

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет  
«К(П)ФУ»

На правах рукописи



Герасимов Олег Владимирович

**Моделирование деформирования образцов из  
неоднородных материалов по данным компьютерной  
томографии**

Специальность 1.1.8.

«Механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
кандидат физико-математических наук, доцент  
Саченков Оскар Александрович

Казань — 2023

## Оглавление

	Стр.
Введение . . . . .	5
<b>Глава 1. Анализ современного состояния исследований в области моделирования образцов из негетогенных материалов . . . . .</b>	<b>16</b>
1.1 Применение методов неразрушающего контроля в расчётах . . . . .	16
1.2 Получение и обработка изображений объектов . . . . .	18
1.2.1 Методы неразрушающего контроля . . . . .	18
1.2.2 Рентгеновская томография . . . . .	20
1.2.3 Нейтронная томография . . . . .	22
1.2.4 Электронная микроскопия . . . . .	24
1.2.5 Акустическая микроскопия . . . . .	25
1.2.6 Лазерно-ультразвуковая структуроскопия . . . . .	26
1.3 Построение расчётной сетки по данным с изображений . . . . .	27
1.3.1 Проблематика . . . . .	27
1.3.2 Концепция . . . . .	29
1.4 Статический расчёт образцов из негетогенных материалов . . . . .	33
1.4.1 Прямое моделирование . . . . .	33
1.4.2 Гомогенизация . . . . .	35
1.4.2.1 Тензор структуры . . . . .	35
1.4.2.2 Представительные объёмные элементы . . . . .	36
1.4.3 Иные подходы . . . . .	39
1.5 Цифровое прототипирование . . . . .	40
1.5.1 Костная ткань как объект негетогенной среды . . . . .	40
1.5.2 Оценка прочности костных органов . . . . .	42
<b>Выводы по главе 1 . . . . .</b>	<b>44</b>
<b>Глава 2. Численное моделирование по данным компьютерной томографии . . . . .</b>	<b>46</b>
2.1 Построение цифрового двойника . . . . .	46
2.1.1 Интерпретация исходных данных сканирования . . . . .	46
2.1.2 Препроцессорная обработка массива значений . . . . .	48

	Стр.
2.2 Построение конечного элемента . . . . .	51
2.2.1 Взвешенное интегрирование локальной матрицы жёсткости	51
2.2.2 Локальное усреднение напряжённо-деформированного состояния . . . . .	54
2.2.3 Локализация элемента расчётной области . . . . .	56
2.2.4 Обоснование применимости метода взвешенного интегрирования . . . . .	61
2.3 Построение конечно-элементного ансамбля . . . . .	68
2.3.1 Неортогональная сетка . . . . .	68
2.3.2 Ортогональная сетка . . . . .	70
2.4 Восстановление механических свойств . . . . .	73
<b>Выводы по главе 2 . . . . .</b>	<b>75</b>
<b>Глава 3. Проведение численных экспериментов . . . . .</b>	<b>77</b>
3.1 Постановка задачи . . . . .	77
3.1.1 Общие положения . . . . .	77
3.1.2 Нотация Фойгта . . . . .	79
3.1.3 Пространственное распределение свойств материала . . . .	79
3.2 Программная реализация алгоритма . . . . .	80
3.3 Сходимость сеточного метода . . . . .	82
3.3.1 Сходимость метода интегрирования . . . . .	82
3.3.1.1 Влияние размера исходного изображения . . . . .	83
3.3.1.2 Влияние геометрии расчётной области . . . . .	87
3.3.2 Сходимость конечно-элементного ансамбля . . . . .	92
3.3.3 Сходимость метода прямого учёта анизотропных свойств .	98
3.3.3.1 Влияние многофазной неоднородности материала	102
3.3.3.2 Влияние структурного распределения материала	107
3.4 Модельные задачи . . . . .	111
3.4.1 Сглаженная аппроксимация геометрии: Испытание на сжатие . . . . .	115
3.4.2 Построение геометрии фильтрацией: Испытание на изгиб .	120
3.4.3 Определение механических параметров . . . . .	128

	Стр.
Выводы по главе 3 . . . . .	139
Заключение . . . . .	141
Список литературы . . . . .	144
Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ . . . . .	174
Приложение Б. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ . . . . .	175
Приложение В. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ . . . . .	176
Приложение Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ . . . . .	177
Приложение Д. Диаграммы нагружения образца к пункту 3.4.3	178



## Введение

Современные подходы к производству материалов негетерогенной структуры определяют необходимость развития методик численного моделирования образцов. Развитие технологии производства композитных материалов предполагает усложнение как процесса создания соответствующих конструкций [86], так и проведения прочностных расчётов [181; 270]. Основным направлением исследований оказывается разработка методов описания механических параметров получаемых моделей и применение их для прогнозирования поведения объектов в условиях действия различных внешних и внутренних силовых факторов [157; 214; 219]. Проведение натуральных экспериментов в этом случае применяется с целью валидации численных методик и в большинстве случаев оказывается трудоёмким и дорогостоящим процессом: исследование образцов костной структуры предполагает их уникальность и исключает возможность физического разрушения.

Наибольшее распространение получили методы, основанные на построении модели по данным с изображения исходного образца. Восстановление топологических особенностей геометрии, а также пространственное распределение механических свойств проводится на основе создания цифрового двойника объекта. Численные методы, реализация которых предполагает такой способ восстановления свойств, называются методами неразрушающего контроля и позволяют выполнять построение моделей с учётом распределения структурных и прочностных особенностей материала [158; 184; 189; 193; 210; 241; 242]. Таким образом, совокупное применение методов численного моделирования и данных цифрового двойника объекта выступает наиболее перспективным и актуальным подходом к расчёту образцов из негетерогенных материалов.

Применение методов неразрушающего контроля получило развитие при исследовании как композитных материалов, процесс производства которых определён техническим прогрессом, так и различного рода биологических объектов, особенностью которых оказывается уникальное распределение структурных свойств. Построение изображений в этом случае может быть основано на методах получения и обработки данных о проницаемости материала в текущем элементе объёма среды. Существующие подходы позволяют получать информацию об объекте с учётом характерных особенностей определяемых

в нём дефектов. Одной из областей, в которых применение методов неразрушающего контроля вызывает наибольший интерес, оказывается клиническая практика, в рамках которой проводятся исследования биологических объектов в виде костных органов [211; 244]. В этом случае объектами изучения выступают пациенты, элементы скелета которых требуют прямого хирургического вмешательства: в качестве неомогенного материала выступает пористая структура, а восстановление изображений может быть реализовано на основе проведения компьютерной томографии образца. Индивидуальность геометрии костных органов и их механических характеристик для каждого человека предполагает возникновение следующих задач численного моделирования: определение размера и формы расчётной сетки, а также вычисление соответствующих элементу среды механических свойств.

На данный момент одним из основных подходов к моделированию образцов из неомогенных материалов выступает проведение гомогенизации исследуемой области. Можно выделить несколько существующих методов, предполагающих рассмотрение подобъёма заданного размера в качестве представительного элемента расчётной сетки. Одним из таких методов выступает построение тензора структуры, определяющего усреднённое направление распределения структурных особенностей среды [140; 149; 150]. Существующие физические соотношения позволяют использовать тензор структуры в расчётах. Недостатком данного подхода выступает необходимость определения значений физических констант на основе проведения натуральных экспериментов. Следующий метод реализует усреднение механических параметров в представительном объёмном элементе характерного размера путём составления системы уравнений по данным численных экспериментов [119; 219]. В этом случае каждый микрообъём среды моделируется отдельной расчётной единицей (конечным элементом), что приводит к увеличенному времени вычислений. Более того, описанные подходы оставляют открытым вопрос сегментации нетривиальной геометрии образца и в большей степени направлены на исследование элементов простой топологической структуры. Таким образом, в данной работе рассматривается новый подход, основанный на методе прямого учёта распределения механических параметров материала по данным с изображений исследуемой среды. В этом случае реализация численного моделирования предполагает применение метода конечных элементов, построение которых проводится взвешенным интегрированием локальной матрицы жёсткости. Значения весовой

функции определяются соответствующими элементами массива компьютерной томографии образца.

Исследования, направленные на изучение методов моделирования образцов из негетогенных материалов, проводятся зарубежными и отечественными учёными: А.А. Карабутов, В.П. Фандеев, Т.Н. Чикова, А.А. Киченко, А.Ф. Федотов, Л.Б. Маслов, Р.А. Каюмов, А.Ю. Акулич, Ю.В. Акулич, А.С. Денисов, И.Ф. Ахтямов, М.В. Банецкий, Н.В. Дедух, Д.М. Пошелок, С.В. Малышкина, В.М. Тверье, Т.В. Колмакова, В.Н. Никитин, Ю.И. Няшин, А.С. Lewis, G. Legrain, R. Paul, G. Maquer, Z.L. Wang, S.C. Cowin, P. Marcian, D. Ulrich, N. Moes, K. Grassie, Y. Khan, S. Gupta, P. Dan, B. Wang, D. Ambrosi, N. Zhang, J. Rice, J. Bowman, A. Sas, A. Sermon, G.H. van Lenthe, C.H. Turner, M. Ruess, K. Becker, Ph.K. Zysset и прочими.

**Целью** данной работы является разработка метода расчёта и оценки напряжённо-деформированного состояния по данным компьютерной томографии образцов из негетогенных материалов, находящихся под действием внешних нагрузок.

Для достижения поставленной цели решались следующие **задачи**:

1. Исследовать актуальные на данный момент времени методы численного моделирования образцов из негетогенных материалов, находящихся под действием внешних нагрузок.
2. Модифицировать определяющие соотношения и применить их при построении конечного элемента, способного учитывать распределение свойств материала по данным с изображений.
3. Разработать метод восстановления расчётной геометрии образца на основе данных о пространственном распределении материала.
4. Выполнить программную реализацию метода статического расчёта по данным компьютерной томографии образцов из негетогенных материалов.
5. Определить степень соответствия полученного представленным методом решения результатам проведения натуральных испытаний.
6. Разработать методику оценки упругих констант негетогенных материалов на основе результатов проведения вычислительных и натуральных экспериментов.

**Научная новизна:**

1. Сформулирован и реализован новый метод расчёта по данным компьютерной томографии образцов из негетомогенных материалов, позволяющий прогнозировать деформирование тел и проводить оценку их напряжённого состояния при внешних нагрузках.
2. Получены основные математические соотношения, определяющие взвешенное интегрирование локальной матрицы жёсткости.
3. Предложена и реализована новая методика восстановления расчётной геометрии образцов на основе учёта пространственного распределения материала по данным с изображений.
4. Разработан алгоритм и его программная реализация для расчёта образцов из негетомогенных материалов методом конечных элементов на основе данных компьютерной томографии.
5. Получены новые результаты решения задач вычислительной механики деформируемого твёрдого тела, полученные на основе применения данных с изображений.
6. Разработана и реализована методика оценки упругих констант негетомогенных материалов на основе результатов проведения вычислительных и натурных экспериментов.

**Теоретическая и практическая значимость.** Теоретическая составляющая результатов диссертационной работы заключается в следующем:

1. Показана состоятельность представленного метода численного моделирования при решении задач вычислительной механики деформируемого твёрдого тела на основе данных с изображений образцов из негетомогенных материалов: выполнена валидация подхода, основанная на сопоставительном анализе полученного решения и результатов проведения натурных экспериментов.
2. Обоснован более высокий уровень технологической составляющей представленного метода на этапе проведения вычислительных экспериментов по сравнению с существующими на данный момент времени аналогичными подходами.
3. Установлено преимущество применения разработанного метода к численному моделированию образцов из негетомогенных материалов с уникальной геометрией и неоднородной структурой.

Практическая составляющая результатов диссертационной работы заключается в следующем:

1. Разработанный метод численного моделирования позволяет прогнозировать поведение образцов из негетерогенных материалов, находящихся под действием внешних нагрузок, и определять их напряжённо-деформированное состояние с учётом пространственного распределения свойств материала, полученного на основе данных с изображений. Подход позволяет проводить статический расчёт материалов с неоднородной структурой, на основе которых могут быть выполнены композитные конструкции или образованы объекты биологического происхождения.
2. Предложенный метод восстановления расчётной геометрии образца на основе пространственного распределения материала позволяет в полуавтоматическом режиме выполнять сегментацию выделенного объёма с заданной точностью. Реализация такого подхода может быть применена при расчёте образцов костных органов в клинической практике.
3. Представленный метод оценки упругих констант негетерогенных материалов позволяет проводить расчёты на основе совместного применения данных вычислительных и натуральных экспериментов и может быть использован при исследовании образцов неоднородной структуры для определения механических свойств образующей ткани.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных задач в диссертационной работе используются методы теории моделирования и вычислительной математики. Применяются основные подходы механики сплошных сред, численных методов и экспериментов. Математическая формулировка моделей соответствует задаче теории упругости в статической постановке. Рассматриваются понятия и принципы методов, лежащих в основе построения цифрового двойника по данным компьютерной томографии. Применяется технология виртуальных инструментов.

Численные расчёты проводились на основе метода конечных элементов. Методика построения расчётных сеток и вычислительный алгоритм реализованы в программном комплексе, написанном на языке программирования *C++*. Метод прямого моделирования применялся для определения сходимости сетки при решении задач с заданными структурными свойствами. Натурные испытания проводились на универсальной разрывной машине «УТС 110М-100».

Сканирование исследуемых образцов выполнялось с применением микро-/нафокусной системы рентгеновского контроля для компьютерной томографии и 2D инспекции *Phoenix V/tome/X S240*.

**Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Численное моделирование образцов из негомогенных материалов, находящихся под действием внешних нагрузок, на основе статического расчёта по данным с изображений.
2. Метод учёта пространственного распределения свойств материала при построении конечного элемента по данным компьютерной томографии.
3. Метод восстановления расчётной геометрии образца по данным с изображений и ассемблирование конечно-элементной сетки.
4. Результаты решения задач вычислительной механики деформируемого твёрдого тела, оценка упругих констант негомогенных материалов на основе совместного применения результатов численного моделирования и натуральных экспериментов.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается корректностью математической постановки задачи теории упругости, применением строгих математических методов, сравнением результатов с известными работами других авторов, а также с данными численного моделирования и физических экспериментов.

**Апробация работы.** Основные положения и полученные в диссертационной работе результаты докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и симпозиумах:

- Ежегодная научно-практическая конференция с международным участием «Вреденовские чтения», Россия, г. Санкт-Петербург, 2018 г.
- XXV Международный научный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Россия, г. Крёмёнки, 2019 г.
- XI Молодёжная конференция по математическому моделированию и информационным технологиям «SMIT», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2019 г.
- Международная научная конференция «European Society of Biomechanics», Австрия, г. Вена, 2019 г.

- Международная молодёжная научная конференция «XXIV Туполевские чтения (школа молодых учёных)», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2019 г.
- XVIII Всероссийская молодёжная школа-конференция «Лобачевские чтения», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2019 г.
- XXVI Международный научный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Россия, г. Крёмёнки, 2020 г.
- Международный научный семинар «Joint Seminar of Kazan Federal University and Kanazawa University on Biomechanics, Optimization and its Related Research», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2020 г.
- XIII Международная конференция «Сеточные методы для краевых задач и приложения», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2020 г.
- XIX Всероссийская молодёжная школа-конференция «Лобачевские чтения», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2020 г.
- XIV Всероссийская конференция с международным участием «Биомеханика», Россия, г. Пермь, 2020 г.
- XXVII Международный научный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Россия, г. Крёмёнки, 2021 г.
- XXII Международная конференция по Вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Россия, Респ. Крым, г. Алушта, 2021 г.
- VII Международная конференция и молодёжная школа «Информационные технологии и нанотехнологии», Россия, г. Самара, 2021 г.
- Международный форум «Kazan Digital Week», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2021 г.
- Международный научный симпозиум «Japan-Russia Online Joint Symposium», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2021 г.
- Международная молодежная научная конференция «XXV Туполевские чтения (школа молодых ученых)», Россия, Респ. Татарстан, г. Казань, 2021 г.
- Международная научная конференция «World Congress on Osteoporosis, Osteoarthritis and Musculoskeletal Diseases», онлайн-формат проведения, Германия, г. Берлин, 2022 г.

