сварных таврах. М.: Госстройиздат, 1934.
57. Шапов Н.П. и др. К вопросу о классификации и проявлении остаточных напряжений // Заводская лаборатория. 1959. No. 10.
58. Давиденков Н.Н. Измерение остаточных напряжений в трубах // Журнал технической физики, Vol. 1, No. 1, 1931.
59. Давиденков Н.Н., Якутович М.В. Опыт измерения остаточных напряжений в трубах // Журнал технической физики, Vol. 1, No. 2, 1931.
60. Давиденков Н.Н. Об измерении остаточных напряжений // Заводская лаборатория. 1937. No. 8.
61. Давиденков Н.Н., Шевандин Е.М. Исследование остаточных напряжений, создаваемых изгибом // Журнал технической физики. 1939. No. 12.
62. Давиденков Н.Н. Об измерении остаточных напряжений // Заводская лаборатория. 1950. No. 2.
63. Давиденков Н.Н. Об измерении остаточных напряжений // Заводская лаборатория. 1950. No. 12.
64. Давиденков Н.Н. Измерение остаточных напряжений в дисках // Заводская лаборатория. 1957. No. 3.
65. Давиденков Н.Н. К вопросу о классификации и проявлении остаточных напряжений // Заводская лаборатория. 1959. No. 8.
66. Остаточные напряжения: сборник статей под ред. В. Р. Осгуда. М.: Иностранная литература, 1957. 395 pp.
67. Завойчинская Э.Б. Общие закономерности и критерии разрушения твердых тел на разных масштабных-структурных уровнях при длительном нагружении (обобщающая статья) // Заводская лаборатория. Диагностика материалов, Vol. 88, No. 7, 2022. pp. 48-62.
68. Beghini M., Grossi T., Prime M., Santus C. Ill-Posedness and the Bias-Variance Tradeoff in Residual Stress Measurement Inverse Solutions // Experimental Mechanics, No. 63, 2023. pp. 495-516.

69. Sachs G. Der Nachweis inneres Spannungen in Stangen und Rohren // Metallkunde, No. 19, 1927. P. 352.
70. Цобкало С.О., Васильев Д.М. Измерение остаточных напряжений путём вырезания столбика // Заводская лаборатория. 1949. No. 2.
71. Гликман Л.А., Писаревский М.М. Измерение остаточных напряжений в поверхностном слое крупных изделий с помощью тензометрирования // Заводская лаборатория. 1951. No. 1.
72. Popov A.L., Kozintsev V.M., Chelyubeev D.A., Levitin A.L. Hole-Drilling Method in Residual Stress Diagnostics // Mechanics of Solids, Vol. 56, No. 7, 2021. pp. 1320-1339.
73. Mathar J. Determination of Initial Stresses by Measuring the Deformations around Drilled Holes // Trans. ASME. 1934. No. 56. pp. 249 – 254.
74. Kirsh G. Theory of Elasticity and Application in Strength of Materials // Zeitschrift Vevein Deutscher Ingenieure. 1898. Vol. 42. No. 29. pp. 797 – 807.
75. Willheim A., Leon Z. // Mathematik und Physik. 1916. No. 64. P. 233.
76. Soete W., Vancrombrugge R. An Industrial Method for the Determination of Residual Stresses // Proc. SESA. 1950. Vol. VIII. No. 1. pp. 17 – 28.
77. Riparbelli C. A Method for Determination of Initial Stresses // Proc. SESA. 1950. Vol. VIII. No. 1. pp. 173 – 196.
78. Bolten C.R., Ten Gate W. A routine method for the measurement of residual stress in plates // Appl. Sci. Res. 3 (Sec. A). 1952. No. 2. pp. 317 – 343.
79. Kelsey R.A. Measuring Non-uniform Residual Stresses by the Hole-Drilling Method // Proc. SESA. 1956. Vol. 1. No. XVI. pp. 181 – 194.
80. Nisida M., Takabayashi H. Thickness Effects in "Hole Method" and Application of Method to Residual Stress Measurement // Sci. Pap. IPCR. Apr. 1965. Vol. 59. No. 2. pp. 78 – 86.
81. Rendler N.J., Vigness I. Hole-Drilling Strain-Gage Method of Measuring Residual Stresses // Exp. Mech. 1966. Vol. 6. No. 12. pp. 577 – 586.

82. Bathgate R.G. Measurement of Non-Uniform Biaxial Stresses by the Hole Drilling Method // *Strain*. Apr. 1968. Vol. 4. No. 2. pp. 20 – 29.
83. Bert C.W., Thompson G.L. A Method for Measuring Planar Residual Stresses in Rectangularly Orthotropic Materials // *J. Compos. Mater.* 1968. Vol. 2. No. 4. pp. 244 – 253.
84. Cordiano H.V., Salerno V.L. Study of Residual Stresses in Linearly Varying Biaxial-Stress Fields // *Exp. Mexh.* 1969. Vol. 9. No. 1. pp. 17 – 24.
85. Newwar A.M., Shewchuk J. On the Measurement of Residual-Stress Gradients in Alluminium-Alloy Specimens // *Exp. Mech.* 1978. Vol. 18. No. 7. pp. 269 – 276.
86. Newwar A.M., McLachlan K., Shewchuk J. A Modified Hole-Drilling Technique for Measuring Residual Stress in Thin Plates // *Exp. Mech.* 1976. Vol. 16. No. 6. pp. 226 – 232.
87. Schajer G. S. Application of Finite-Element Calculations to Residual Stress Measurements // *ASME Translations: Journal of Engineering Materials and Technology*. 1981. Vol. 103. No. 2. pp. 157 – 163.
88. Manning B.W., T F.M. Finite-Element Calculations of Calibration Constants for Determination of Residual Stress with Depth by the Hole-Drilling Method, Ontario Hydro (Research Division), Toronto, Rep. No. 82-88-K, 1982.
89. Newwar A.M., Miller J.A. A Finite-Element Model of the Blind-Hole Drilling Technique // *Proc. J. SESA-ISME Conf. Exp. Mech. Hawaii*. 1982. pp. 696 – 702.
90. Кобаяси А. Экспериментальная механика: Пер. с англ. Том 2. М.: Мир, 1990. 552 pp.
91. Schajer G. S. Measurement of Non-Uniform Residual Stresses Using the Hole Drilling Method. Part I – Stress Calculation Procedures // *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1988. Vol. 110. No. 4. pp. 338 – 343.
92. Schajer G. S. Measurement of Non-Uniform Residual Stresses Using the Hole Drilling Method. Part II – Practical Application of the Integral Method // *Journal of Engineering Materials and Technology*. 1988. Vol. 110. No. 4. pp. 344 – 349.

93. ASTM E 837-13a. Standart Test Method for Determining Residual Stresses by the Hole-Drilling Strain-Gage Method. 0301st ed. Philadelphia: ASTM International, 2013. 17 pp.
94. Pisarev V.S., Balalov V.V., Aistov V.S., Bondarenko M.M., Yustus M.G. Reflection hologram interferometry combined with hole drilling technique as an effective tool for residual stresses fields investigation in thin-walled structures // Optics and Lasers in Engineering, Vol. 36, No. 6, 2001. pp. 551–597.
95. Pisarev V.S., Grigoriev V.D., Balalov V.V., Chumak S.V. Residual stresses deriving from holographic interferometry data on a base of inverse problem solution // Optics and Lasers in Engineering, Vol. 42, No. 6, 2004. pp. 703-726.
96. Антонов А.А., Бобрик А.И., Морозов В.К., Чернышёв Г.Н. Определение остаточных напряжений при помощи создания отверстий и голографической интерферометрии // Известия АН СССР: Механика твёрдого тела. 1980. No. 2. pp. 182 – 189.
97. Голография. Методы и аппаратура. Под. ред. В. М. Гинзбург и Б. М. Степанова. Москва: Советское радио, 1974. 376 pp.
98. Чернышёв Г.Н., Попов А.Л., Козинцев В.М., Пономарёв И.И. Остаточные напряжения в деформируемых твёрдых телах. Москва: Наука. Физматлит, 1996. 240 pp.
99. Джоунс Р., Уайкс К. Голографическая и спекл-интерферометрия. М.: Мир, 1986. 327 pp.
100. Апальков А.А., Одинцев И.Н., Разумовский И.А. Метод измерения остаточных напряжений в массивных элементах конструкции с использованием электронной спекл-интерферометрии // Заводская лаборатория. 2003. Vol. 69. No. 2. pp. 45 – 49.
101. Филиппов А.В., Габдулганиев А.В. Применение спекл-интерферометрии для экспериментального исследования стружкообразования при резании меди М1 // Современные проблемы науки и образования. 2013. No. 3.
102. Плешанов В.С., Кибиткин В.В., Напрюшкин А.А., Солодушкин А.И. Измерение деформации материалов методом корреляции цифровых изображений // Известия Томского политехнического университета. 2008. Vol. 312. No. 2. pp. 343 – 349.

103. Третьякова Т.В., Спаскова Е.М. Экспериментальное исследование предельных напряжённо-деформированных состояний квазихрупкого материала с использованием метода корреляции цифровых изображений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2013. No. 2. pp. 186 – 198.
104. Башков О.В., Бяков А.В., Гренке В.В., Любутин П.С., Панин С.В., Сундер Р., Шакиров И.В. Стенд для исследований усталостного разрушения комбинацией методов акустической эмиссии, картирования деформации на поверхности и тензометрии // Известия Томского политехнического университета. 2014. Vol. 325. No. 2. pp. 72 – 80.
105. Вильдеман В.Э., Третьякова Т.В., Лобанов Д.С. Методика экспериментального исследования закритического деформирования на образцах специальной усложнённой конфигурации с применением метода корреляции цифровых изображений // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. 2011. No. 4. pp. 15 – 28.
106. Keating T.J., Wolf P.R., Scarpace F.L. An Improved Method of Digital Image Correlation // Photogrammetric Engineering and Remote Sensing. 1975. Vol. 41. No. 8. pp. 993 – 1002.
107. McNeil S.R., Peters W.H., Ranson W.F., Sutton M.A., Wolters W.J. Determination of displacements using an improved digital image correlation method // Image Vision Computing. 1982. Vol. 1. No. 3. pp. 133 – 139.
108. Peters W.H., Ranson W.F. Digital imaging technique in experimental stress analysis // Optical Engineering. 1982. Vol. 21. pp. 427 – 432.
109. McGinnis M.J., Pessiki S., Turker H. Application of Three-dimensional Digital Image Correlation to the Core-drilling Method // Experimental Mechanics. 2005. Vol. 45. No. 4. pp. 359 – 367.
110. Nelson D.V., Makino A., Schmidt T. Residual Stress Determination Using Hole Drilling and 3D Image Correlation // Experimental Mechanics. 2006. Vol. 46. No. 1. pp. 31 – 38.



111. Baldi A. Residual Stress Measurement Using Hole Drilling and Integrated Digital Image Correlation Techniques // *Experimental Mechanics*. March 2014. Vol. 54. No. 3. pp. 379 – 391.
112. Tung S.H., Shih M.H., Kuo J.C. Application of the Digital image Correlation Method to Micro Hole Drilling // *Proceedings of the Thirteenth International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing*. Stirlingshire. 2011. pp. 1 – 12.
113. Flaman M.T. Investigation of Ultra-High Speed Drilling for Residual Stress Measurement by the Center Hole Method // *Experimental Mechanics*. 1982. Vol. 22. No. 1. pp. 26 – 30.
114. Flaman M.T., Herring J.A. Comparison of Four Hole Producing Techniques for the Center-Hole Residual-Stress Measurement Method // *Experimental Mechanics*. 1985. Vol. 9. No. 8. pp. 30 – 32.
115. Пивторак В.А., Черкашин Г.В., Шубладзе Т.Г., Вачиберидзе Г.С. Влияние пластических деформаций в области зондирующего отверстия на точность измерения остаточных сварочных напряжений // *Материалы III Всесоюзного Симпозиума "Технологические остаточные напряжения"*. М. 1988. pp. 299 – 313.
116. Апальков А.А. Исследование остаточных напряжений в элементах конструкций ЯЭУ методом сверления отверстий и цифровой спекл-интерферометрии. Дисс. канд. техн. наук ед. Москва. 2005. 173 pp.
117. Завгороднев П.И., Болотников Б.М. Медницко-жестяницкие работы. Москва: Высшая школа, 1978. 352 pp.
118. Калмин Б.И., Корытов М.С. Физико-химические процессы при обработке металлов резанием. Омск: СибАДИ, 2003. 108 pp.
119. Schajer G.S. Advances in Hole-Drilling Residual Stress Measurement // *Proceedings of the XIth International Congress and Exposition*. Orlando, Florida, USA. 2008.
120. Гужов В.И., Ильиных С.П. Компьютерная интерферометрия. Новосибирск: Издательство НГТУ, 2003. 311 pp.