- XXVIII Международный научный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Россия, г. Кремёнки, 2022 г.
- VIII Международная конференция и молодёжная школа «Информационные технологии и нанотехнологии», Россия, г. Самара, 2022 г.
- 56-е Ежегодная научная конференция «European Society for Clinical Investigation», Италия, г. Бари, 2022 г.
- X Международная научная молодёжная школа-семинар «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского», Россия, г. Саранск, 2022 г.
- Всероссийская конференция молодых учёных-механиков, Россия, г. Сочи, 2022 г.
- Международная конференция «Математический анализ и его приложения в современной математической физике», Узбекистан, г. Самарканд, 2022 г.
- XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред, Россия, г. Пермь, 2023 г.
- IX Международной конференции и молодежной школы «Информационные технологии и нанотехнологии», Россия, г. Самара, 2023 г.
- XXIX Международный научный симпозиум «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова, Россия, г. Кремёнки, 2023 г.
- Международная научно-практическая конференция «Рахматулинские чтения», Узбекистан, г. Ташкент, 2023 г.
- XXXII Всероссийская конференция «Математическое моделирование в естественных науках», Россия, г. Пермь, 2023 г.
- V Международный форум «Передовые цифровые и производственные технологии», Россия, г. Санкт-Петербург, 2023 г.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 25 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК [25; 43; 45; 55], 4 — в периодических научных журналах, индексируемых *Web of Science* и *Scopus* [25; 43; 55; 112], 4 — в библиографической базе данных научных публикаций *Russian Science Citation Index* [25; 43; 45; 55] и 20 — в те-



зисах докладов [6; 11; 13—15; 26; 27; 29; 39; 44; 46; 48; 53; 54; 56; 58; 78; 102; 143; 220]. Зарегистрированы 4 программы для ЭВМ [60—62; 64].

**Личный вклад.** Автор принимал активное участие в постановке задач, построении математических моделей и проведении численных и натуральных испытаний образцов. Результаты деятельности автора могут быть изложены в следующем:

- проведён обзор литературы и методов моделирования, соответствующих тематике диссертационной работы;
- изучены способы восстановления механических свойств материала на основе данных о пространственном распределении плотности в среде;
- исследовано влияние структурных особенностей материала на прочностные характеристики модели;
- построена модель описания поведения образцов из неомогенных материалов методом прямого учёта распределения свойств материала по данным с изображений;
- представлен подход к статическому расчёту образцов неомогенных сред на основе метода конечных элементов;
- разработан и реализован в виде программного кода численный алгоритм, позволяющий проводить вычисления образцов по данным их компьютерной томографии;
- проведено решение ряда показательных задач с целью верификации численной методики;
- выполнены построение и дальнейший расчёт модельных задач, соответствующих данным физических образцов;
- проведена оценка достоверности результатов моделирования на основе вычисления ошибок энергии;
- выполнена валидация численного метода путём проведения натуральных испытаний костных органов крыс, кроликов и свиней.

В работе [25] автору принадлежит большая часть текста обзоров; Воробьёв О.В. занимался рассмотрением влияния неоднородного распределения материала на основе решения задач в двумерной постановке; Семёнова Е.В. выполняла предварительную обработку изображений, сопоставляла полученные данные с результатами моделирования на основе метода средней длины пересечений, исследовала вопросы построения тензора структуры; Мухин Д.А. реализовывал дискретизацию исходных изображений; Стаценко Е.О. проводил

рентгеновскую компьютерную томографию образцов; Балтина Т.В. предоставляла опытные образцы и определяла научное описание экспериментальных методов биологии. В работе [55] автор выполнял постановку задач биомеханики, занимался вопросами теоретической составляющей исследования, проводил вычислительные эксперименты, выполнял анализ полученных результатов; Бережной Д.В. оказывал помощь в рассмотрении вопросов применимости предложенного в работе метода к образцам из неоднородных двухфазных материалов; Большаков П.В. оказывал консультацию по методам проведения натуральных испытаний, занимался обсуждением современных методов восстановления механических свойств материалов на основе проведения натуральных испытаний, проводил трёхмерное моделирование в современных средах разработки; Стаценко Е.О. занимался получением первичных снимков исследуемых объектов на основе данных компьютерной томографии; Саченков О.А. проводил совместное обсуждение полученных результатов. В работе [112] автор участвовал в проведении натуральных испытаний и занимался обработкой и анализом результатов моделирования; Харин Н.В. и Большаков П.В. исследовали применение методов трёхмерного проектирования и занимались написанием части программного кода; Федянин А.О., Балтин М.Э., Фадеев Ф.О. и Исламов Р.Р. предоставляли опытные образцы для проведения испытаний и выполняли первичную обработку материалов; Стаценко Е.О. занимался сканированием подготовленных образцов методом рентгеновской компьютерной томографии; Балтина Т.В. вносила вклад в составление литературного обзора и занималась структурным описанием типа лабораторных исследований; Саченков О.А. принимал участие в обсуждении результатов, полученных на основе проведения натуральных испытаний, и занимался постпроцессорным анализом сопоставительных данных. В работе [43] автор проводил натурные эксперименты, занимался вопросами приложения граничных условий, выполнял анализ результатов; Рахматулин Р.Р. осуществлял построение расчётных сеток заданной степени дискретизации; Балтина Т.В. и Саченков О.А. принимали участие в определении характера нагружения экспериментальных образцов. В работе [45] автор обеспечивал соответствие приложенных граничных условий при построении численных моделей на основе данных проведения натуральных испытаний, выполнял расчёты результирующих значений механических параметров материала; Рахматулин Р.Р. исследовал вопросы сходимости конечно-элементного ансамбля, выполнял дискретизацию исходной области

изображения; Балтина Т.В. принимала участие в обсуждении полученных результатов; Саченков О.А. оказывал консультацию в вопросах прогнозирования разрушения образцов.

В свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ [60] автор занимался разработкой структуры и интерфейса программы, выполнял написание программного кода; Саченков О.А. участвовал в разработке численного алгоритма; Рахматулин Р.Р. проводил верификацию результатов на примере решения тестовых задач. В свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ [64] автору принадлежит получение определяющих соотношений численного метода и написание программного кода; Саченков О.А. принимал участие в образовании архитектурного дизайна программы; Харин Н.В. выполнял тестирование программных алгоритмов; Шайхутдинова Л.В. исследовала вопросы оптимизации численных методов. В свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ [62] автор занимался реализацией численных алгоритмов и определением функционала программы; Саченков О.А. устанавливал архитектурные особенности программного кода; Балтина Т.В. принимала участие в обсуждении методики исследования биологических объектов по данным с изображений; Семёнова Е.В. занималась изучением алгоритмов обработки трёхмерных массивов значений. В свидетельстве о государственной регистрации программы для ЭВМ [61] автор реализовывал структуру программного кода; Саченков О.А. принимал участие в обсуждении функциональных особенностей программы; Балтина Т.В. оказывала консультацию в вопросах биологической интерпретации численных моделей.

**Объем и структура работы.** Диссертация состоит из введения, 3 глав, заключения и 5 приложений. Полный объём диссертации составляет 181 страницу, включая 79 рисунков и 6 таблиц. Список литературы содержит 276 наименований.

## Глава 1. Анализ современного состояния исследований в области моделирования образцов из негетомогенных материалов

### 1.1 Применение методов неразрушающего контроля в расчётах

Развитие современных технологий создания новых материалов не только повышает качество получаемых изделий и конструкций, но также и ставит вопрос описания их механических свойств. Несмотря на совершенствование экспериментальных методов, данная задача всё ещё остаётся актуальной, так как возникает в силу прогрессивного развития материаловедения, в рамках которого широкое распространение получили технологии производства сложных композиционных материалов, метаматериалов и иных разработок [86]. Структурные элементы, полученные таким образом, могут быть рассмотрены одновременно с точки зрения материала и конструкции, при этом оценка их механических параметров усложняется в силу наличия анизотропии и нелинейности [157; 219]. Таким образом, натурные эксперименты не могут в полной мере решить проблему определения свойств материала, так как оказываются трудоёмкими и дорогостоящими в проведении. Более того, зачастую вышеупомянутые материалы имеют различия во внутренней структуре [89; 108; 114; 152; 174; 192; 240; 247], что приводит к значительному разбросу результирующих значений. В связи с этим в настоящее время развитие получили методы, основанные на совместном применении численного моделирования и обработанных данных цифрового двойника, построенного по изображениям заданной области. В качестве исходного массива значений для реализации такого подхода могут выступать данные компьютерной томографии образца.

На данный момент численное моделирование выступает одним из основных методов проведения расчётов в различных областях научных исследований. В этом случае применение данных компьютерной томографии позволяет производить оценку структурных параметров материала с учётом неравномерного объёмного распределения его свойств, что определяет перспективность подхода при исследовании механических параметров образцов из негетомогенных материалов. Также следует отметить активное развитие аддитивных технологий, оказывающее влияние на постоянное расширение круга задач и совершенство-

вание методик в данном направлении [187; 217]. Таким образом, численное моделирование на основе данных с изображений позволяет не только проводить неразрушающее испытание исследуемого образца с учётом данных о его внутренней структуре, но и прикладывать различные формы нагружения при постоянной внутренней структуре и геометрии.

Моделирование на основе данных компьютерной томографии оказывается применимым по отношению к различным типам материала. В качестве исследуемых структур могут рассматриваться как композиты, так и разного рода многосвязные пористые объекты. В первом случае актуальность исследований может быть объяснена необходимостью в определении свойств элементов различных конструкций, состоящих из слоистых армированных композитных материалов [181; 265; 270]. В работе [181] предлагается к рассмотрению модель для оценки эффективных свойств слоистых композитов (в том числе структур, включающих межфазный слой) на основе метода конечных элементов. В статье [270] исследуются способы расчёта упругих свойств трансверсально-изотропного композита: применимость подхода проверяется на примере кортикальной костной ткани. В публикации [214] основным вопросом является определение эффективных свойств материала с учётом стохастического распределения армирующих волокон в объёме композита.

Рассмотрение многосвязных пористых структур актуально по отношению к ортопедической клинической практике, так как расчёты, полученные на основе изображений костных органов пациентов [211], способны оказать значительное влияние на качество предстоящего лечения [104; 107; 137; 172; 190; 194; 196]. В этом случае на основе цифровой модели органа производится локальная оценка прочности кости как после установки имплантата, так и при различных патологиях [244]. В работах [119; 219] рассматривается применение метода представительного объёмного элемента, позволяющего учитывать нелинейность материала. Комбинирование подхода с данными компьютерной томографии послужило расширению области его применения [36; 100; 182; 196]. Недостатком такого метода оказывается необходимость в проведении значительного количества расчётов, что приводит к высокой трудозатратности вычислений. К другому подходу, аналогично основанному на гомогенизации свойств материала в заданной области, можно отнести построение тензора структуры, определяющего основные направления распределения свойств материала [140; 149; 150]. При проведении расчётов данным способом возникают

сложности в определении физических констант, значения которых вычисляются из результатов натуральных экспериментов. Также существуют иные методы, основанные на учёте неоднородного распределения свойств материала по данным с изображений исследуемых образцов [57; 112; 257].

Таким образом, отсутствие разработанных методов оценки механических параметров неомогенных материалов определяет новизну исследований в данной области, а трудоёмкость существующих на данный момент подходов является причиной перспективного развития способов применения данных с изображений в численных расчётах. Следует отметить, что точность моделирования в этом случае напрямую зависит как от разрешающей способности и чувствительности сканирующего устройства, так и от применимости численного метода, лежащего в основе сопутствующих расчётов. Таким образом, к преимуществам моделирования по данным компьютерной томографии можно отнести не только возможность проведения множества вычислений без разрушения исследуемого образца, но также и активное развитие сканирующих устройств и методов обработки данных с получаемых изображений. В совокупности вышеуказанных факторов применение результатов сканирования в численных экспериментах оказывается наиболее эффективным способом для определения свойств элементов различных технических конструкций и объектов прикладной медицины не только по отношению к комплексности их геометрии, но также и в связи с неравномерным распределением механических параметров материала в объёме.

## **1.2 Получение и обработка изображений объектов**

### **1.2.1 Методы неразрушающего контроля**

Развитие современных методов аддитивного производства [1; 59; 97; 135; 136; 187; 205; 217], а также применение различных композиционных конструкций [157; 174; 181; 214; 219; 265; 270] определяют необходимость в разработке новых подходов к вычислению прочностных свойств образцов из анизотропных материалов. В этом случае важным этапом оказывается всестороннее изучение

вещественного состава и структурных особенностей материала, а также исследование поведения содержащихся фаз в условиях действия заданных граничных условий [193]. Таким образом, актуальным направлением выступает разработка методов описания фазового состава и структуры негомогенных сред, позволяющих с достаточной степенью достоверности осуществлять прогнозирование разрушения образцов из соответствующих материалов.

На сегодняшний день наиболее востребованными задачами оказываются развитие технологий получения новой информации о структуре составляющих компонентов и свойствах многофазных материалов, а также разработка и дополнение существующих методов неразрушающего контроля [158; 184; 189; 193; 210; 241; 242], позволяющих проводить исследования образцов без необходимости в их разрушении. Такой неинвазивный подход в значительной степени повышает достоверность и информативность интересующих с точки зрения расчёта характеристик и предоставляет возможность проведения множественного моделирования образцов из негомогенных материалов на основе полученных усреднённых механических параметров.

Методы неразрушающего контроля могут быть подразделены на категории в зависимости от области проводимых исследований, к которым можно отнести как изучение поверхностных свойств материала (рис. 1.1а), так и определение внутренних параметров среды (рис. 1.1б). Каждый подход обладает своим диапазоном чувствительности, что напрямую связано с требуемым уровнем точности получаемых результатов. Данные особенности определяют различные сферы применения соответствующих методов [40; 76; 120; 223; 263].

К наиболее распространённым методам объёмного исследования материалов следует отнести интроскопические методы неразрушающего контроля (рентгеновская и нейтронная томография) [121; 168; 178; 207; 208; 230; 248], ультразвуковые методы [148; 264], электронную и акустическую микроскопию [96; 109; 224; 226; 246], а также лазерно-ультразвуковую структуроскопию [139; 243; 273].

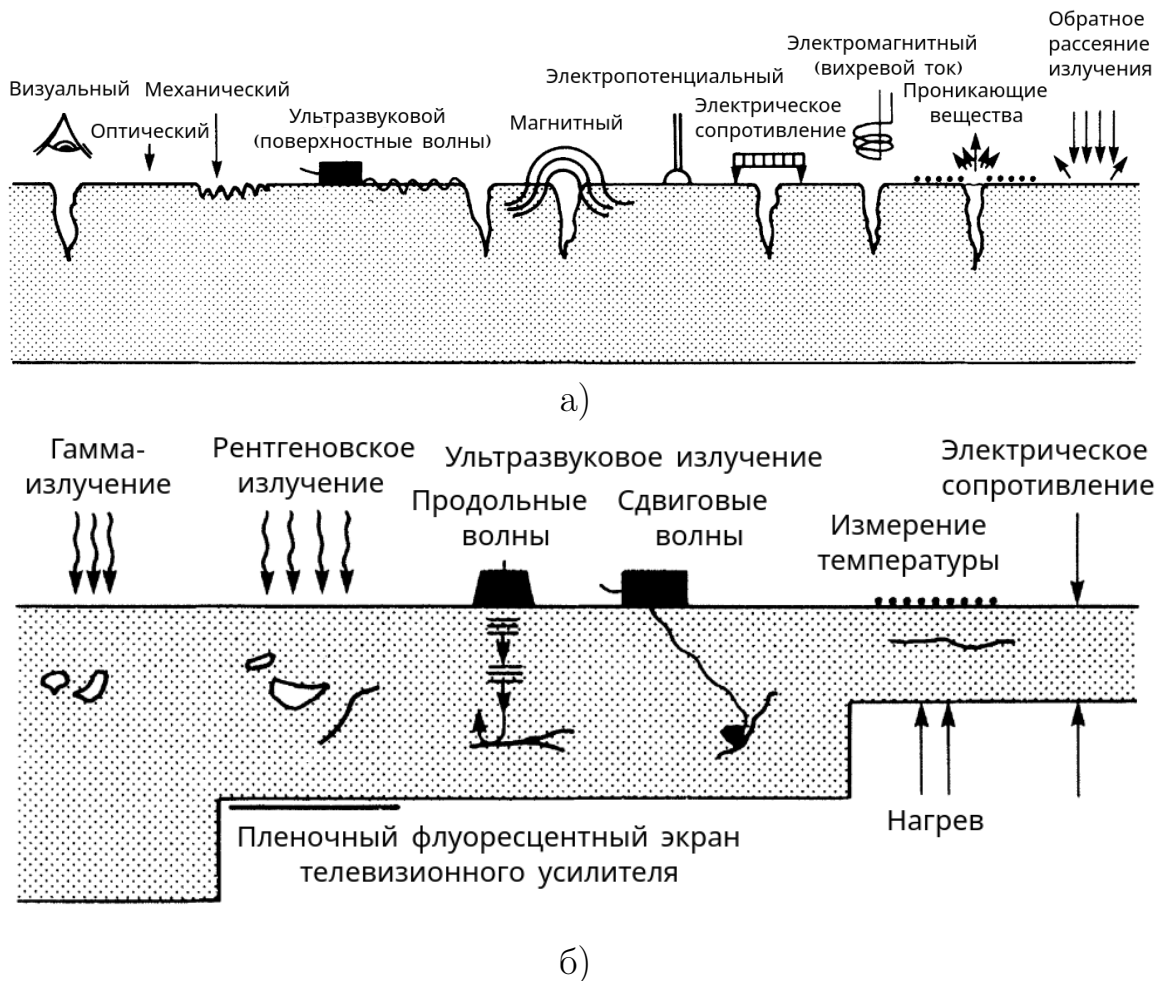


Рисунок 1.1 — Методы неразрушающего контроля: а) и б) — поверхностная и объёмная инспекции, соответственно [242].