121. Olson M.D., DeWald A.T., Hill M.R. Precision of Hole-Drilling Residual Stress Depth Profile Measurements and an Updated Uncertainty Estimator // *Experimental Mechanics*, No. 61, 2021. pp. 549–564.
122. Краус И., Трофимов В.В. Метод рентгеновской тензометрии в технической диагностике металлических изделий // *Современное машиностроение. Наука и образование*. 2011. No. 1. pp. 273 – 279.
123. Cohen R., Noyan I.C. Residual stress Measurement By Diffraction And Interpretation // Springer-Verlag. New-York. 1997. pp. 215 – 226.
124. Allen A.J., Hutchings M.T., Windsor C.G. Neutron diffraction methods for study of residual stress fields // *Advances in Physics*. 1985. Vol. 34. No. 4. pp. 445 – 473.
125. Аксёнов В.Л. и др. Нейтронный фурье–дифрактометр ФСД для анализа внутренних напряжений. Первые результаты. Сообщение Объединённого института ядерных исследований ed. Дубна. 2001. 15 pp.
126. Бокучава Г.Д. Исследование остаточных напряжений с помощью дифракции тепловых нейтронов: методика эксперимента. Препринт Объединённого института ядерных исследований ed. Дубна. 2001.
127. Николаева Е.П. Применение метода шумов Баркгаузена для контроля упрочнения деталей поверхностным пластическим деформированием // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*. 2013. Vol. 15. No. 6. pp. 428 – 431.
128. Физический энциклопедический словарь под ред. А. М. Прохорова. М.: Советская энциклопедия, 1983.
129. Ломев Г.В. и др. Исследование возможности оценки остаточных напряжений в зоне сварного соединения методом эффекта Баркгаузена // *Интеллектуальные системы в производстве*. 2012. No. 2. pp. 117 – 120.
130. Горкунов Э.С., Фёдоров В.П., Бахвалов А.Б., Веселов И.Н. Моделирование диаграммы деформирования на основе измерения её магнитных характеристик // *Дефектоскопия*. 1997. No. 4. pp. 87 – 95.
131. Исследования по физике металлов и неразрушающим методам контроля. Под ред. Акулова Н. С. Минск: Наука и техника, 1968. 355 pp.

132. Смолина А.А., Погорелов А.А. Количественная оценка остаточных напряжений методом магнитной структуроскопии // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. 2010. No. 4. pp. 36 – 39.
133. Загидулин Т.Р. Исследование и разработка метода локального магнитного контроля напряжённо-деформированного состояния металла элементов корпусного оборудования и металлоконструкций. Дисс. канд. техн. наук ed. Уфа. 2015. 134 pp.
134. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика. В 10-ти томах. Том VII. Теория упругости. М.: Наука, 1987.
135. Горкунов Э.С., Кулеев В.Г. Механизмы влияния внутренних и внешних напряжений на коэрцитивную силу ферромагнитных сталей // Дефектоскопия. 1997. No. 11. pp. 3 – 18.
136. Большая советская энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1969 – 1978.
137. Макаров П.С. Совершенствование методов магнитного контроля напряжённо-деформированного состояния конструкции магистральных трубопроводов. Дисс. канд. тех. наук ed. Уфа. 2007. 116 pp.
138. Новиков В.Ф. Необратимые и квазиобратимые магнитоупругие явления в магнитно-поляризованной стали // VIII Российская научно-техническая конференция "Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций". Екатеринбург. 2014.
139. Belle A., Langman R.A. Determining absolute stress by a non-destructive magnetic technique // 14th Australian Conf. on the Mechanics of Structures and Materials. Hobart. 1995. pp. 193 – 199.
140. Sablik M.J. Modeling the effects of biaxial stress on magnetic properties of steels with application to biaxial stress NDE // NDT & Eval. 1995. Vol. 12. No. 2. pp. 87 – 102.
141. Васильков С.Д., Тальнишних С.А. Исследование остаточных напряжений резистивным электроконтактным методом // Известия вузов. Приборостроение. 2010. Vol. 53. No. 8. pp. 30 – 33.

142. Назарчук З.Т., Рыбачук В.Г., Учанин В.Н. Электромагнитная структуроскопия конструкционных материалов // Нові матеріали і технології та машинобудуванні. 2011. No. 1. pp. 8 – 16.
143. Фирсов А.М. Основы неразрушающего контроля материалов и деталей машин. СПб: Центр СПбГМТУ, 2009. 51 pp.
144. Деньщиков А.Ю., Подлесный С.В., Шилюк С.Н., Шаповалов К.П. Оценка достоверности измерения внутренних напряжений методами магнитной структуроскопии // Вестник Нац. техн. ун-та "ХПИ". 2007. No. 22. pp. 23 – 27.
145. Hughes D.S., Kelly J.L. Second order elastic deformation of solids // Phys. Rev. 1953. Vol. 92. No. 5. pp. 1145 – 1149.
146. Benson R.W., Raelson V.J. From ultrasonics to a new stress-analysis technique. Acoustoelasticity // Product Eng. 1959. Vol. 30. pp. 56 – 59.
147. Гуца О.И., Лебедев В.К. Влияние напряжений на скорость распространения ультразвуковых волн в металлах // Прикл. механика. 1968. No. 2. pp. 89 – 92.
148. Гузь А.Н., Махорт Ф.Г., Гуца О.И. Введение в акустоупругость. Киев: Наукова думка, 1977. 152 pp.
149. Никитина Н.Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. Н. Новгород: ТАЛАМ, 2005. 208 pp.
150. Лежнёв С.В. Аппаратная реализация метода акустоупругости для измерения остаточных напряжений в изделиях и конструкциях // Физико-математические науки. 2001. No. 9. pp. 28 – 46.
151. Никитина Н.Е. Акустоупругость и её применение для измерения напряжений в крупногабаритных конструкциях // Вестник научно-технического развития. 2009. No. 2. pp. 41 – 46.
152. Никитина Н.Е., Казачек С.В. Преимущества метода акустоупругости для неразрушающего контроля механических напряжений в деталях машин // Вестник научно-технического развития. 2010. No. 4. pp. 18 – 28.

153. ГОСТ Р 52731-2007. Контроль неразрушающий. Акустический метод контроля механических напряжений. Общие требования. М.: Стандартиформ, 2007. 7 pp.
154. Nedin R.D., Dudarev V.V., Vatulyan A.O. Some aspects of modeling and identification of inhomogeneous residual stress // *Engineering structures*, Vol. 151, 2017. pp. 391-405.
155. Nedin R.D., Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Bogachev I.V. Detection of nonuniform residual strain in a pipe // *International journal of solids and structures*, Vol. 139-140, 2018. pp. 121-128.
156. Бобылев А.В. Коррозионное растрескивание латуни. М.: Metallurgizdat, 1956. 126 pp.
157. ГОСТ Р 52891-2007. Контроль остаточных технологических напряжений методом лазерной интерферометрии. Общие требования. М.: Стандартиформ, 2007. 7 pp.
158. ГОСТ 30415-96. Сталь. Неразрушающий контроль механических свойств и микроструктуры металлопродукции магнитным методом. Минск: ИПК Издательство стандартов, 1996. 11 pp.
159. ГОСТ 32207-2013. Колёса железнодорожного подвижного состава. Методы определения остаточных напряжений. М.: Стандартиформ, 2014. 16 pp.
160. Schajer G.S. Compact Calibration Data for Hole-Drilling Residual Stress Measurements in Finite-Thickness Specimens // *Experimental Mechanics*, No. 60, 2020. pp. 665–678.
161. Schajer G.S. Universal Calibration Constants for Strain Gauge Hole-Drilling Residual Stress Measurements // *Experimental Mechanics*, No. 62, 2022. pp. 351–358.
162. Wern H. Finite-element solutions for mechanical drilling methods: A new integral formalism // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1995. No. 63. pp. 365-372.
163. Petrucci G., Scafidi M. A new procedure for the evaluation of residual stresses by the hole drilling method based on newton-raphson technique // *JCPDS-International Centre for Diffraction Data*. 2009. pp. 643-650.

164. Махутов Н.А., Разумовский И.А. Методы анализа полей остаточных напряжений в пространственных деталях // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2017. Vol. 83. No. 1. pp. 56-64.
165. ANSYS Inc. Release 2021R1 Documentation for ANSYS. 2021.
166. Ke-Ming Z., She-Xu Z., Ju-Bing, C. Improvement of Finite Element Analysis of Calibration Coefficients for Holedrilling Method by General Axisymmetric Elements // Journal of the Chinese Society of Mechanical Engineers. 2015. Vol. 36. No. 4. pp. 323-332.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Листинг программы для вычисления базовых функций для неоднородных по глубине остаточных напряжений (п. 3.2.3)

Интерпретатор: ANSYS APDL, протестированная версия 2021R2. Комментарии начинаются с символа “!”.

```

!Global Input Parameters
hole_radius=1                                !Hole Radius
model_radius=65                              !Model Radius
result_radius=10                             !End-radius of Results
min_hole_depth=0.1                           !Min Hole Depth
max_hole_depth=10                            !Max Hole Depth
model_height=65                               !Model Height
hole_depth_step=min_hole_depth               !Hole Depth Step
elsize=min_hole_depth                        !Element Size
pressure_value=100                           !Applied Pressure
elastic_modulus=2e5                           !Young's modulus
poisson_ratio=0.3                            !Poisson's ratio
use_iterative=1                               !1=Use PCG-solver // Else=Sparse

!Global Calculated Parameters
pi=ACOS(-1)
lame_lambda=poisson_ratio*elastic_modulus/((1+poisson_ratio)*(1-
2*poisson_ratio))
lame_mu=elastic_modulus/(2*(1+poisson_ratio))
total_steps=((max_hole_depth-
min_hole_depth)/hole_depth_step+1)*((max_hole_depth-
min_hole_depth)/hole_depth_step+2)/2
force_value=hole_radius*pi*pressure_value*hole_depth_step/6

!Model
/PREP7
ET,1,PLANE83                                !Axiharmonic elements
MP,EX,1,elastic_modulus                     !Young's modulus
MP,NUXY,1,poisson_ratio                      !Poisson's ratio
RECTNG,0,model_radius,0,model_height
RECTNG,0,hole_radius,0,model_height
*DO,heghth,hole_depth_step,max_hole_depth,hole_depth_step
    RECTNG,0,model_radius,model_height-heghth,model_height
*ENDDO
APTN,ALL
ESIZE,elsize
MSHKEY,1
AMESH,ALL
SELTOL,elsize/100

```

```

NSEL,S,LOC,X,0
D,ALL,UX,0
NSEL,R,LOC,Y,0
D,ALL,UY,0
NSEL,S,LOC,X,model_radius
NSEL,R,LOC,Y,0
D,ALL,UZ,0
NSEL,S,LOC,Y,model_height
NSEL,R,LOC,X,hole_radius,result_radius
*GET,nodes_for_result,NODE,,COUNT
!Result Tables Structure:
!(1,j>1) = Current Hole Depth
!(2,j>1) = Current Layer Depth
!(i>2,1) = Point Radius
!(i>2,j>1) = Displacement
*DIM,UP,ARRAY,nodes_for_result+2,total_steps+1
*DIM,UQ,ARRAY,nodes_for_result+2,total_steps+1
*DIM,VQ,ARRAY,nodes_for_result+2,total_steps+1
!Dedimensioning:
!u = 4*u*lamе_mu/(hole_radius*pressure_value*hole_depth_step)
!r = r/hole_radius
!h=h/hole_radius
!z=z/hole_radius
*DO,node_num,1,nodes_for_result,1
    current_node=NODE(hole_radius,model_height,0)
    UP(node_num+2,1)=NX(current_node)/hole_radius
    UQ(node_num+2,1)=NX(current_node)/hole_radius
    VQ(node_num+2,1)=NX(current_node)/hole_radius
    NSEL,U,NODE,,current_node
*ENDDO
ALLSEL
column_number=1

*DO,hole_depth,min_hole_depth,max_hole_depth,hole_depth_step
    /PREP7
    ASEL,S,LOC,X,0,hole_radius
    ASEL,R,LOC,Y,model_height-hole_depth,model_height
    ACLEAR,ALL
    ALLSEL
    *DO,layer_depth,hole_depth_step,hole_depth,hole_depth_step
        column_number=column_number+1
        UP(1,column_number)=hole_depth/hole_radius
        UQ(1,column_number)=hole_depth/hole_radius
        VQ(1,column_number)=hole_depth/hole_radius
        UP(2,column_number)=layer_depth/hole_radius
        UQ(2,column_number)=layer_depth/hole_radius
        VQ(2,column_number)=layer_depth/hole_radius
    /SOLU

```



```

!P-mode (Axisymmetric)
FDELE,ALL
TIME,1
MODE,0
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth,0),FX,force_value
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth+hole_depth_step,0),FX,force_value
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth+0.5*hole_depth_step,0),FX,4*force_value
*IF,use_iterative,EQ,1,THEN
EQSLV,PCG
*ELSE
EQSLV,SPARSE
*ENDIF
SOLVE
FINISH

/POST1
SET,1,1,,,,0
*DO,node_counter,1,nodes_for_result,1

node_number=NODE(UP(node_counter+2,1),model_height,0)

UP(node_counter+2,column_number)=UX(node_number)*4*lame_mu/(ho
le_radius*pressure_value*hole_depth_step)
*ENDDO
FINISH

/SOLU
!Q-mode (COS(2teta))
FDELE,ALL
TIME,1
MODE,2,1
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth,0),FX,force_value
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth+hole_depth_step,0),FX,force_value
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth+0.5*hole_depth_step,0),FX,4*force_value
F,NODE(hole_radius,model_height-layer_depth,0),FZ,-
force_value
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth+hole_depth_step,0),FZ,-force_value
F,NODE(hole_radius,model_height-
layer_depth+0.5*hole_depth_step,0),FZ,-4*force_value
*IF,use_iterative,EQ,1,THEN
EQSLV,PCG
*ELSE

```

```

        EQSLV, SPARSE
    *ENDIF
    SOLVE
    FINISH

    /POST1
    SET, 1, 1, , , , 0
    *DO, node_counter, 1, nodes_for_result, 1

        node_number=NODE (UP (node_counter+2, 1), model_height, 0)

        UQ (node_counter+2, column_number) = UX (node_number) * 4 * lame_mu / (hole_radius * pressure_value * hole_depth_step)
    *ENDDO
    SET, 1, 1, , , , 45
    *DO, node_counter, 1, nodes_for_result, 1

        node_number=NODE (UP (node_counter+2, 1), model_height, 0)

        VQ (node_counter+2, column_number) = UZ (node_number) * 4 * lame_mu / (hole_radius * pressure_value * hole_depth_step)
    *ENDDO
    FINISH
    *ENDDO
*ENDDO

/OUTPUT, writer
/COM, *MWRITE, UP, UP, csv
/COM, (%total_steps+2%(1x, G20.13))
/COM, *MWRITE, UQ, UQ, csv
/COM, (%total_steps+2%(1x, G20.13))
/COM, *MWRITE, VQ, VQ, csv
/COM, (%total_steps+2%(1x, G20.13))
/OUTPUT

/INPUT, writer
/DEL, writer

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Листинг программы для вычисления напряжений по результатам измерения перемещений (п. 3.2.4) и проведения тестов точности (п. 3.2.5)

Интерпретатор: Python, протестированная версия 3.9.12. Используемые внешние библиотеки: Pandas 1.4.2, NumPy 1.21.5, SciPy 1.7.3, Matplotlib 3.5.1, Plotly 5.6.0. Комментарии начинаются с символа “#”.