### 1.2.2 Рентгеновская томография

Проведение рентгеновской томографии образцов из негетогенных материалов предполагает восстановление пространственного распределения коэффициента линейного ослабления рентгеновского излучения на основе компьютерной обработки проекций слоя вещества, получаемых при просвечивании соответствующим излучением [121; 178; 230]. В этом случае имеется в виду, что каждый слой характеризуется различным по плотности и химическому составу веществом. Результатом такой реконструкции выступает визуализация внутренней трёхмерной микроструктуры материала. Применение данных рентгеновской томографии позволяет определять состав исследуемого объёма среды, а также распределение фаз и локальных дефектов в нём: на основе специ-



ального программного обеспечения вычисляются линейные размеры элементов, их количество, геометрия (сферичность), а также анизотропия.

Рентгеновская томография оказывается значительно более чувствительной к локальным дефектам (неоднородностям), в сравнении с рентгенографией. Разрешающая способность современных микротомографов определяется пространственными размерами вокселя, каждый из которых характеризует некоторое усреднённое значение проницаемости среды в соответствующем микрообъёме. Размер такой элементарной единицы сканирования устанавливается техническими особенностями устройства и составляет порядка десятков микрон (10-200 мкм). Заданная точность сканирования позволяет выделять структурные составляющие анизотропии материала и предоставляет необходимую информацию для возможности усреднения свойств на макроуровне. В качестве особенностей среды могут выступать как различного рода вкрапления иных материалов, так и топологические структуры, определяемые образованием пор или трещин. Неоднородности, оказывающие влияние на неомогенность свойств материала, могут быть выявлены не только в отдельных сечениях, но и по всему объёму исследуемого образца.

Примером применения данных рентгеновской компьютерной томографии может служить исследование образцов пористой структуры. В этом случае характерными особенностями обладает костное вещество, образующее основной материал костных органов скелета. На рисунке 1.2 представлен результат сканирования рассматриваемым методом: восстановление изображения предполагает предварительную программную обработку исходных данных сканирования в узком диапазоне денситометрических показателей («костное окно»). Рисунок 1.2а отображает снимок тазовой области скелета человека, 1.2б – представительный трёхмерный объём костной структуры, позволяющий на основе процесса бинаризации исходного массива по некоторому заданному порогу визуально в явном виде выделить обобщённые фазы ткани (твёрдый трабекулярный материал и вещество в порах). Результаты, полученные в клинической практике на основе применения медицинской рентгеновской компьютерной томографии, позволяют проводить исследования на пациентах, подверженных различного рода патологиям, которые напрямую оказывают влияние на архитектуру строения костей. В этом случае наибольший интерес представляют собой задачи, связанные с определением динамических процессов образования костной ткани у людей с

низким количеством двигательной активности, а также примеры возникновения побочных факторов в виде установки определённых медицинских имплантатов.

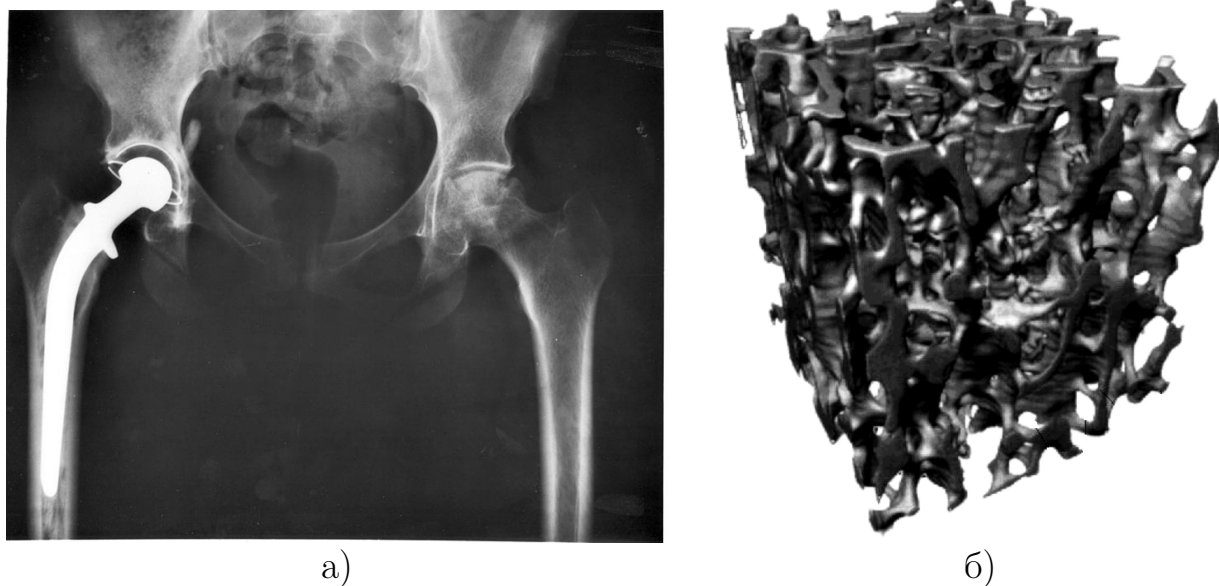


Рисунок 1.2 — Восстановленное по данным рентгеновской компьютерной томографии изображение структуры костного органа: а) — эндопротезирование тазобедренного сустава; б) — элементарный объём костной структуры (бинаризированное изображение).

Недостатками данного подхода выступают как длительность проведения снимков исследуемой области (порядка 3-12 часов, что варьируется мощностью сканирующего устройства), так и невозможность определения неконтрастных для рентгена фаз, что оказывается наиболее актуальным при изучении минеральных пород (сфалерит, кальцит, сера, пирит и другие).

### 1.2.3 Нейтронная томография

В нейтронной рефлектометрии и томографии, в отличие от рентгеновской компьютерной томографии, используются особенности взаимодействия нейтронного излучения с материалом [168; 207; 208]. Применение данного метода оказывается наиболее подходящим для исследования элементов с малым зарядом, так как проявляет себя более чувствительным образом [208]. Такой эффект объясняется тем, что заряд электронной оболочки атома не оказывает

воздействие на амплитуду рассеяния нейтронов, что наблюдается в экспериментах с применением гамма- и рентгеновского излучений. Дополнительным свойством, характеризующим данный метод, оказывается возможность изучения магнитных свойств материала (например, горных пород) в силу наличия у нейтрона магнитного момента. Сравнительно более высокая проникающая способность излучения обосновывается отсутствием заряда у нейтрона и позволяет проводить исследования материалов на большей глубине [208].

Нейтронная томография позволяет восстанавливать объёмную структуру материалов с точностью порядка сотен микрометров за относительно непродолжительное время, измеряемое, как правило, в секундах. На рисунке 1.3 представлены сравнительные снимки, полученные на основе применения различных подходов к сканированию.



Рисунок 1.3 — Результаты гамма- и нейтронного восстановления заданной области (среза).

Важно отметить, что практическое применение данного подхода не является широко применимым в силу относительной недоступности исследовательских ядерных реакторов, требующих для обслуживания многочисленного квалифицированного персонала. Несмотря на данный ряд объективных препятствий, метод нейтронной визуализации получил своё применение в автомобильной, авиационной и строительной промышленности для контроля качества элементов конструкций, при неинвазивном изучении объектов культурного наследия и биологических образцов, в области геологии и физики почвы, а также в различных химических процессах (определение водорода при анализе электрохимических процессов в топливных элементах) и при реализации неразрушающего контроля ядерного топлива и его оболочки в реакторах.

### 1.2.4 Электронная микроскопия

Проведение электронной микроскопии предполагает использование двух форм взаимодействия со сканируемой средой: упругое и неупругое рассеяние электронного пучка. Первое из них позволяет производить построение изображения в просвечивающем электронном микроскопе, что даёт возможность выделения границ различных фаз в структуре материала. Другой тип взаимодействия восстанавливает контраст получаемого изображения при изучении структуры поверхности образцов неомогенных сред в сканирующем устройстве. На данный момент разработаны и используются электронные микроскопы с ускоряющим напряжением в 3 МВ, что позволяет осуществлять наблюдения за объектами толщиной в несколько микрометров. Применение такого подхода послужило основанием для проведения исследований отдельных частиц материалов, что оказалось особенно востребованным при изучении минералов [109; 246]: на рисунке 1.4 представлены снимки поверхности гранитного образца.

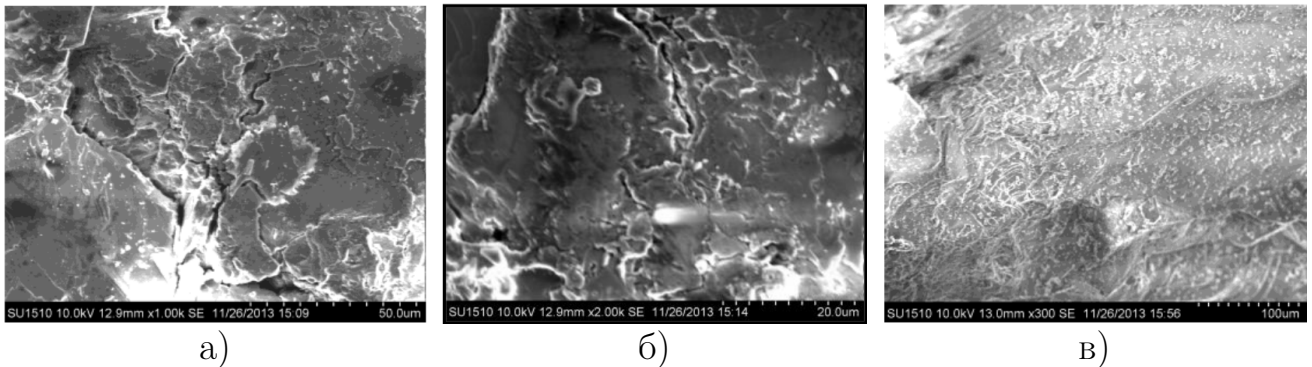


Рисунок 1.4 — Снимки поверхности гранита: а) и б) – микроклин; в) – кварц [175].

Следует отметить, что результаты, полученные путём проведения электронной микроскопии, не являются аналогами существующих методов, а лишь дополняют исследования, проводимые на их основе. Важной особенностью такого подхода оказывается возможность отображения текстуры и структуры материалов в реальном пространстве, исключая необходимость расчёта дифракционных картин.

### 1.2.5 Акустическая микроскопия

Одним из интроскопических методов, интенсивно развивающихся в настоящее время, оказывается сканирующая акустическая микроскопия [96; 109; 224; 226; 246]. Такой подход предоставляет возможность получения акустических изображений, а также позволяет проводить измерения физико-механических параметров различных сред (локальный модуль упругости и коэффициенты вязкости) и исследовать динамические изменения внутренних физико-химических процессов. Сканирование объектов на основе данного метода происходит путём применения акустических волн ультразвукового и гиперзвукового диапазонов частотой от 10 МГц до 3 ГГц. Важно отметить, что разрешающая способность акустических микроскопов сопоставима с разрешением оптических аналогов, но используется скорее для исследований непрозрачных сред. Особенностью данного подхода также оказывается и то, что в условиях воздействия низких температурных полей повышение рабочей частоты ультразвука до десятков гигагерц приводит к приближению разрешающей способности акустических сканирующих устройств к точности электронных микроскопов.



Рисунок 1.5 — Изображение поверхности песчаника, полученное по данным акустической микроскопии (частота – 1 ГГц) [148; 193].

Методология применения акустических сенсоров оказывается востребованной как для изучения локальных свойств геоматериалов [224; 226], так и

при исследованиях поверхностной структуры песчаников (рис. 1.5) [248]. Основными недостатками метода выступают высокая стоимость и относительно небольшая глубина проникновения упругих волн в силу быстрого затухания высоких частот при распространении в негетомогенных средах.

### 1.2.6 Лазерно-ультразвуковая структуроскопия

Применение оптико-акустической диагностики структуры негетомогенных сред предполагает лазерное возбуждение коротких импульсов упругих волн, характеризующееся строго контролируемой формой, и широкополосный пьезоэлектрический приём сигналов, рассеянных неоднородными структурами [74; 224; 264], что выступает одним из основных отличий методологии в сравнении со стандартными ультразвуковыми методами структуроскопии. Таким образом, оптическое излучение имеет свойство поглощаться приповерхностным слоем вещества (твёрдого тела или жидкости), что приводит к расширению области воздействия и генерирует серию акустических волн. Применение наносекундных лазерных импульсов с энергией порядка 300 мДж определяет возникновение упругих волн, характеризующихся амплитудой давления до 10 МПа и продолжительностью не более 100 нс [193].

Лазерно-ультразвуковая структуроскопия может быть применима к исследованию различного рода материалов. Так, на основе квадратичных аппроксимаций функций объёмной пористости образца для разных месторождений возможно провести ускоренную диагностику относительного содержания интересующей породы геоматериала, если её относительная величина не превышает 20 % [74; 164]. Более того, описанная методика измерений предоставляет возможность не только определять микродефекты в негетомогенных средах, но также и визуально восстанавливать внутреннюю структуру образцов, а приводимые структурограммы (рис. 1.6) доказывают эффективность подхода при выполнении исследований над теми дефектами геоматериалов, которые возникают в силу наличия внешних воздействий.

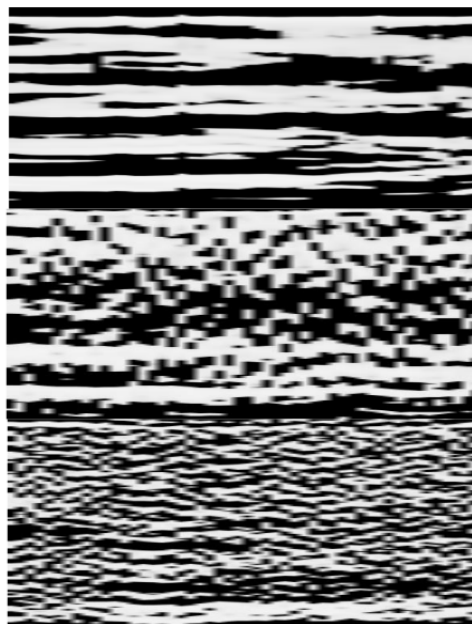


Рисунок 1.6 — Преобразование исходной структуры образца (железистый кварцит, верхний слой) под воздействием электромагнитных импульсов (увеличение плотности энергии от среднего слоя к нижнему).

### 1.3 Построение расчётной сетки по данным с изображений

#### 1.3.1 Проблематика

Актуальной проблемой применения методов статического расчёта элементов неомогенных сред выступает построение расчётной сетки, в основе геометрии которой лежит учёт данных о распределении структурных и механических особенностей материала в образце. В этом случае выбор соответствующего подхода к описанию предполагает не только трудности в реализации относительно уникальных свойств объекта, но также и влечёт за собой необходимость в оценке корректности, достоверности и сходимости применяемых численных методик. Исходя из этого, разработка новых подходов сопровождается описанием и валидацией, что, как правило, содержит не только оценку применимости к индивидуального рода структурам материалов, но также и определение точности получаемых результатов относительно использования приближенных алгоритмов вычислений к предлагаемым методикам расчётов. Например, в случае прямого моделирования геометрии образца на основе распределения плотности материала, устанавливаемого по данным с изображений

исходной области, оказывается необходимым производить оценку влияния ступенчатого вида оцифрованной сетки (*digitized mesh* — сетка, соответствующая цифровому прототипу) на предполагаемую неточность в расчётах [92]. Подобные исследования представляют собой проведение показательных численных экспериментов в рамках искусственно моделируемых (тестовых) задач. Таким образом, в случае оцифрованной (воксельной) сетки (рис. 1.7) оценка погрешности вычислений определяется путём осуществления тестовых расчётов на основе двумерной модели пустотелой структуры и последующего сравнительного анализа результатов, полученных с применением как сглаженных (*smooth*), так и «ступенчатых» (*jagged*) границ моделируемой области. Проведение подобных оценок оказывается необходимым для дальнейшего объяснения неточности в результатах, полученных на основе расчётов предложенным методом: в общем случае степень соответствия данных численного моделирования действительности определяется влиянием (вкладом) соответствующих «побочных» факторов, представляющих собой особенности применения численных алгоритмов в отношении конкретной задачи. Таким образом, применение того или иного метода моделирования предполагает вариацию лежащих в основе численных алгоритмов, определяющих сходимость подхода к данным математической модели и/или результатам проведения натурального эксперимента.

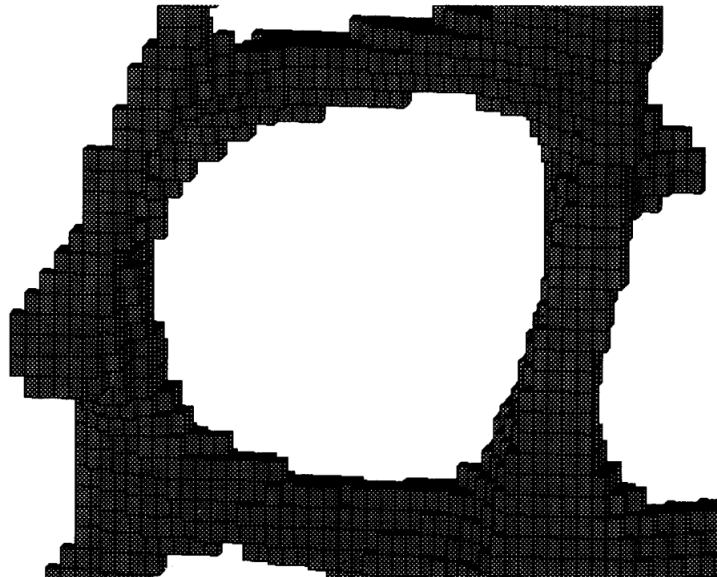


Рисунок 1.7 — Детализированная визуализация конечно-элементной модели, построенной по данным компьютерной томографии проксимального плато большеберцовой кости человека: каждый элемент сетки соответствует вокселю с изображения; масштаб геометрии определяется размером одной трабекулы.



### 1.3.2 Концепция

Наиболее распространённым подходом, применяемым в методах численного моделирования, является выделение геометрии и свойств среды путём обработки данных с изображений, что оказывается необходимым для постановки краевой задачи. Подобная задача сегментации может быть решена на основе одного из существующих численных алгоритмов, в качестве которого могут выступать: метод определения границы (*edge detection*) [132], метод растущего региона (*region growing*) [133], метод омывания границ (*watershed segmentation*) [235], а также метод набора уровней (*level set segmentation*) [131; 160; 228; 268]. Результат процесса сегментации (то есть геометрического и материального описания задачи) совместно со свойствами материала и граничными условиями позволяет выполнить численное моделирование на основе цифрового прототипа испытуемого образца. В этом случае в качестве одной из проблем выступает обработка данных геометрии области в терминах численной дискретизации с предположением о минимизации потерь, возникающих в силу приближений.

На данный момент в литературе существует множество подходов, предполагающих применение данных о микроструктуре с изображений при построении численных моделей. Работы некоторых авторов рассматривают так называемые «реалистичные микроструктуры», создаваемые на основе статистических данных, полученных с изображений исследуемой области [90; 91; 125; 126; 202]. В работах подчёркивается, что классические модели элементарных ячеек, идеализированных микроструктур или какое-либо упрощающее предположение о морфологических характеристиках оказывают влияние на оценку локального напряжённого состояния. Таким образом, необходимым оказывается построение микроструктур, статистически эквивалентных реальным (натурным), что может быть проверено, например, методом сравнения их двухточечных функций корреляции [125; 126].

Иные методы реализованы путём прямого использования изображения. В этом случае задача преобразования данных со скана в конечно-элементные модели оказывается наиболее актуальной в области биомедицины. Построение сетки по данным с изображения является предметом широкого исследования и определяет наличие достаточного количества публикаций [98]. В этом случае

можно выделить две основных ветки развития существующих подходов. Первая из них использует за основу сегментированное изображение, на основе которого выделяются границы объёмов, представляющих интерес. Далее процесс построения сетки предполагает разделение на два этапа. Сначала генерируется модель поверхности относительно полученных границ, а затем она используется в качестве входных данных для построения объёмной сетки. Стоит отметить, что для простых геометрий может быть получена сплошная модель поверхности [87], что предоставляет возможность разбиения сетки шестигранными элементами (например, кубами). В другом случае разделение граничной области происходит методом поверхностной триангуляции [218]: одним из наиболее популярных подходов в этом случае выступает алгоритм «марширующих кубов». Затем происходит построение сетки из четырёхгранников [153; 154; 236; 276].

Второе семейство методов предполагает построение объёмной сетки исключая необходимость в наличии модели поверхности. Данный подход предполагает, что определение границ изображения и построение сетки производятся одновременно. В этом случае предлагается к рассмотрению множество методов: одни работы на основе данного способа посвящены построению сеток из четырёхгранников [94]; иные публикации [98; 167] предполагают разделение подходов на две подгруппы в зависимости от характера генерируемой сетки (структурированная или неструктурированная). Стоит отметить, что сеточные методы рассматриваются как наиболее надёжные и автоматизированные подходы. Преимущественно новыми в этом случае оказываются продвинутое сеточные методики [98], но на данный момент наиболее распространённым выступает подход на основе использования вокселей. Его применение в большей степени совместимо с бинарными изображениями, поскольку построение сетки может происходить автоматически путём преобразования каждого микрообъёма в конечный элемент кубической геометрии [106; 186; 237]. Одним из недостатков воксельного подхода оказывается объём компьютерных вычислений, так как порядок модели соответствует размеру изображения. Данная зависимость определяет необходимость в оптимизации проводимых расчётов, а также повышает требования к вычислительным машинам (возникает необходимость в применении суперкомпьютеров) [93]. В качестве альтернативного подхода может быть использовано сжатие разрешения изображения с целью уменьшения необходимых расчётов модели [95; 191; 274], что влечёт за собой сопутствующие аппроксимации геометрии. Следующим недостатком метода,

основанного на применении вокселей, оказывается наличие «ступенчатых» границ, получаемых для физических поверхностей, что неизбежно приводит к ограничению точности в определении микроскопических напряжений [156; 197]. Одним из решений данной проблемы могут выступать алгоритмы, направленные на сглаживание границ [99; 124; 177; 218; 238].

Также существует другой метод решения, использующий регулярную сетку изображений, который применяется в задачах гомогенизации с периодическими граничными условиями. Данный подход основан на быстрых преобразованиях Фурье [165] и до недавнего времени имел некоторые ограничения в случаях высокой контрастности и нелинейного диапазона, однако недавние исследования позволили повысить его численную эффективность [166; 173; 269].

Сложности в реализации сеточных методов по данным с изображений (за исключением воксельных моделей) возникают при необходимости моделирования объектов, обладающих сложной геометрией и состоящих из нескольких материалов. Таким образом, построение сетки соответственно границе исследуемой области оказывается необходимым требованием (ограничением) в рамках реализации стандартного конечного элемента. Следовательно, наибольший интерес в этом случае представляют собой методы, позволяющие использовать независимую от геометрии сетку [112]. Одним из подходящих подходов оказывается применение композитных конечных элементов [272], в недавнее время адаптированных для вычислений по данным с изображений на основе описания геометрии по набору уровней (*level-set description*) [123]. В рамках данного метода используется структурированная сетка, а построение специальных функций формы основывается на применении некоторой виртуальной сетки, которая описывает границы области или границы раздела материалов. В методе конечных ячеек [176] физическая область погружается в большую покрывающую область упрощённой формы посредством метода фиктивных областей. Таким образом, данная расширенная область наиболее просто подвергается дискретизации, а восстановление границы достигается на основе специальных методов интегрирования. Данный подход также был применён к воксельным моделям [258]. Иной подход, метод конечных покрытий, работает в понятиях математического и физического покрытий [179]. Совокупность математических покрытий образует математическую сетку, которая может быть регулярной, поскольку нет необходимости в соответствии геометрии. Физическое покрытие задаётся как

пересечение математического покрытия и физической области. Аппроксимация переменных поля выражается на физическом покрытии, поэтому может быть введён разрыв, связывающий два физических покрытия с одним математическим. Позже данный метод был также применён к воксельным моделям с наборами уровней [180; 188].

Одновременно с перечисленными методами значительное количество исследований основывалось на концепции «разбиения единицы» (*Partition of Unity*) [171], которая была впервые использована в контексте бессеточных методов [116; 118]. Среди класса подобных методов конечных элементов (основанных на «разбиении единицы») наиболее разработанными представляются «обобщённый» (*Generalized*) метод конечных элементов (GFEM) и «расширенный» (*eXtended*, X-FEM) [249]. Основная идея в этих подходах лежит во введении внутри методики построения конечных элементов подходящих «функций обогащения» (*enrichment functions*) с целью отображения такого рода разрыва, как граница раздела материалов. Идея обобщённого метода конечных элементов была применена к моделированию задач со сложными микроструктурами, заданными явным образом (граница раздела задавалась в явном виде в качестве одномерной или двумерной сетки, независимой от вычислительной) [251; 252]. Методика в дальнейшем получила расширение в рамках использования идеи о численно построенных справочных функциях обогащения, основанных на применении сетки [253; 254]. Данный подход численных справочных элементов был также разработан для решения трёхмерных задач упругости [117]. В отличие от обобщённого, расширенный метод конечных элементов был впервые предложен в качестве решения вопроса перестроения сетки для моделирования распространения трещины в механике линейного упругого разрушения [204; 250]. Такой подход позволяет моделировать разломы [155; 204], включения материалов [88; 183; 199; 203], отверстия [103; 199], а также распространение трещин в неоднородных средах [227] на сетках, свободных от удовлетворения условиям соответствия границам области. Следует отметить, что расширенный подход предполагает использование аналитических функций обогащения. Кроме того, совместное применение расширенного метода конечных элементов с наборами уровней для определения местонахождения разрывов приводит к созданию эффективного и мощного инструмента.

## 1.4 Статический расчёт образцов из негетомогенных материалов

Уникальность образцов из негетомогенных материалов объясняется как неоднородными свойствами материала, так и структурными особенностями его пространственного распределения. Применение таких объектов на практике определяет необходимость в проведении оценки их локальной прочности. На данный момент существуют методы приближенного вычисления механических свойств, позволяющие в дальнейшем использовать полученные данные для определения поведения образцов из негетомогенных материалов в условиях действия внешних нагрузок. Такие подходы предполагают методы прямого моделирования исследуемой области [41; 70; 92; 101; 225], методы гетомогенизации на основе одного из известных подходов [36; 114; 119; 140; 141; 149; 182; 219], а также иные способы описания поведения образцов из негетомогенных материалов [57; 112].

### 1.4.1 Прямое моделирование

В качестве неоднородности распределения механических свойств среды может выступать пористость материала. Одним из характерных объектов изучения в этом случае выступают образцы, предполагающие наличие в своём составе двух фаз среды. Неоднородность свойств в большей степени возникает в силу неравномерного распределения материала в объёме. В общем случае сложность проведения расчётов объясняется как уникальными механическими свойствами образца, так и нетривиальным характером его геометрии. Данные особенности также оказывают значительное влияние на выбор подходящего метода сегментации исходной области для построения расчётной сетки. В этом случае метод прямого моделирования образцов из негетомогенных материалов является наиболее трудоёмким и сложным в реализации, так как необходимым оказывается не только описать расчётную область с достаточной степенью достоверности, но и учесть особенности внутреннего строения. Например, в сечении метафиза бедренной кости крысы (рис. 1.8) сложность представляет собой как аппроксимация внешнего и внутреннего контуров области, так и учёт по-

ристой структуры материала, что определяет многосвязность среды, а также накладывает существенные ограничения на степень дискретизации модели и приводит к усложнению алгоритма моделирования различных фаз костного материала. В этом случае может быть предложен иной подход, основанный на гомогенизации некоторой подобласти путём определения эффективных свойств в заданных координатных осях. Решение задачи предполагает, что некоторой нетривиальной геометрии ставится в соответствие упрощённая область с усреднёнными параметрами, позволяющая производить расчёт с приближенными характеристиками материала. К данному методу можно отнести несколько подходов, обладающих своими преимуществами и недостатками.

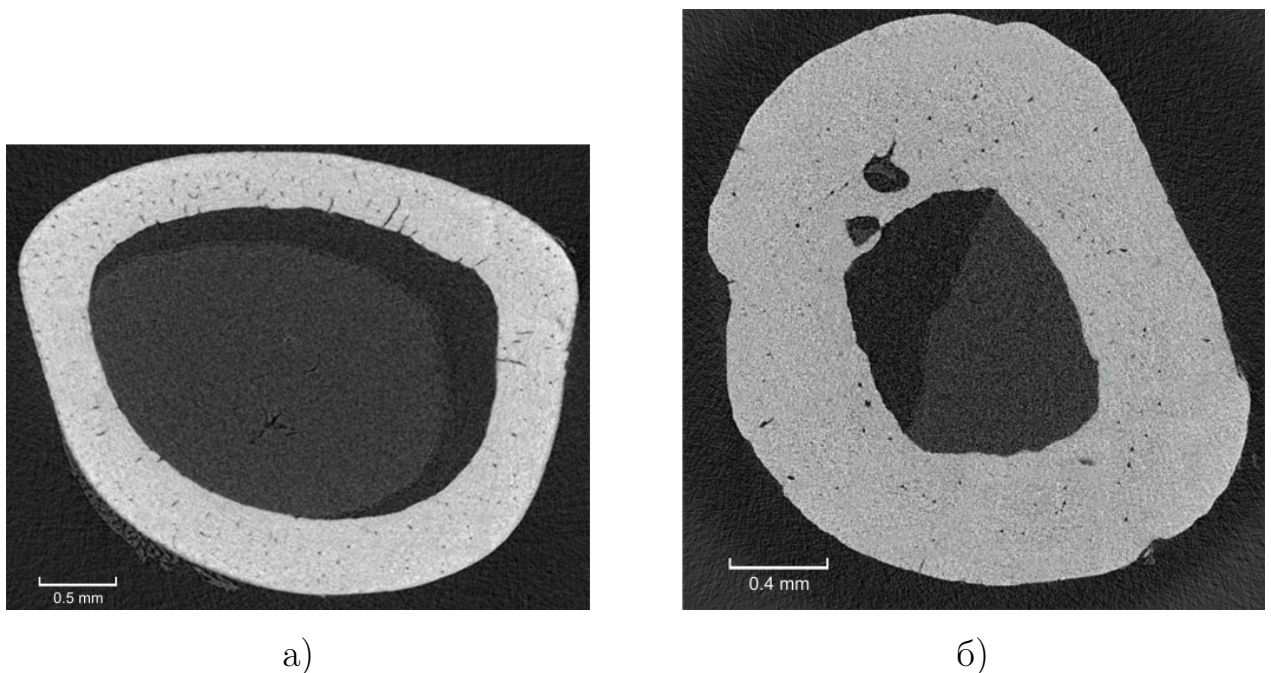


Рисунок 1.8 — Визуализация данных микро-компьютерной томографии в сечениях метафиза бедренных костей лабораторных крыс породы *Wistar*: а) – контрольная группа; б) – моделирование состояния гипогравитации в течение 20 дней (вывешивание животных за хвост в антиортостатическом положении).