```
#загрузка необходимых библиотек
import pandas as pd
import numpy as np
import scipy as sp
import math

from matplotlib import pyplot as plt
from plotly.offline import download_plotlyjs, init_notebook_mode,
plot, iplot
import plotly.graph_objects as go
from plotly.subplots import make_subplots
%matplotlib inline
init_notebook_mode()

#адрес директории с данными
data_path_new = 'X:\xxxxxx'

up = pd.read_csv(data_path_new + r'\UP.csv', header = [0, 1],
delim_whitespace = True, index_col=0)
uq = pd.read_csv(data_path_new + r'\UQ.csv', header = [0, 1],
delim_whitespace = True, index_col=0)
vq = pd.read_csv(data_path_new + r'\VQ.csv', header = [0, 1],
delim_whitespace = True, index_col=0)

def columns_to_float(df, col_names, ind_name):
    df.columns =
df.columns.set_levels(df.columns.levels[0].astype(float), level=0)
    df.columns =
df.columns.set_levels(df.columns.levels[1].astype(float), level=1)
    df.columns.names = col_names
    df.index.name = ind_name
    return df

up = columns_to_float(up, ('h', 'z'), 'r')
uq = columns_to_float(uq, ('h', 'z'), 'r')
vq = columns_to_float(vq, ('h', 'z'), 'r')

upsum = 0.1 * up.groupby(axis=1, level=0).sum()
```

```

uqsum = 0.1 * uq.groupby(axis=1, level=0).sum()
vqsum = 0.1 * vq.groupby(axis=1, level=0).sum()

#загрузка тестовых данных
h_max = 20
layers = 100
nodes_coordinates = pd.read_csv(data_path_new + r'\nodes.csv',
header=None, delim_whitespace = True, index_col=0)
nodes_coordinates.columns = ['r', 'theta_deg']
nodes_coordinates.index.names = ['node #']

exp_u = pd.read_csv(data_path_new + r'\UV.csv', header=None,
delim_whitespace = True)[:len(nodes_coordinates)]
exp_u.index = nodes_coordinates.index
exp_u.columns = np.linspace(0, h_max, layers + 1)
exp_u.columns.names = ['h']

exp_v = pd.read_csv(data_path_new + r'\UV.csv', header=None,
delim_whitespace = True)[len(nodes_coordinates):]
exp_v.index = nodes_coordinates.index
exp_v.columns = np.linspace(0, h_max, layers + 1)
exp_v.columns.names = ['h']

true_stress = pd.read_csv(data_path_new + r'\true_stress.csv',
header=None, delim_whitespace = True)
true_stress.columns = ['miss1', 'miss2', '-s', 's', 'sx', 'sy',
'txy', 'miss3']
true_stress = true_stress.set_index('s')
true_stress = true_stress[['sx', 'sy', 'txy']]

r0 = nodes_coordinates.r.values.min()

#упругие константы материала
E = 2e11
nu = 0.3
mu = E / (2*(1+nu))

def surf_plot(df, colors='rainbow', scale=False, name='values',
title=None, pdf=None):

    surf = go.Figure(data=[go.Surface(x=df.columns.values,
y=df.index.values,
z=df.values,
colorscale=colors,
showscale=False)])

    surf.update_layout(autosize=True, height=1000, width=1000,
template='none')

```

```

surf.update_traces(hidesurface=False, contours_x_show=True,
contours_x_color='#000',
                    contours_y_show=True,
contours_y_color='#000',
                    contours_z_color='#000',
contours_z_show=True)
    if pdf is not None:
        surf.add_trace(go.Scatter3d(x=np.tile(pdf.columns.values,
len(pdf.index.values)),
                                   y=np.repeat(pdf.index.values,
len(pdf.columns.values)),
                                   z=pdf.values.flatten(),
                                   mode='markers',
                                   marker=dict(
                                       size=4,
                                       color=pdf.values.flatten(),
                                       colorscale='gray',
                                       opacity=0.8)))

    surf.update_layout(scene = dict(xaxis_title=df.index.name,
yaxis_title=df.columns.name, zaxis_title=name),
                        font_size=14, title=title)

    surf.show()
    return surf

def plot_stress(stress, true_stress, ylimits, xlim):
    plt.rcParams.update({'font.size': 16})
    fig, axs = plt.subplots(1, 3, figsize=(15, 6))

    axs[0].bar((stress.index.values * 1000), stress[0].values /
1e6, 2e-1, edgecolor='k', linewidth=1, fill=False,
label='Восстановленные значения')
    axs[0].plot((true_stress.index.values * 1000),
true_stress['sx'].values / 1e6, linewidth=2, color='k',
label='Точное решение')
    axs[0].set_title(r'\sigma_{x}')
    axs[0].set_ylim(ylimits[0], ylimits[1])
    axs[0].set_xlim(0, xlim)
    axs[0].set_xlabel('h, мм')
    axs[0].set_ylabel('Напряжения, МПа')

    axs[1].bar((stress.index.values * 1000), stress[1].values /
1e6, 2e-1, edgecolor='k', linewidth=1, fill=False,
label='Восстановленные значения')
    axs[1].plot((true_stress.index.values * 1000),
true_stress['sy'].values / 1e6, linewidth=2, color='k',
label='Точное решение')
    axs[1].set_title(r'\sigma_{y}')
    axs[1].set_ylim(ylimits[2], ylimits[3])

```

```

    axs[1].set_xlim(0, xlim)
    axs[1].set_xlabel('h, мм')
    axs[1].set_ylabel('Напряжения, МПа')

    axs[2].bar((stress.index.values * 1000), stress[2].values /
1e6, 2e-1, edgecolor='k', linewidth=1, fill=False,
label='Восстановленные значения')
    axs[2].plot((true_stress.index.values * 1000),
true_stress['txy'].values / 1e6, linewidth=2, color='k',
label='Точное решение')
    axs[2].set_title(r'$\tau_{xy}$')
    axs[2].set_ylim(ylimits[4], ylimits[5])
    axs[2].set_xlim(0, xlim)
    axs[2].set_xlabel('h, мм')
    axs[2].set_ylabel('Напряжения, МПа')

plt.tight_layout()
plt.show()

u = exp_u.iloc[:, 1:].sub(exp_u[0], axis=0) / r0
v = exp_v.iloc[:, 1:].sub(exp_v[0], axis=0) / r0
u = u[u.columns[u.columns <= up.columns.levels[0].max()]]
v = v[v.columns[v.columns <= up.columns.levels[0].max()]]

def get_coefficient_simple(df, h):

    df_even =
df.drop(columns=df.columns.levels[0][~df.columns.levels[0].isin(h)]
, level=0).iloc[:, 1::2]
    df_uneven =
df.drop(columns=df.columns.levels[0][~df.columns.levels[0].isin(h)]
, level=0).iloc[:, ::2]

    df_even =
df_even.mul((df_even.columns.remove_unused_levels().get_level_value
s(1) -
df_uneven.columns.remove_unused_levels().get_level_values(1)).value
s, axis=1)

    mask =
(df_uneven.columns.remove_unused_levels().get_level_values(1).value
s ==
df_uneven.columns.remove_unused_levels().get_level_values(1).values
.min())

```