## 1.4.2 Гомогенизация

### 1.4.2.1 Тензор структуры

В основе первого подхода, предполагающего гомогенизацию исследуемой области, лежит построение распределения неоднородных свойств методом средней длины пересечений (*Mean Intercept Length*, рис. 1.9а) [200; 201; 245], а также его последующая аппроксимация одним из известных способов (например, методом наименьших квадратов) [68; 82; 85]. В рамках данного подхода физические соотношения формулируются в терминах тензора упругих постоянных и тензора структуры [12; 129; 233], определяющего усреднённое направление осей ортотропии и ориентацию структурных характеристик [140; 149] в элементе заданного материала. Введённый тензор структуры может быть получен на основе алгебраического соотношения связи с тензором анизотропии [85] и, как следствие, представляет собой симметричный положительно определённый тензор второго ранга, которому соответствует некоторая поверхность второго порядка (эллипсоид, рис. 1.9б), называемая характеристической поверхностью тензора [52]. Главные оси тензоров структуры и анизотропии совпадают, а значения их величин определяют анизотропию физических свойств и внутреннего строения материала. Таким образом, компоненты тензора структуры описывают распределение микроструктурных составляющих в многофазных и/или пористых средах [128], а существующие физические соотношения позволяют использовать его в расчётах [114].

Недостатком подхода, реализованного на основе построения тензора структуры, выступает необходимость в проведении значительного количества предварительных вычислений, основанных на эмпирических данных. В этом случае предполагается, что расчёт может быть разделён на несколько этапов. Первым из них оказывается эмпирическое определение физических констант, используемых в расчётных соотношениях. Данные константы необходимо подбирать исходя из материала исследуемого образца [130; 256]. Следующим шагом выступает обработка данных с изображений, сегментация исходной области на расчётную сетку и вычисление в каждом её элементе тензора структуры (тензора анизотропии) согласно распределению материала в среде. Завершающим

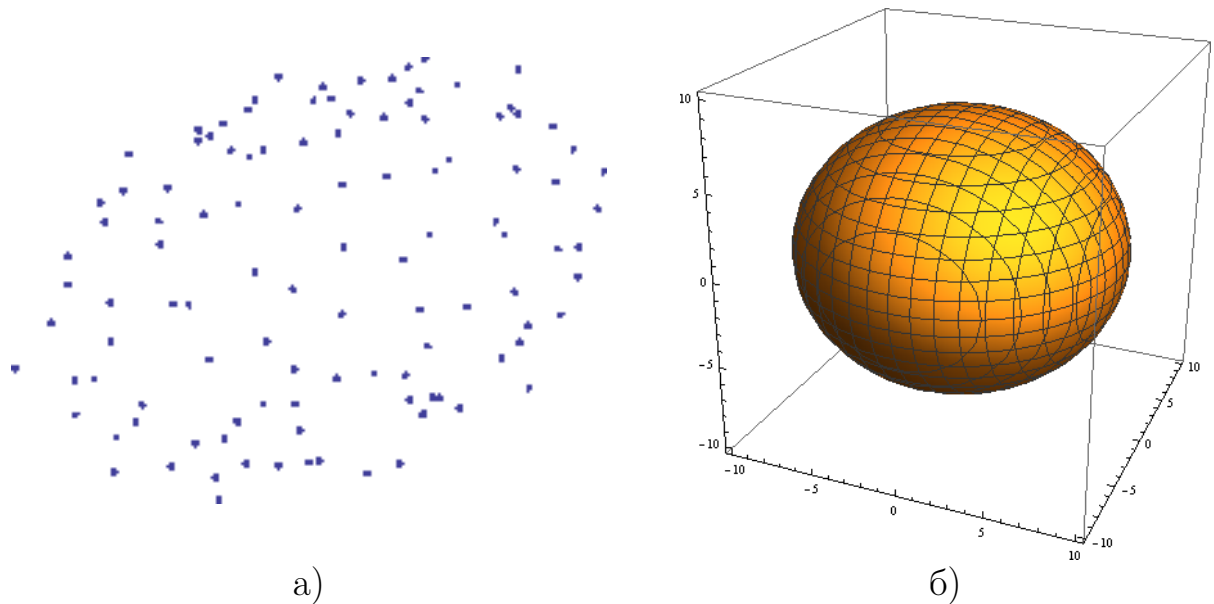


Рисунок 1.9 — Метод средней длины пересечений: а) – пространственное распределение точек, радиус-вектор координат которых определяет структурную неоднородность элемента среды; б) – эллипсоид, определяющий характеристическую поверхность тензора структуры.

этапом выступает применение физических соотношений для определения напряжённо-деформированного состояния в элементе. Стоит отметить, что связь между напряжениями и деформациями в этом случае определяется известными уравнениями зависимости элементов тензора структуры и компонент тензора упругости [129]. Таким образом, расчёт образца анизотропной негомогенной структуры на основе построения *MIL*-распределения предполагает проведение натуральных экспериментов с целью определения эмпирических констант, а также предварительное вычисление компонент тензора структуры для перерасчёта свойств материала с учётом полученных значений. При этом остаются до конца не разрешёнными как вопрос применимости тензора структуры к материалам различного внутреннего строения, так и задача точности определения физических констант [170; 200; 201; 245; 266].

#### 1.4.2.2 Представительные объёмные элементы

Иным подходом к гомогенизации выступает метод, основанный на построении представительного объёмного элемента [119; 145; 162; 169; 196; 219],



также известный как метод масштабирования (*upscaling*). Данный способ предполагает сведение анизотропии материала к ортотропии путём определения констант (эффективных свойств) из численных экспериментов и также позволяет учитывать нелинейность материала [182]. В настоящее время возможность применения данных с изображений в расчётах значительно расширило его применение [36; 141; 182]. В основе метода лежит построение анизотропной репрезентативной модели. В этом случае предполагается, что тензор упругих констант содержит 21 независимую компоненту, исходя из чего в дальнейшем составляется необходимое количество расчётных соотношений, построение которых производится путём проведения численных экспериментов с различными граничными условиями (рис. 1.10б). Стоит отметить, что в рамках данного метода актуальным вопросом оказывается выбор размера представительного объёмного элемента [198], определение которого напрямую зависит как от структурных особенностей материала, так и от характера их распределения в объёме (рис. 1.10а).

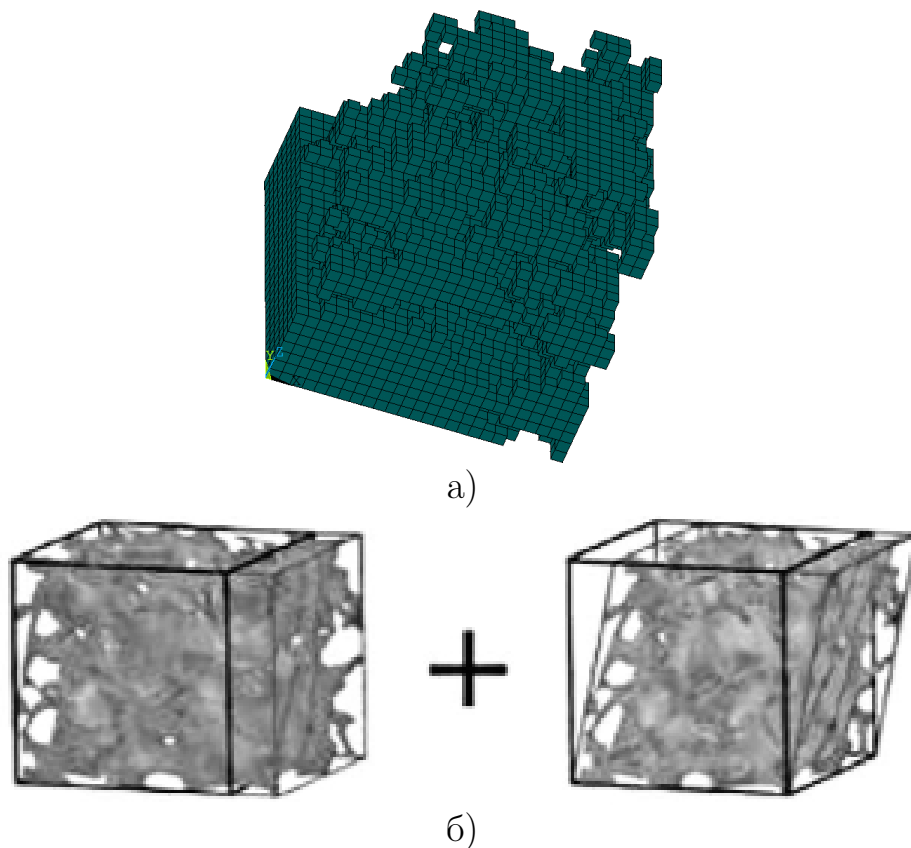


Рисунок 1.10 — Метод представительных объёмных элементов: а) — представительный объём среды с неоднородным распределением материала; б) — проведение численных испытаний над представительным элементом.

Вычисление необходимых констант осуществляется путём решения задачи напряжённо-деформированного состояния, а также последующего экстрагирования результатов на поверхности нагружения в соответствующем расчётном испытании [36]. Таким образом, получив средние значения компонент напряжённо-деформированного состояния на заданной области, составляется, как правило, переопределённая система уравнений относительно количества неизвестных независимых компонент тензора упругости. Решение подобной системы предполагает применение одного из подходящих приближенных численных методов (например, метод наименьших квадратов), что позволяет в результате получить усреднённые анизотропные свойства репрезентативной модели. Следующим шагом выступает сведение анизотропии к ортотропии методом определения ортогональных плоскостей симметрии. В этом случае описанию компонент тензора упругих постоянных подлежат 9 независимых значений, что приводит к формулировке соответствующих задач определения направлений осей ортотропии и величин искомых компонент тензора. Решение первой задачи предполагает вычисление углов поворота, что, как правило, реализуется на основе выбора подходящей целевой функции, подвергаемой в дальнейшем минимизации [114; 141; 144] с целью обращения в ноль её значений в осях ортотропии. После поворота тензора производится определение его независимых компонент методом принудительного пересчёта исходя из требования равенства нулю соответствующих элементов. В этом случае вычисление отличных от нуля составляющих производится из условия равенства напряжений на одинаковом поле деформаций. Необходимость в проведении данной процедуры объясняется наличием погрешностей, возникающих в силу особенностей дискретизации расчётной области, а также образованием невязки при решении переопределённой задачи приближенным численным алгоритмом. Основным недостатком метода представительных объёмных элементов выступает необходимость в моделировании каждого микрообъёма (вокселя) среды отдельным конечным элементом, что не только приводит к зависимости от точности дискретизации модели (разрешающей способности сканирующего устройства), но также определяет существенность в изучении вопросов эффективного решения получаемых систем уравнений относительно размерности глобальной матрицы жёсткости. Более того, на основе полученной в рамках одного представительного объёмного элемента сетки необходимым оказывается проведение некоторого заданного количества численных экспериментов с целью приближенного вы-

числения констант материала, что в совокупности приводит к значительной ресурсозатратности метода.

### 1.4.3 Иные подходы

Возможность создания детализированных снимков исследуемой области послужила основой для развития также и иных подходов, предполагающих применение данных с изображений в качестве некоторых параметров исходной среды. К одному из них можно отнести моделирование методом конечных элементов, основанное на построении взаимосвязи между сеткой и данными компьютерной томографии [57]. С этой целью на дискретизированном множестве, представляющем собой набор координат узлов и список элементов, собранных по этим узлам, определяются коэффициенты ослабления в узлах сетки по некоторому заданному закону. В этом случае связь между значениями данных компьютерной томографии и свойствами материала устанавливается на основе существующего предположения о наличии зависимости между числами Хаунсфилда и оптической плотностью, упругими константами и предельными напряжениями [4; 75; 163; 231; 232; 261]. Коэффициенты соответствующих аппроксимаций определяются экспериментально и могут варьироваться с учётом механических характеристик исходной среды [163; 231; 232]. Таким образом, в рамках упругой постановки усреднение механических параметров для каждого конечного элемента позволяет использовать классический аппарат построения сетки. В этом случае определение коэффициентов запаса предполагает создание массива допустимых напряжений, по размерности совпадающего с количеством узлов численной модели. Следует отметить, что усреднение полученных значений, необходимое для реализации данного подхода, производится путём вычисления среднего арифметического, что накладывает соответствующие ограничения на геометрические параметры конечного элемента: необходимость в равномерности трёх линейных размеров. Другой способ численного моделирования по данным с изображений позволяет учитывать структурную анизотропию среды на основе цифрового прототипа расчётной области [112]. Данный метод основан на утверждении о том, что пространственное распределение материала оказывает большее влияние на анизотропию

свойств, чем изменение его механических параметров в заданной области [114]. В этом случае предполагается, что на микроуровне материал сплошной и изотропный, а на макроуровне анизотропия возникает в силу его неравномерного распределения в пространстве. Таким образом, в рамках данного подхода реализуется прямое моделирование расчётного образца методом конечных элементов на основе взвешенного интегрирования каждой локальной матрицы жёсткости сетки. Весовыми факторами при этом выступают обработанные значения цифрового прототипа, построенного по данным о распределении плотности материала в среде: производя сепарацию исследуемой области на две моделируемых среды (например, костная ткань и вещество в порах), оказывается возможным осуществлять численное интегрирование по некоторому дискретному пространству, границы фаз в котором определяются порогом бинаризации данных компьютерной томографии. Таким образом, в рамках данного метода учёт распределения свойств материала реализуется локально для каждого конечного элемента сетки на этапе вычисления его матрицы жёсткости по данным о проницаемости среды в соответствующем объёме.

## **1.5 Цифровое прототипирование**

### **1.5.1 Костная ткань как объект негетогенной среды**

В настоящее время исследования в области медицины оказываются наиболее востребованными с точки зрения научных изысканий. Данная тематика приходится актуальной в медицинской практике, так как напрямую связана с методологией установления диагноза пациентов. На данный момент существует множество способов оценки состояния заболеваний, предполагающих не только персональный осмотр консультирующего врача, но и определённые методы автоматизации, основанные на цифровых показателях сканирующих устройств. Объектами исследований оказываются медицинские случаи, требующие как обычного медикаментозного лечения, так и прямого хирургического вмешательства. В качестве научного предмета медицинская диагностика включает в себя семиотику (изучение симптомов заболевания), методы обследования больного

и методологические основы диагностирования. Результаты подобной диагностики позволяют назначать индивидуализированное лечение отдельных пациентов, основанное на соответствующих классификациях заболеваний и методиках их лечения и профилактики, и выводятся путём всестороннего и систематического изучения больного, включающего в себя сбор анамнеза (показаний самого пациента), а также объективное исследование состояния организма и его отдельных органов. Таким образом, предметом рассмотрения оказываются данные лабораторных исследований (крови и различных выделений), а также показания рентгенологических и иных подходов (эндоскопия, биопсия и другое). Наличие подобных показателей определяет необходимость в проведении лечения и представляет собой набор сведений (характеристик), описывающих как внешнее, так и внутреннее состояние организма. В этом случае наибольший интерес представляют собой патологии, возникающие в недоступной для внешнего осмотра области, так как определяют наиболее трудные для выявления и изучения случаи. С практической стороны, наилучшим решением для оценки подобных отклонений оказывается применение методов неразрушающего контроля, так как затрагивает наиболее технологичные и развивающиеся подходы, основанные на применении сложных сканирующих устройств, позволяющих проводить внутритканевую диагностику определённых областей организма без разрушения исследуемого образца.