```

df_uneven = df_uneven.mul((mask *
df_uneven.columns.remove_unused_levels().get_level_values(1).values
+
~mask *
(df_uneven.columns.remove_unused_levels().get_level_values(1).value
s -
np.roll(df_even.columns.remove_unused_levels().get_level_values(1).
values, 1))),
axis=1)

df_uneven.columns = df_even.columns
return df_even + df_uneven

def spline_intepolation(i, df):
    int_df = pd.DataFrame(index=np.unique(i),
columns=df.columns)
    for column in df.columns:
        spline =
sp.interpolate.splrep(df[column].sort_index().index,
df[column].sort_index().values, s=0)
int_df[column] =
sp.interpolate.splev(int_df.index.values, spline, der=0)
return int_df.drop_duplicates().sort_index()

up_coef = spline_intepolation(nodes_coordinates['r'].values/r0,
get_coefficient_simple(up, np.around(u.columns.values, 2)))
uq_coef = spline_intepolation(nodes_coordinates['r'].values/r0,
get_coefficient_simple(uq, np.around(u.columns.values, 2)))
vq_coef = spline_intepolation(nodes_coordinates['r'].values/r0,
get_coefficient_simple(vq, np.around(u.columns.values, 2)))

def coef_calc(r, theta, h, z2, kind, u_p, u_q, v_q, r_dict,
h_z_dict, mu=1, degrees=True):
    up = u_p.iloc[r_dict[r], h_z_dict[(h, z2)]]
    uq = u_q.iloc[r_dict[r], h_z_dict[(h, z2)]]
    vq = v_q.iloc[r_dict[r], h_z_dict[(h, z2)]]

    if degrees:
        theta = theta * math.pi / 180

    if kind == 'c':
        return math.cos(theta) * (up - uq - 2 * vq + 2 *
((math.cos(theta))**2) * (uq + vq)) / (4 * mu)
    elif kind == 's':
        return math.sin(theta) * (up + uq + 2 * vq - 2 *
((math.sin(theta))**2) * (uq + vq)) / (4 * mu)

```

```

elif kind == 't1':
    return math.sin(theta) * (2 * uq + vq - 2 *
((math.sin(theta))**2) * (uq + vq)) / (2 * mu)
elif kind == 't2':
    return math.cos(theta) * (2 * uq + vq - 2 *
((math.cos(theta))**2) * (uq + vq)) / (2 * mu)
else:
    return 0

def form_matrix(u_r, u_theta, u_h, v_r, v_theta, v_h, u_p, u_q,
v_q, mu=1, addu0=True):

    i = 0
    step = 3
    h = np.sort(np.unique(np.concatenate([u_h, v_h])))
    if addu0:
        step = 5
    matrix = np.zeros((u_r.size + v_r.size, len(h) * step))

    r_dict = {}
    for k, rad in enumerate(u_p.index):
        r_dict[rad] = k

    h_z_dict = {}
    for k, h_z in enumerate(u_p.columns):
        h_z_dict[h_z] = k

    for radius, angle, depth in zip(u_r, u_theta, u_h):
        for j, z2 in enumerate(h):
            if z2 <= depth:
                matrix[i, step * j] = coef_calc(radius, angle,
round(depth, 2), round(z2, 2), 'c', u_p, u_q, v_q,
r_dict=r_dict,
h_z_dict=h_z_dict, mu=mu, degrees=True)

                matrix[i, step * j + 1] = - coef_calc(radius, angle
- 90, round(depth, 2), round(z2, 2), 's', u_p, u_q, v_q,
r_dict=r_dict, h_z_dict=h_z_dict, mu=mu, degrees=True)

                matrix[i, step * j + 2] = coef_calc(radius, angle,
round(depth, 2), round(z2, 2), 't1', u_p, u_q, v_q,
r_dict=r_dict,
h_z_dict=h_z_dict, mu=mu, degrees=True)

            if addu0:

```



```

matrix[i, step * j + 3] = 1

i += 1

for radius, angle, depth in zip(v_r, v_theta, v_h):
    for j, z2 in enumerate(h):
        if z2 <= depth:
            matrix[i, step * j] = coef_calc(radius, angle,
round(depth, 2), round(z2, 2), 's', u_p, u_q, v_q,
r_dict=r_dict,
h_z_dict=h_z_dict, mu=mu, degrees=True)

            matrix[i, step * j + 1] = coef_calc(radius, angle -
90, round(depth, 2), round(z2, 2), 'c', u_p, u_q, v_q,
r_dict=r_dict,
h_z_dict=h_z_dict, mu=mu, degrees=True)

            matrix[i, step * j + 2] = coef_calc(radius, angle,
round(depth, 2), round(z2, 2), 't2', u_p, u_q, v_q,
r_dict=r_dict,
h_z_dict=h_z_dict, mu=mu, degrees=True)

            if addu0:
                matrix[i, step * j + 4] = 1

i += 1

return matrix

def average_metrics(n, matrix, displacements, noise_level,
true_stress):
    metrics = pd.DataFrame(index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(), 0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
    metrics['avg'] = 0
    for i in range(n):
        stress = np.linalg.lstsq(matrix,
displacements +
np.random.normal(loc=0.0, scale=noise_level,
size=len(displacements)),
rcond=None)[0]
        stress.resize((40, 3))
        stress = pd.DataFrame(data=stress, index=metrics.index)
        df = pd.DataFrame(index=stress.index)
        df['restored'] = (((stress[0] - stress[1])**2 +
stress[0]**2 + stress[1]**2 + 6*stress[2]**2)/2)**0.5
        df['true'] = spline_intepolation(stress.index,
(((true_stress['sx']

```