Одним из наиболее перспективных и практически значимых направлений в области биомеханики оказывается исследование костной структуры. Костная ткань обладает неравномерным объёмным распределением механических свойств, что определяется не только уникальностью строения костного органа, но и оказывается следствием её адаптационных функций [7; 72; 73; 75; 80]. В силу этого, снижение физической активности [146; 259], а также физиологические [8; 9] или возрастные особенности могут приводить к локальной потере прочности костей. В клинической практике это может послужить причиной расхождения между реальным поведением органа и ожидаемым (моделируемым) результатом оперативного вмешательства. Стоит отметить, что в ортопедии и травматологии множество исследований направлено как на улучшение методик проведения подобных операций [22; 24; 35], так и на способы оптимизации используемых стержневых аппаратов [5; 7; 23; 32; 33; 79]. Но практика показывает, что сложности в прогнозировании поведения материала костной ткани [142; 234; 260; 267] влекут за собой необходимость в принятии хирургом решений о

порядке проведения операции в зависимости от актуального состояния органа. Таким образом, возникает потребность в решении задач об оценке механических свойств органа не в рамках интегрального подхода, то есть усреднения по некоторой области, а в распределённом смысле с учётом пространственного изменения параметров. В этом случае существующие современные подходы к численному моделированию предоставляют возможность расчёта сложных областей [10; 21; 34; 77; 134; 147; 239]. Основным инструментом в реализации подобных методов оказывается применение данных с изображений исследуемых образцов, благодаря которым можно судить о внутреннем строении материала.

### 1.5.2 Оценка прочности костных органов

Изучение различного рода патологий, связанных с травмированием костных органов человека [38; 105; 209; 221; 222], выступает одним из востребованных направлений, определяющих необходимость в разработке новых методологий для расчёта случаев клинической практики. В данном вопросе объектами исследований оказываются не только различные нарушения целостности структуры (например, перелом при воздействии нагрузки, превышающей прочность), но также соответствующие процессы костного образования, связанные с прогрессирующими системными метаболическими заболеваниями скелета (остеопороз), и крайние случаи, предполагающие моделирование (прогнозирование) последствий методов прямого хирургического вмешательства (стоматологическое, тазобедренное и другого рода имплантирование/протезирование) [37; 38]. Физиологические процессы, возникающие при этом в костной ткани под действием внешних силовых факторов, определяют процесс перестройки костного материала и оказываются причиной изменения его структурных свойств [275]. Таким образом, оценка напряжённо-деформированного состояния костных органов обосновывается необходимостью в повышении вероятности успешного проведения прямого хирургического вмешательства и, как следствие, определяет основную проблематику в клинической практике. Реализация такого подхода приводит к задаче создания параметрической цифровой модели костного органа, на основе которой, в первую очередь, вычисляется локальная оценка прочности [138; 206; 212]. В общем случае, данный процесс

позволяет перейти к методам персонализированной медицины и служит основанием для построения индивидуализированных способов получения необходимой информации в предоперационный период.

## Выводы по главе 1

1. Современные проблемы механики обоснованы активным развитием технологий создания новых материалов, что приводит к необходимости в разработке методов определения их свойств. Натурные испытания не могут быть в полной мере применены для решения данной задачи. Таким образом, численное моделирование на основе методов неразрушающего контроля оказывается наиболее перспективным подходом к исследованию композитных или биомеханических конструкций.
2. Особенности структурного строения отдельных материалов влекут за собой необходимость в применении подходящего метода восстановления пространственного распределения механических свойств материала в заданном объёме. Существующие на данный момент подходы позволяют проводить сканирование без разрушения исследуемого образца как его поверхностных свойств, так и внутренних дефектов и структурных особенностей. Каждый из методов обладает уникальной разрешающей способностью сканирующих устройств и применяется для изучения объектов различной глубины проникновения.
3. Построение численной модели по данным с изображений предполагает восстановление исходной геометрии. В этом случае могут быть применены соответствующие методики сегментации (построения сетки), основанные на информации о распределении плотности материала в объёме. Применение таких подходов позволяет с заданной точностью дискретизации выделять интересующую с точки зрения расчётов область, соответствующую занимаемому объектом пространству.
4. Существующие методы статического расчёта образцов из негомогенных материалов предполагают применение как методов прямого моделирования, так и подходов, основанных на гомогенизации представительных объёмов, принадлежащих области исследования. Построение моделей на основе первого способа приводит к значительным вычислительным затратам, так как предполагает моделирование каждого микроэлемента среды. Методы гомогенизации приводят к необходимости в проведении как натурных испытаний (для определения констант в физических соотношениях на основе тензора структуры), так и ряда



- численных экспериментов (для вычисления эффективных механических параметров в методе представительных объёмных элементов). Иные подходы предполагают методы прямого учёта пространственного распределения свойств материала при построении численной модели: их применение оказывается более эффективным с точки зрения проводимых вычислений, а также позволяет восстанавливать расчётную область на основе проницаемости среды в исследуемом объёме.
5. Объекты биомеханики оказываются одними из наиболее сложных в описании механических параметров, так как предполагают уникальность не только анизотропии свойств, но и топологической нетривиальности геометрии. В качестве одного из объектов исследований выступает костная ткань, определяющая состав костных органов. Задачи, предполагающие изучение подобных трабекулярных структур, включают исследование пористости, неоднородности распределения механических свойств, а также оценку напряжённно-деформированного состояния и прочности образцов, подверженных внешним нагрузкам.

## Глава 2. Численное моделирование по данным компьютерной томографии

### 2.1 Построение цифрового двойника

#### 2.1.1 Интерпретация исходных данных сканирования

Цифровое прототипирование представляет собой процесс восстановления цифровой копии рассматриваемого объекта. В качестве исходных данных в этом случае оказываются значения, полученные путём проведения сканирования исследуемой области. Результатом такой процедуры выступает воссоздание изображения объекта. Одним из подходов к получению подобных снимков является проведение компьютерной томографии. Таким образом, для каждого объекта создаётся индивидуальный массив значений, позволяющий извлекать информацию об объёмном распределении механических характеристик. Численные методы, основанные на применении данных компьютерной томографии, соответствуют методам неразрушающего контроля и позволяют производить расчёт интересующей области с точностью, зависящей от чувствительности и разрешающей способности сканирующего устройства.

В медицине наиболее распространённым методом воссоздания изображений исходной области выступает проведение рентгеновской компьютерной томографии объекта. Данная процедура предполагает процесс неразрушающего послойного исследования внутренних структурных свойств моделируемой среды. Метод построен на измерении и комплексной компьютерной обработке разности ослабления рентгеновского излучения различными по плотности тканями. В трёхмерном случае результатом проведения компьютерной томографии выступает массив значений, каждое из которых характеризует проницаемость материала в соответствующем микрообъёме среды (вокселе). На данный момент существует несколько типов сканирующих устройств. К первому из них относятся промышленные томографы, позволяющие получать значения рентгеновской проницаемости среды в исходном, необработанном виде. Ко второму типу принадлежат медицинские томографы, производящие компьютерную об-

работку изображений согласно количественной шкале рентгеновской плотности Хаунсфилда. В этом случае значения полученного массива данных оказываются нормированными по отношению к дистиллированной воде, рентгеновская плотность которой принимается за 0  $HU$  (*Hounsfield unit* – единица Хаунсфилда):

$$\widetilde{HU}(\{r\}) = \frac{HU(\{r\}) - HU_w}{HU_w - HU_a} \cdot 10^3, \quad (2.1)$$

где  $HU_w$  и  $HU_a$  – линейные коэффициенты ослабления при стандартных условиях для воды (*water*) и воздуха (*air*), соответственно,  $HU(\{r\})$  – значение линейного коэффициента рентгеновского ослабления в вокселе, пространственное расположение которого определяется вектором глобальных координат  $\{r\}$ , и  $\widetilde{HU}(\{r\})$  – соответствующая нормированная величина.

Проведение широкого спектра исследований показало, что полученные таким образом единицы Хаунсфилда для некоторого объёма среды могут быть интерпретированы в качестве оптической плотности материала и даже пересчитаны в соответствующие значения упругих постоянных и предельных напряжений с использованием следующих соотношений [163; 231; 232]:

$$\rho(\{r\}) = a_\rho + b_\rho \widetilde{HU}(\{r\}), \quad (2.2a)$$

$$E(\{r\}) = a_E \rho^{b_E}(\{r\}), \quad (2.2б)$$

$$[\sigma(\{r\})] = a_\sigma \rho^{b_\sigma}(\{r\}), \quad (2.2в)$$

где коэффициенты  $a$  и  $b$  с соответствующими индексами определяются из натурных экспериментов или заимствуются из существующей литературы и могут варьироваться в зависимости от вида исследуемой структуры: например, в клинической практике исследования костных органов определяющими показателями оказываются как тип костной ткани, так и биологические функции органа.

Выступая в качестве одного из основных подходов к воссозданию изображений исходной области, применение медицинской компьютерной томографии позволяет получать детализированную информацию не только о состоянии ткани органов пациента, но и об особенностях её взаимодействия с объектами различного рода хирургического вмешательства (например, эндопротезирование тазобедренного сустава). На основе пространственного распределения значений, полученных с помощью данного способа, может быть восстановлена геометрия образца, а также проведена сегментация изображения в зависимости от физических показателей исследуемых материалов.

### 2.1.2 Препроцессорная обработка массива значений

Одним из наиболее распространённых методов обработки изображений, полученных на основе проведения компьютерной томографии, выступает бинаризация исходного массива данных согласно некоторому заранее заданному порогу, величина которого определяется соответствующим алгоритмом. Применение такого преобразования значений в случае исследования негетерогенных сред позволяет сегментировать интересующие фазы материала и устанавливать им в соответствии эффективные механические свойства. Существует множество алгоритмов, позволяющих выделять определённые уровни цветового диапазона на основе характера значений исходного массива данных, среди которых широкое применение получили подходы, предполагающие построение гистограммы изображения. Наиболее быстрым и эффективным в этом случае оказывается метод Оцу [213; 216], позволяющий производить вычисление порогового значения для полутоновых изображений. Данный подход предполагает алгоритм разделения значений в вокселях на два класса («полезных» и «фоновых») в классическом случае и на множество классов (заданное количество уровней изображения) для сегментации области на несколько структурно различных объектов (мульти-Оцу метод).

Применение компьютерной томографии при исследовании костных органов в клинической практике предполагает необходимость в восстановлении структуры костной ткани, что объясняется её индивидуальностью и нетривиальностью. В этом случае задача применения алгоритма бинаризации заключается в обнаружении материала, соответствующего упругой костной ткани [114]. Таким образом, при проведении исследований трабекулярных костей выделяются две фазы материала, соответствующие трабекулярной кости и костному мозгу [200]: в качестве «полезного» класса вокселей рассматриваются твёрдые костные образования, а «фоновым» выступает вещество в порах. Предполагая простой процесс бинаризации исходного массива, основанный на методе Оцу, ключевой характеристикой оказывается некоторая расчётная величина  $T$ , согласно которой могут быть выделены две фазы материала: костная структура ( $I \geq T$ ), и мягкие образования ( $I < T$ ). В этом случае интересующий с точки зрения расчётов объект определяется теми значениями вокселей, которые не меньше вычисленной величины порога бинаризации.

Метод Оцу основан на применении гистограммы исходного изображения, представляющей собой набор бинов, каждый из которых характеризует количество попаданий в него элементов выборки. На рисунке 2.1а представлен исходный двумерный снимок исследуемого объекта (правильный шестиугольник). Диапазон значений, соответствующих пикселям, составляет  $[0; 255]$ , что определяет 8-битное изображение. На основе полученной гистограммы (рис. 2.1б), описывающей количественное распределение массива данных, можно выделить два преобладающих класса – тёмные и светлые пиксели.

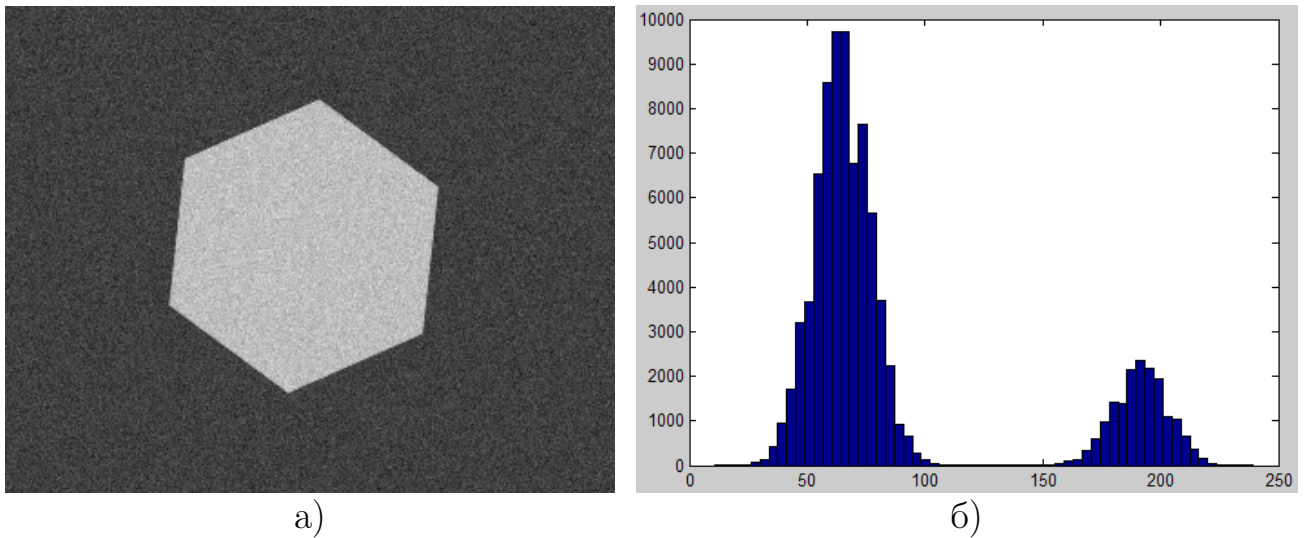


Рисунок 2.1 — Обработка изображения методом Оцу: а) – исходный массив значений (диапазон выборки –  $[0; 255]$ ); б) – гистограмма представленного изображения.

Таким образом, идея метода Оцу заключается в отыскании такого порогового значения между классами, чтобы каждый из них оказался как можно более «плотным». Данная формулировка может быть задана в виде минимизации внутриклассовой дисперсии, которая определяется как взвешенная сумма дисперсий двух классов:

$$\sigma_w^2 = w_1\sigma_1^2 + w_2\sigma_2^2, \quad (2.3)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  – вероятности первого и второго классов, соответственно.

В работе [216] показано, что минимизация внутриклассовой дисперсии эквивалента максимизации межклассовой дисперсии, которая может быть выражена следующим образом:

$$\sigma_b^2 = w_1w_2(a_1 - a_2)^2, \quad (2.4)$$

где  $a_1$  и  $a_2$  – средние арифметические значения для каждого из классов.

Преимущественной особенностью формулы (2.4) оказывается то, что величины  $w_1(t+1)$ ,  $w_2(t+1)$  и  $a_1(t+1)$ ,  $a_2(t+1)$  могут быть выражены через предыдущие значения  $w_1(t)$ ,  $w_2(t)$  и  $a_1(t)$ ,  $a_2(t)$ , где  $t$  – текущий порог бинаризации. Таким образом, может быть сформулирован следующий алгоритм, определяющий общее описание реализации алгоритма метода Оцу:

1. Вычисление гистограммы исходного изображения, требующее единственный проход по массиву значений данных компьютерной томографии.
2. Последовательный перебор значений гистограммы, начиная с  $t = 1$ : на каждом шаге пересчитывается значение дисперсии  $\sigma_b(t)$ ; если при  $t = t_i$  значение  $\sigma_b(t) > max$ , то обновляется максимальное значение дисперсии и  $T$  устанавливается равным  $t_i$ , где  $i$  – номер текущей итерации.
3. По окончании итерационного процесса искомый порог бинаризации равен  $T$ .

На рисунке 2.2а представлен результат бинаризации исходного массива данных (рис. 2.1а) описанным алгоритмом. Величина порогового значения отмечена на соответствующей гистограмме (рис. 2.2б). Важно подчеркнуть, что в общем случае реализация метода Оцу предполагает введение определённых оптимизаций, к которым можно отнести, например, проход значений гистограммы не в диапазоне  $[1; 254]$ , а от минимального до максимального значения, за вычетом единицы.

Таким образом, обработанный массив значений, полученных на основе проведения компьютерной томографии, может быть использован как для учёта внутреннего распределения свойств материала на уровне разрешающей способности сканирующего устройства, так и для аппроксимации внешней топологии образца с целью задания соответствующих поверхностных граничных условий, определяемых постановкой конкретной задачи.

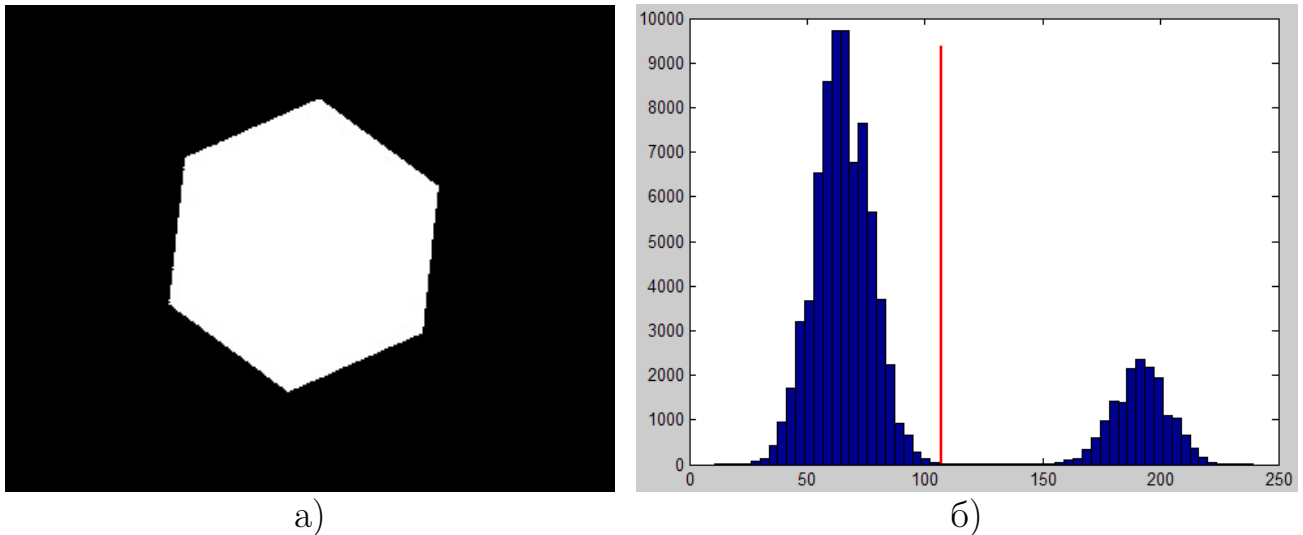


Рисунок 2.2 — Обработка изображения методом Оцу: а) – бинаризованный массив значений (диапазон выборки –  $[0; 1]$ ); б) – гистограмма представленного изображения.

## 2.2 Построение конечного элемента

### 2.2.1 Взвешенное интегрирование локальной матрицы жёсткости

Восстановление изображения трёхмерных физических объектов на основе проведения компьютерной томографии предполагает создание массива данных, значения которого представляют собой некоторую усреднённую по соответствующему микрообъёму величину проницаемости среды. В этом случае геометрия каждого такого микрообъёма определяется методом сканирования и в общем случае представляет собой выпуклый многогранник. Наиболее распространённой формой наименьшей единицы изображения выступает воксел, представляющий собой прямоугольный параллелепипед. В связи с этим моделирование образцов из негетерогенных материалов в трёхмерной постановке может быть основано на построении сетки, каждый элемент которой является выпуклым шестигранником. Таким образом, с алгоритмической точки зрения (сегментация исходной области и проведение вычислений) наиболее подходящим оказывается гексагональный восьмиузловой трёхмерный изопараметрический конечный элемент с линейной аппроксимацией геометрии и поля перемещений.

Используя функции формы  $N$  для каждого  $i$ -го узла в локальной системе координат  $(\xi, \eta, \zeta)$  текущего конечного элемента, аппроксимация перемещений внутри соответствующей ему области может быть определена в следующем виде:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^R N_i(\xi, \eta, \zeta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}, \quad (2.5)$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  – компоненты вектора перемещений в глобальной системе координат  $(x, y, z)$ ,  $R$  – количество узлов конечного элемента, а функции формы определяются выражением:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{R} (1 + \xi\xi_i) (1 + \eta\eta_i) (1 + \zeta\zeta_i). \quad (2.6)$$

В матричной форме равенство (2.5) представимо в виде:

$$\{\delta\} = [N(\xi, \eta, \zeta)] \{\delta^e\}, \quad (2.7)$$

где  $[N(\xi, \eta, \zeta)]$  – матрица функций формы конечного элемента, а  $\{\delta^e\}$  – вектор перемещений в соответствующих ему узлах.

Компоненты векторов деформаций и напряжений, согласно Нотации Фойгта, имеют следующую форму записи:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{xy}\}^T, \quad (2.8a)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}^T. \quad (2.8b)$$

На основе соотношений связи между деформациями и перемещениями вектор деформаций в текущем узле конечного элемента может быть записан в виде:

$$\{\varepsilon\} = [B(\xi, \eta, \zeta)] \{\delta\}, \quad (2.9)$$

где  $[B(\xi, \eta, \zeta)]$  – матрица дифференцирования.

Применяя закон Гука, вектор напряжений может быть выражен следующим образом:

$$\{\sigma\} = [D(\{r\})] \{\varepsilon\}, \quad (2.10)$$

где  $[D(\{r\})]$  – матрица упругих постоянных, компоненты которой определяются пространственным вектором глобальных координат точки  $\{r\}$ . Таким образом, в каждой точке пространства сохраняется связь между напряжениями



и деформациями, соответствующая модели линейно-упругого тела, а свойства материала объясняются структурными особенностями объекта.

В случае описания образцов из негетомогенных материалов матрица упругих постоянных может быть представлена в виде:

$$[D(\{r\})] = [D] \omega(\{r\}) , \quad (2.11)$$

где  $[D]$  – матрица упругости для элементарной единицы материала («чистый» образец),  $\omega(\{r\})$  – скалярная функция, определяющая негетомогенные свойства среды. В силу существования экспериментально установленной зависимости между единицами шкалы денситометрических показателей Хаунсфилда и механическими параметрами материала (см. п. 2.1.1: ф-ла (2.2)), значения такой функции, восстановленные по данным компьютерной томографии, могут применяться в качестве весов численного интегрирования, что определяет суть предлагаемого подхода к прямому учёту свойств материала при построении численной модели.

Таким образом, вектор напряжений, с учётом формул (2.9) и (2.11), может быть переписан в следующем виде:

$$\{\sigma\} = [D] \omega(\{r(\xi, \eta, \zeta)\}) [B(\xi, \eta, \zeta)] \{\delta^e\} . \quad (2.12)$$

Используя соотношение (2.9) для деформаций и выражение (2.12) для напряжений, результирующее представление матрицы жёсткости конечного элемента [30] задаётся формулой:

$$[K^e] = \iiint_{-1}^1 [B(\xi, \eta, \zeta)]^T [D] [B(\xi, \eta, \zeta)] |J(\xi, \eta, \zeta)| \cdot \omega(\{r(\xi, \eta, \zeta)\}) d\xi d\eta d\zeta , \quad (2.13)$$

где  $|J(\xi, \eta, \zeta)|$  – определитель Якоби для преобразования координат.

Наряду с установленной зависимостью между данными о рентгеновской проницаемости среды и параметрами материала было определено [114], что распределение ткани по расчётному объёму образца оказывает больший вклад в его свойства анизотропии, чем само пространственное распределение значений параметров материала. Таким образом, полагая механические параметры среды одинаковыми в каждом вокселе, соответствующем костному веществу, учёт особенностей распределения трабекулярных структур в объёме может быть реализован путём бинаризации исходного массива данных компьютерной

томографии по заранее заданному порогу. В этом случае значения, соответствующие 1, определяют костную ткань, а равные 0 – поры, что предполагает наличие в каждом микрообъёме геометрии образца либо чистого костного материала, либо полости, не производящей вклад в качестве элемента суммы квадратурной формулы при вычислении локальной матрицы жёсткости. Данный метод обработки позволяет применять в расчётах нормированные и ненормированные данные компьютерной томографии, так как использует значения весовой функции в качестве показателя наличия или отсутствия материала. Таким образом, интегрирование локальной матрицы жёсткости на основе бинаризованного массива значений позволяет выполнить построение конечного элемента сплошной среды с учётом анизотропных свойств ввиду неравномерного пространственного распределения материала.

### 2.2.2 Локальное усреднение напряжённно-деформированного состояния

На основе узловых значений перемещений, найденных с использованием матриц дифференцирования и упругих постоянных, в узлах каждого элемента сетки локально могут быть вычислены векторы деформаций и напряжений. В силу неравномерного пространственного распределения свойств материала, приближенное напряжённно-деформированное состояние в образце может быть вычислено путём локального усреднения по объёму каждого конечного элемента [16]. В этом случае предполагается построение некоторой функции  $\dot{\gamma}^e(\xi, \eta, \zeta)$ , которая соответствует полученной после конечно-элементного расчёта какой-либо компоненте вектора деформаций  $\{\epsilon\}$  или напряжений  $\{\sigma\}$ . Таким образом, для данной величины вводится аппроксимация по её узловым значениям в пределах каждого конечного элемента в следующем виде:

$$\dot{\gamma}^e(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^R N_i(\xi, \eta, \zeta) \gamma_i^e = \{N(\xi, \eta, \zeta)\}^T \{\gamma^e\}, \quad (2.14)$$

где  $i$  – номер узла в элементе,  $\gamma_i^e$  – коэффициенты аппроксимации, представляющие собой узловые значения соответствующей компоненты вектора  $\{\epsilon\}$  или  $\{\sigma\}$ . Основываясь на формуле (2.14), локально усреднённое напряжённно-деформированное состояние может быть получено путём интегрирования соответствующей

функции приближения по объёму конечного элемента следующим образом:

$$\{\bar{\gamma}\} = \frac{1}{V^e} \int_{V^e} \{\dot{\gamma}^e(\xi, \eta, \zeta)\} dV, \quad (2.15)$$

где  $V^e$  – объём конечного элемента.

Оценка погрешности вычислений может быть произведена на основе значений локальной ошибки энергии для каждого элемента сетки [20]. В этом случае ошибка напряжений в узлах элемента может быть выражена следующим образом:

$$\{\Delta\sigma_i^e\} = \{\sigma_i^a\} - \{\sigma_i^e\}, \quad (2.16)$$

где  $\{\sigma_i^e\}$  – вектор напряжений в узле под номером  $i$ , а  $\{\sigma_i^a\}$  – вектор усреднённых напряжений, определяемых соотношением:

$$\{\sigma_i^a\} = \frac{1}{N_i^e} \sum_{j=1}^{N_i^e} \{\sigma_i^j\}, \quad (2.17)$$

где  $\{\sigma_i^j\}$  – вектор напряжений в  $j$ -ом элементе сетки,  $N_i^e$  – количество элементов, которым принадлежит узел под номером  $i$ .

Далее, для каждого элемента сетки ошибка энергии по напряжениям может быть вычислена следующим образом:

$$\bar{H}^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\Delta\bar{\sigma}\}^T [D(\{r\})]^{-1} \{\Delta\bar{\sigma}\} dV. \quad (2.18)$$

Полученная таким образом величина может быть нормирована по энергии деформации по формуле:

$$\tilde{H}^e = \sqrt{\frac{\bar{H}^e}{\bar{U}^e + \bar{H}^e}} \cdot 100\%, \quad (2.19)$$

где выражение для определения энергии деформации представимо в виде:

$$\bar{U}^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \{\bar{\sigma}\}^T \{\bar{\varepsilon}\} dV. \quad (2.20)$$

Таким образом, предложенный подход позволяет учитывать негомогенность среды на основе взвешенного интегрирования матрицы жёсткости каждого элемента сетки. Анализ напряжённо-деформированного состояния может быть проведён в терминах усреднённых напряжений и деформаций. Достоверность полученных результатов может быть проверена на основе нормированной ошибки энергии.

### 2.2.3 Локализация элемента расчётной области

Построение цифрового прототипа на основе данных компьютерной томографии предполагает сопоставление конечного набора значений о пространственном распределении свойств среды некоторому объёму расчётной области. Такие данные образуют массив трёхмерной структуры, каждый элемент которого ставится в соответствие виртуальному микрообъёму (вокселю) и определяет усреднённое значение единицы Хаунсфилда (см. п. 2.1.1). На основе полученного распределения можно произвести построение трёхмерного изображения исследуемой области в градациях серого цвета, где каждому оттенку соответствует определённый показатель рентгеновской проницаемости среды.

Численное моделирование, основанное на применении полученного таким образом цифрового прототипа, предполагает, что наивысшая точность расчётов может быть достигнута в случае моделирования каждого микрообъёма сплошной среды отдельным конечным элементом. Но реализация такого подхода на практике показывает значительные трудности, связанные с объёмом сопутствующих вычислений при решении задач дискретного моделирования на этапах процессорных и постпроцессорных расчётов. Таким образом, оказывается целесообразным произвести увеличение размера конечных элементов. В этом случае каждый воксел может рассматриваться в качестве некоторой окрестности точки интегрирования локальной матрицы жёсткости. Тем не менее, вопрос количества подобных подобластей оказывается зависимым от разрешающей способности компьютерного томографа, что при недостаточном количестве данных может привести к низкой вычислительной точности.

В силу структурных особенностей воссоздания изображений по данным компьютерной томографии, в качестве наиболее соответствующего подхода к интегрированию матрицы жёсткости каждого элемента сетки может быть выбран метод средних прямоугольников. В этом случае за шаг интегрирования принимаются соответствующие пространственные размеры вокселей  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  и  $\Delta z$ , которые в большинстве случаев воссоздания изображений равны между собой, а в качестве точек интегрирования выбираются их геометрические центры с координатами  $(x_i, y_j, z_k)$ . Стоит отметить, что при большом количестве точек интегрирования предложенный метод, с одной стороны, приводит к увеличению точности расчётов внутри элемента, но с другой, может оказать-

ся причиной уменьшения гибкости всей модели в силу небольшого количества конечных элементов. Также, наряду с вопросами интегрирования, остаётся открытой проблема применимости метода конечных элементов к задачам повседневной клинической практики.

Введём в рассмотрение некоторую область, описывающую исследуемый объект. Пусть  $\Omega$  соответствует сплошному пространству материала моделируемой среды,  $\Omega'$  – дискретному пространству данных компьютерной томографии,  $\Omega^e$  – дискретному пространству конечно-элементной сетки (рис. 2.3 – двумерное представление). Неравномерное распределение механических параметров в объёме исследуемой области приводит к заключению, что может быть установлена зависимость матрицы упругих постоянных от пространственных координат согласно соотношению (2.11). Таким образом, предполагая, что каждому элементу сетки соответствует конечный набор вокселей данных компьютерной томографии, численное интегрирование локальной матрицы жёсткости определяется следующей формулой:

$$[K^e] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)]^T [D] [B(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)] |J(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)| \cdot \omega(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta\xi \Delta\eta \Delta\zeta, \quad (2.21)$$

где  $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$  – координаты точек интегрирования в локальной декартовой системе координат,  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  и  $\Delta\zeta$  – шаг интегрирования в направлении трёх соответствующих координатных осей,  $\omega(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$  – значения весовой функции квадратурной формулы, определяемые данными компьютерной томографии в текущей окрестности точки интегрирования,  $I$ ,  $J$  и  $K$  – количество квадратурных точек вдоль соответствующих осей локальной системы координат элемента.