```

true_stress['sy']**2
+ true_stress['sx']**2
+ true_stress['sy']**2
+
6*true_stress['txy']**2)/2)**0.5).to_frame())
    df['diff'] = df['true'] - df['restored']
    df['squared'] = df['diff']**2
    df['std'] = 0
    for j in range(len(df)):
        df.iloc[j, 4] = (df.head(j + 1)['squared'].sum() / (j +
1))**0.5
        metrics['avg'] = metrics['avg'] + df['std']
    metrics['avg'] = metrics['avg'] / n
    return metrics

def medium_metrics(n, matrix, displacements, noise_level,
true_stress):
    metrics = pd.DataFrame(index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
    metrics['avg'] = 0
    for i in range(n):
        stress = np.linalg.lstsq(matrix,
                                displacements +
np.random.normal(loc=0.0, scale=noise_level,
size=len(displacements)),
                                rcond=None)[0]
        stress.resize((40, 3))
        stress = pd.DataFrame(data=stress, index=metrics.index)
        df = pd.DataFrame(index=stress.index)
        df['restored'] = (((stress[0] - stress[1])**2 +
stress[0]**2 + stress[1]**2 + 6*stress[2]**2)/2)**0.5
        df['true'] = spline_intepolation(stress.index,
                                        (((true_stress['sx']
-
true_stress['sy'])**2
+ true_stress['sx']**2
+ true_stress['sy']**2
+
6*true_stress['txy']**2)/2)**0.5).to_frame())
        df['diff'] = df['true'] - df['restored']
        df['squared'] = df['diff']**2
        metrics['avg'] = metrics['avg'] + df['squared']
    metrics['avg'] = (metrics['avg'] / n)**0.5
    return metrics

u_vec =
pd.DataFrame(u.stack()).join(nodes_coordinates).reset_index().drop(
columns='node #')

```

```

v_vec =
pd.DataFrame(v.stack()).join(nodes_coordinates).reset_index().drop(
columns='node #')

#тесты
full_mtrx = form_matrix(u_vec['r'].values / r0,
                        u_vec['theta_deg'].values,
                        u_vec['h'].values,
                        v_vec['r'].values / r0,
                        v_vec['theta_deg'].values,
                        v_vec['h'].values,
                        up_coef, uq_coef, vq_coef, mu=mu,
addu0=False)
full_disp = np.concatenate([u_vec[0].values, v_vec[0].values])

#тест на незашумлённых данных
sigma = np.linalg.lstsq(full_mtrx, full_disp, rcond=None)[0]
sigma.resize((40, 3))
sigma = pd.DataFrame(data=sigma, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
plot_stress(sigma, true_stress, [-150, 150, -30, 30, -5, 5], 20)
plot_stress(sigma, true_stress, [-150, 100, -20, 30, -5, 5], 5)
metric0 = medium_metrics(1, full_mtrx, full_disp, 0e-6,
true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric0.index * 1000, metric0['avg'].values / 1e6, 'k',
linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 50)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тесты с шумом в данных
#тест с шумом 0.001 мкм
sigma1 = np.linalg.lstsq(full_mtrx, full_disp +
np.random.normal(loc=0.0, scale=1e-6, size=len(full_disp)),
rcond=None)[0]
sigma1.resize((40, 3))
sigma1 = pd.DataFrame(data=sigma1, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
plot_stress(sigma1, true_stress, [-150, 150, -40, 40, -10, 10], 20)
plot_stress(sigma1, true_stress, [-150, 120, -30, 30, -5, 5], 5)
metric1 = medium_metrics(250, full_mtrx, full_disp, 1e-6,
true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))

```

```

plt.plot(metric1.index * 1000, metric1['avg'].values / 1e6, 'k',
linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 50)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тест с шумом 0.005 мкм
sigma5 = np.linalg.lstsq(full_mtrx, full_disp +
np.random.normal(loc=0.0, scale=5e-6, size=len(full_disp)),
rcond=None)[0]
sigma5.resize((40, 3))
sigma5 = pd.DataFrame(data=sigma5, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
plot_stress(sigma5, true_stress, [-150, 150, -80, 80, -40, 40], 20)
plot_stress(sigma5, true_stress, [-150, 120, -40, 30, -10, 10], 5)
metric5 = medium_metrics(250, full_mtrx, full_disp, 5e-6,
true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric5.index * 1000, metric5['avg'].values / 1e6, 'k',
linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 50)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тест с шумом 0.01 мкм
sigma10 = np.linalg.lstsq(full_mtrx, full_disp +
np.random.normal(loc=0.0, scale=10e-6, size=len(full_disp)),
rcond=None)[0]
sigma10.resize((40, 3))
sigma10 = pd.DataFrame(data=sigma10, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
plot_stress(sigma10, true_stress, [-200, 200, -150, 150, -50, 50],
20)
plot_stress(sigma10, true_stress, [-150, 180, -150, 100, -20, 20],
5)
metric10 = medium_metrics(250, full_mtrx, full_disp, 10e-6,
true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric10.index * 1000, metric10['avg'].values / 1e6, 'k',
linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)

```

```

plt.ylim(0, 50)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тест с шумом 0.05 мкм
sigma50 = np.linalg.lstsq(full_mtrx, full_disp +
np.random.normal(loc=0.0, scale=50e-6, size=len(full_disp)),
rcond=None)[0]
sigma50.resize((40, 3))
sigma50 = pd.DataFrame(data=sigma50, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
plot_stress(sigma50, true_stress, [-800, 800, -500, 500, -150,
150], 20)
plot_stress(sigma50, true_stress, [-250, 350, -300, 300, -100,
100], 5)
metric50 = medium_metrics(250, full_mtrx, full_disp, 50e-6,
true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric50.index * 1000, metric50['avg'].values / 1e6, 'k',
linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 50)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тесты с фильтрацией данных
#тест с фильтрацией по порогу чувствительности
u_min = u_vec[(u_vec[0] < -0.00013) | (u_vec[0] > 0.00013)]
print(len(u_min))
v_min = v_vec[(v_vec[0] < -0.00013) | (v_vec[0] > 0.00013)]
print(len(v_min))
print(len(u_vec))

m_min = form_matrix(u_min['r'].values / r0,
                    u_min['theta_deg'].values,
                    u_min['h'].values,
                    v_min['r'].values / r0,
                    v_min['theta_deg'].values,
                    v_min['h'].values,
                    up_coef, uq_coef, vq_coef, mu=mu, addu0=False)
disp_min = np.concatenate([u_min[0].values, v_min[0].values])

```

```

s_min = np.linalg.lstsq(m_min, disp_min + np.random.normal(loc=0.0,
scale=10e-6, size=len(disp_min)), rcond=None)[0]
s_min.resize((40, 3))
s_min = pd.DataFrame(data=s_min, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))

plot_stress(s_min, true_stress, [-250, 250, -200, 200, -100, 100],
20)
plot_stress(s_min, true_stress, [-200, 200, -150, 150, -80, 80], 5)
metric_min = medium_metrics(250, m_min, disp_min, 10e-6,
true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric_min.index * 1000, metric_min['avg'].values / 1e6,
'k', linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 80)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тест с фильтрацией по области деструкции
u_r = u_vec[u_vec['r'] > 0.0013]
print(len(u_r))
v_r = u_vec[u_vec['r'] > 0.0013]
print(len(v_r))
print(len(u_vec))

m_r = form_matrix(u_r['r'].values / r0,
                  u_r['theta_deg'].values,
                  u_r['h'].values,
                  v_r['r'].values / r0,
                  v_r['theta_deg'].values,
                  v_r['h'].values,
                  up_coef, uq_coef, vq_coef, mu=mu, addu0=False)
disp_r = np.concatenate([u_r[0].values, v_r[0].values])

s_r = np.linalg.lstsq(m_r, disp_r + np.random.normal(loc=0.0,
scale=10e-6, size=len(disp_r)), rcond=None)[0]
s_r.resize((40, 3))
s_r = pd.DataFrame(data=s_r, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))

plot_stress(s_r, true_stress, [-250, 250, -200, 200, -100, 100],
20)
plot_stress(s_r, true_stress, [-150, 150, -80, 80, -20, 20], 5)
metric_r = medium_metrics(250, m_r, disp_r, 10e-6, true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})

```

```

plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric_r.index * 1000, metric_r['avg'].values / 1e6, 'k',
linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 80)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тест с фильтрацией по обоим параметрам
u_filter = u_min[u_min['r'] > 0.0013]
print(len(u_filter))
v_filter = v_min[v_min['r'] > 0.0013]
print(len(v_filter))
print(len(u_vec))

m_filter = form_matrix(u_filter['r'].values / r0,
                      u_filter['theta_deg'].values,
                      u_filter['h'].values,
                      v_filter['r'].values / r0,
                      v_filter['theta_deg'].values,
                      v_filter['h'].values,
                      up_coef, uq_coef, vq_coef, mu=mu, addu0=False)
disp_filter = np.concatenate([u_filter[0].values,
                              v_filter[0].values])

s_filter = np.linalg.lstsq(m_filter, disp_filter +
np.random.normal(loc=0.0, scale=10e-6, size=len(disp_filter)),
rcond=None)[0]
s_filter.resize((40, 3))
s_filter = pd.DataFrame(data=s_filter, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(), 0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))
plot_stress(s_r, true_stress, [-250, 250, -200, 200, -100, 100],
20)
plot_stress(s_r, true_stress, [-200, 200, -150, 150, -80, 80], 5)
metric_filter = medium_metrics(250, m_filter, disp_filter, 10e-6,
true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric_filter.index * 1000, metric_filter['avg'].values /
1e6, 'k', linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 80)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

```

```

#тесты на уменьшенных выборках
#тест на 75% данных
m_75 = form_matrix(u_filter.sample(frac=0.75,
random_state=6031769)['r'].values / r0,
                  u_filter.sample(frac=0.75,
random_state=6031769)['theta_deg'].values,
                  u_filter.sample(frac=0.75,
random_state=6031769)['h'].values,
                  v_filter.sample(frac=0.75,
random_state=6031769)['r'].values / r0,
                  v_filter.sample(frac=0.75,
random_state=6031769)['theta_deg'].values,
                  v_filter.sample(frac=0.75,
random_state=6031769)['h'].values,
                  up_coef, uq_coef, vq_coef, mu=mu, addu0=False)
disp_75 = np.concatenate([u_filter.sample(frac=0.75,
random_state=6031769)[0].values,
                          v_filter[0].sample(frac=0.75,
random_state=6031769).values])

s_75 = np.linalg.lstsq(m_75, disp_75 + np.random.normal(loc=0.0,
scale=10e-6, size=len(disp_75)), rcond=None)[0]
s_75.resize((40, 3))
s_75 = pd.DataFrame(data=s_75, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(), 0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))

plot_stress(s_75, true_stress, [-250, 250, -200, 200, -100, 100],
20)
plot_stress(s_75, true_stress, [-200, 200, -150, 150, -80, 80], 5)
metric_75 = medium_metrics(250, m_75, disp_75, 10e-6, true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric_75.index * 1000, metric_75['avg'].values / 1e6,
'k', linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 80)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тест на 50% данных
m_50 = form_matrix(u_filter.sample(frac=0.5,
random_state=6031769)['r'].values / r0,
                  u_filter.sample(frac=0.5,
random_state=6031769)['theta_deg'].values,
                  u_filter.sample(frac=0.5,
random_state=6031769)['h'].values,

```



```

        v_filter.sample(frac=0.5,
random_state=6031769)['r'].values / r0,
        v_filter.sample(frac=0.5,
random_state=6031769)['theta_deg'].values,
        v_filter.sample(frac=0.5,
random_state=6031769)['h'].values,
        up_coef, uq_coef, vq_coef, mu=mu, addu0=False)
disp_50 = np.concatenate([u_filter.sample(frac=0.5,
random_state=6031769)[0].values,
        v_filter[0].sample(frac=0.5,
random_state=6031769).values])

s_50 = np.linalg.lstsq(m_50, disp_50 + np.random.normal(loc=0.0,
scale=10e-6, size=len(disp_50)), rcond=None)[0]
s_50.resize((40, 3))
s_50 = pd.DataFrame(data=s_50, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(),0, 0)[::-1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))

plot_stress(s_50, true_stress, [-250, 250, -200, 200, -100, 100],
20)
plot_stress(s_50, true_stress, [-200, 200, -150, 150, -80, 80], 5)
metric_50 = medium_metrics(250, m_50, disp_50, 10e-6, true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric_50.index * 1000, metric_50['avg'].values / 1e6,
'k', linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 80)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()

#тест на 25% данных
m_25 = form_matrix(u_filter.sample(frac=0.25,
random_state=6031769)['r'].values / r0,
        u_filter.sample(frac=0.25,
random_state=6031769)['theta_deg'].values,
        u_filter.sample(frac=0.25,
random_state=6031769)['h'].values,
        v_filter.sample(frac=0.25,
random_state=6031769)['r'].values / r0,
        v_filter.sample(frac=0.25,
random_state=6031769)['theta_deg'].values,
        v_filter.sample(frac=0.25,
random_state=6031769)['h'].values,
        up_coef, uq_coef, vq_coef, mu=mu, addu0=False)
disp_25 = np.concatenate([u_filter.sample(frac=0.25,
random_state=6031769)[0].values,

```

```
                                v_filter[0].sample(frac=0.25,
random_state=6031769).values])

s_25 = np.linalg.lstsq(m_25, disp_25 + np.random.normal(loc=0.0,
scale=10e-6, size=len(disp_25)), rcond=None)[0]
s_25.resize((40, 3))
s_25 = pd.DataFrame(data=s_25, index=((np.insert(r0 *
u_vec['h'].unique(), 0, 0)[: -1] + r0 * u_vec['h'].unique()) / 2))

plot_stress(s_25, true_stress, [-250, 250, -200, 200, -100, 100],
20)
plot_stress(s_25, true_stress, [-200, 200, -150, 150, -80, 80], 5)
metric_25 = medium_metrics(250, m_25, disp_25, 10e-6, true_stress)
plt.rcParams.update({'font.size': 18})
plt.figure(figsize=(15, 6))
plt.plot(metric_25.index * 1000, metric_25['avg'].values / 1e6,
'k', linewidth=2)
plt.xlim(0, 5)
plt.ylim(0, 80)
plt.xlabel('h, мм')
plt.ylabel('Отклонение, МПа')
plt.grid()
plt.show()
```