Наиболее распространённый в методе конечных элементов способ расчёта локальной матрицы жёсткости основан на переходе от произвольной геометрии конечного элемента в глобальной системе координат к кубу с локальной системой координат в центре и длиной стороны, равной 2 текущим единицам измерения: таким образом, пределы интегрирования оказываются равными  $[-1; 1]$ . В случае применения данного подхода к численному расчёту по данным компьютерной томографии возникает необходимость в установлении зависимости между локальными координатами каждой квадратурной точки и значением в соответствующем вокселе в глобальной системе координат. С целью

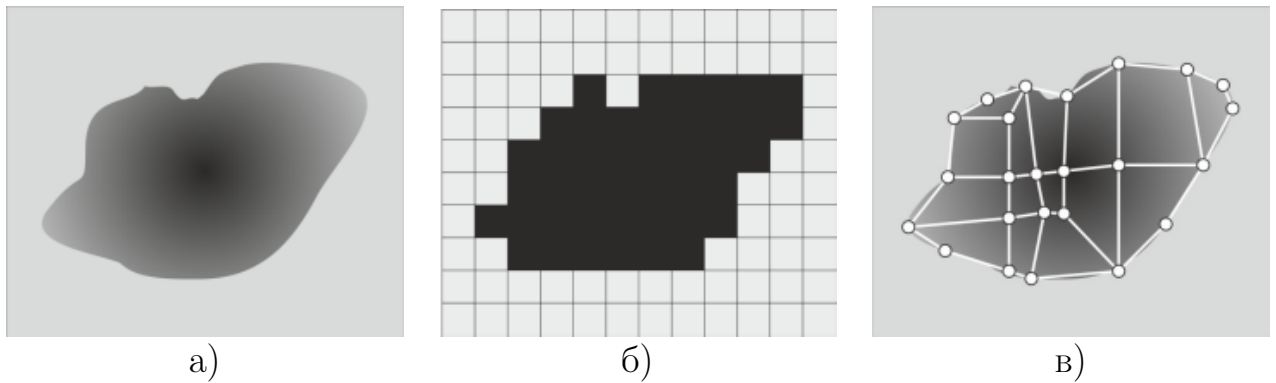


Рисунок 2.3 — Рассматриваемые пространства: а) – сплошное пространство материала  $\Omega$ ; б) – дискретное пространство компьютерной томографии  $\Omega'$ ; в) – дискретное пространство конечно-элементной сетки  $\Omega^e$ .

упрощения данного требования в качестве перехода к локальной системе координат может быть выбрано только перемещение её начала в произвольный узел конечного элемента, что представляет собой параллельный сдвиг координатных осей. В этом случае интегрирование будет происходить по прямоугольной области, пределы которой определяются геометрией локального объёма. Таким образом, предложенный метод сохраняет однозначную зависимость между индексами трёхмерного массива данных компьютерной томографии и локальными координатами квадратурных точек.

В общем случае геометрия конечного элемента не является прямоугольной, в силу чего при интегрировании учитываются только те квадратурные точки, которые соответствуют вокселям, принадлежащим локальному объёму. На рисунке 2.4б представлен метод проверки включения вокселя в область конечного элемента на примере двумерного пространства. Зелёным цветом отмечены квадраты (пиксели), полностью лежащие в области конечного элемента, оранжевым – граничащие со сторонами таким образом, что их геометрический центр принадлежит внутреннему объёму, а синим – внешнему. Чёрным цветом отмечены пиксели, которые не будут учтены в качестве квадратурных точек интегрирования. Таким образом, в зависимости от способа включения граничащих площадей в область конечного элемента, может быть построено соответствующее приближение численной модели.

Рассмотрим алгоритм определения принадлежности вокселя объёму конечного элемента. На рисунке 2.5 представлена двумерная постановка задачи: введена декартова система координат  $Oxy$ , в пространстве которой определён четырёхузловой конечный элемент, соответствующий выпуклому четырёхуголь-

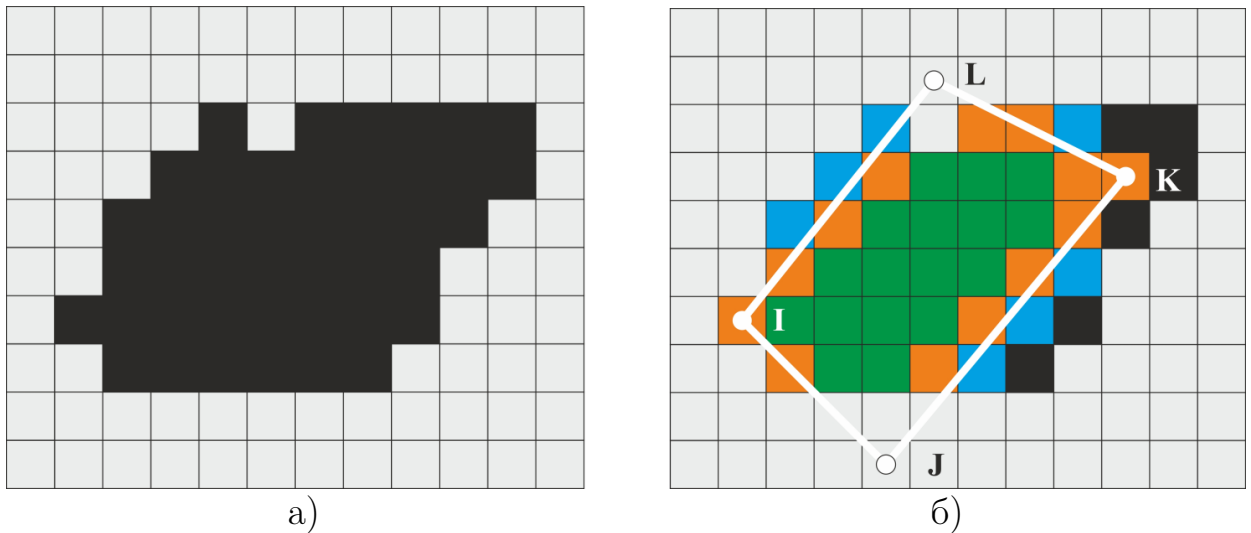


Рисунок 2.4 — Интегрирование матрицы жёсткости конечного элемента по произвольной области: а) — дискретное пространство компьютерной томографии образца; б) — геометрия конечного элемента (зелёным цветом отмечены внутренние воксели, оранжевым и синим — пересекающиеся с границей, чёрным — внешние).

нику  $IJKL$ . Наложённая равномерная прямоугольная сетка соответствует пикселям пространства изображения (компьютерной томографии) области. Точка  $A$  определяет геометрический центр вокселя, полностью принадлежащего геометрии фигуры, точка  $B$  — касающегося границы конечного элемента некоторой заданной окрестностью радиуса  $\varepsilon$ .

Первый способ, предполагающий включение микрообъёма согласно геометрическому центру пикселя, основан на последовательной проверке принадлежности точки внутренней области конечного элемента (рис. 2.6а). В этом случае проводится построение нормалей к каждой стороне геометрии, после чего проверяется выполнение следующего условия относительно скалярного произведения векторов:

$$\{v_{XE}\} \{v_{XF}\} \geq 0, \quad (2.22)$$

где  $X$  — узел ( $I$ ,  $J$ ,  $K$  или  $L$ ), принадлежащий стороне геометрии, относительно которой проводится проверка;  $\{v_{XE}\}$  — вектор геометрического центра пикселя  $E$  относительно узла  $X$ ;  $\{v_{XF}\}$  — вектор внутренней нормали к текущей стороне, заданный точкой  $F$ . Данное условие определяет ограничение, устанавливающее необходимость в принадлежности угла  $\angle EXF$  диапазону  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ . Таким образом, производя последовательную проверку выполнения

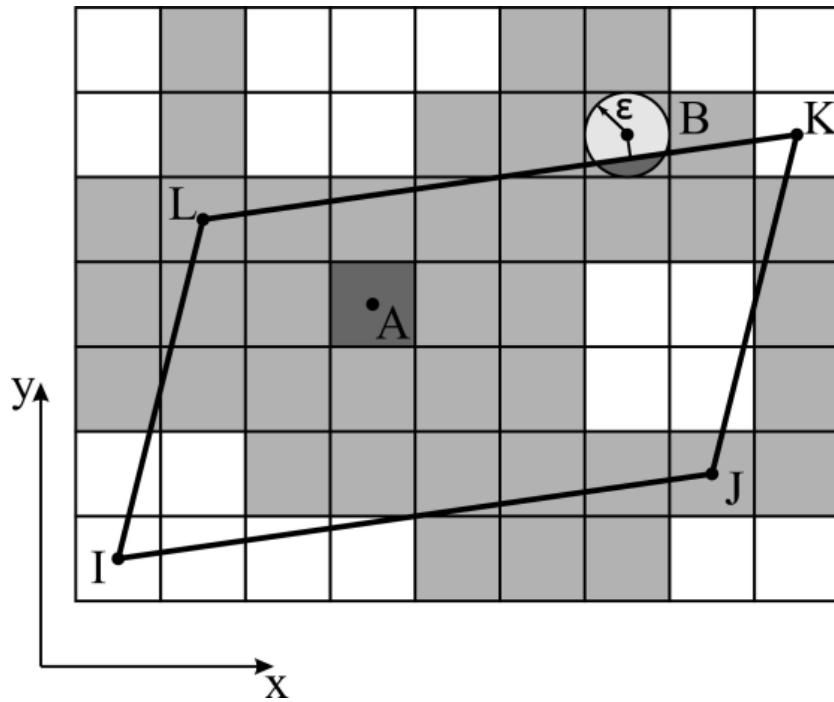


Рисунок 2.5 — Локализация данных с изображения объекта:  $A$  – геометрический центр пикселя, полностью принадлежащего области конечного элемента  $IJKL$ ;  $B$  – точка, соответствующая микроплощади, пересекающей границу геометрии окрестностью заданного радиуса  $\varepsilon$ .

условия (2.22) относительно соответствующих внутренних нормалей к сторонам конечного элемента (в трёхмерном случае геометрия в виде шестигранника предполагает шесть таких проверок относительно нормалей к соответствующим граням фигуры), может быть определена принадлежность точки области интегрирования методом средних прямоугольников.

Другой алгоритм определения включения элемента данных сканирования расчётной области основан на проверке пересечения границы конечного элемента некоторой заданной окрестностью радиуса  $\varepsilon$  (рис. 2.6б). В этом случае условие (2.22) заменяется менее сильным ограничением, выраженным относительно окрестности геометрического центра точки:

$$\{v_{XE}\} \{v_{XF}\} \geq -\varepsilon |\{v_{XF}\}| . \quad (2.23)$$

Данное соотношение может быть получено на основе выражения длины отрезка  $EG$ , соединяющего пересекаемую сторону конечного элемента с геометрическим центром вокселя по нормали к этой стороне, через соответствующие векторы  $\{v_{XE}\}$  и  $\{v_{XF}\}$ . Следует отметить, что невыполнение условия относительно одной стороны геометрии исключает необходимость в проведении проверок для остальных сторон конечного элемента.



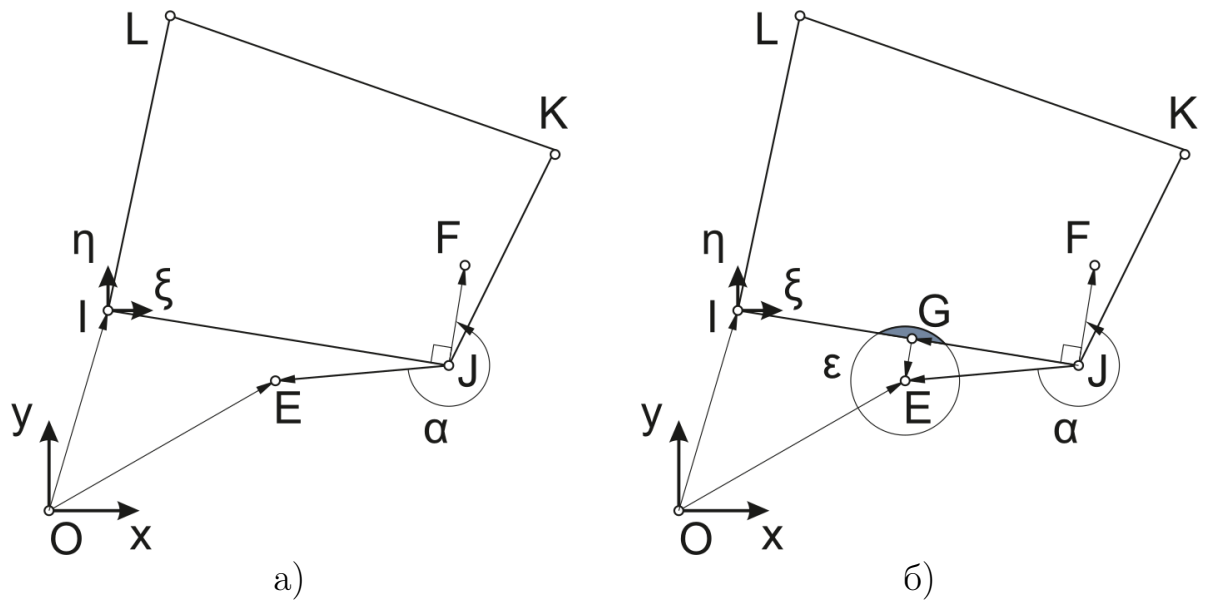


Рисунок 2.6 — Определение принадлежности точки  $E$  области интегрирования конечного элемента  $IJKL$  на основе векторной алгебры: а) — включение согласно геометрическому центру микрообъёма; б) — захват по заданной окрестности радиуса  $\varepsilon$ . На схемах а) и б):  $(x, y)$  — глобальная система координат сетки,  $(\xi, \eta)$  — локальная система координат конечного элемента,  $\{v_{JF}\}$  — вектор внутренней нормали к стороне  $IJ$ ,  $\{v_{JE}\}$  — вектор точки  $E$  относительно узла  $J$ ,  $\alpha$  — угол  $\angle E J F$  между векторами  $\{v_{JF}\}$  и  $\{v_{JE}\}$ . На схеме б):  $\{v_{GE}\}$  — вектор нормали к стороне  $IJ$  до точки  $E$ ,  $\varepsilon$  — окрестность точки  $E$  заданного радиуса.

#### 2.2.4 Обоснование применимости метода взвешенного интегрирования

В общем случае моделирование на основе взвешенного интегрирования локальной матрицы жёсткости предполагает рассмотрение в объёме текущего конечного элемента нескольких фаз материала, каждая из которых определяется различными механическими свойствами. Количество составляющих фаз может быть установлено по данным изображения объекта с учётом особенностей сканирующего устройства и на основе выбора подходящего метода обработки массива исходных значений. Возможность проведения интегрирования с весовым множителем обусловлена аппаратом построения матрицы жёсткости конечного элемента [30] и предполагает зависимость значений механических параметров от пространственных координат сетки. Допустимость взвешенного интегрирования основана на предположении о непрерывности

функций форм и, как следствие, поля напряжённо-деформированного состояния, что позволяет рассматривать интеграл по объёму конечного элемента в качестве суммы интегралов по его подобъёмам, соответствующим определённой фазе материала. В этом случае механические свойства в каждом микрообъёме полагаются постоянными. Следует также отметить, что при рассмотрении многофазных сред, несмотря на возможность проведения интегрирования с учётом зависимости компонентов матрицы упругости от пространственных координат, остаётся открытым вопрос сходимости данной методики относительно количества точек интегрирования, соответствующих выбранным микрообъёмам постоянных механических параметров материала. В работе [55] представлен анализ сходимости результатов моделирования двухфазной среды, полученный на основе проведения показательных вычислительных экспериментов.

Применение взвешенного интегрирования на основе данных с изображений также накладывает ограничения на моделирование образцов, предполагающих наличие как контактного взаимодействия (например, подвижное соединение костей скелета), так и начальных трещин, влияющих на прочность расчётного образца (например, косой или продольный перелом трубчатой кости). Решение подобных задач необходимо проводить на основе улучшенных математических и расчётных моделей [3; 17; 18; 28]. Другим вопросом оказывается применение данных с изображений различного масштаба расчётной среды. В этом случае решение может быть проведено с учётом неоднородности механических свойств и структурных особенностей материала как на макро-, так и на микроуровнях. Выбор необходимого уровня масштабирования определяется постановкой задачи, а точность полученного решения обеспечивается в большей степени разрешающей способностью сканирующего устройства. Так, моделирование костной ткани по данным компьютерной томографии на макроуровне позволяет учитывать особенности материала в виде остеонов и губчатых структур [110; 113; 115; 127; 195; 229; 271], а на микроуровне – в виде гаверсовых каналов и трабекулярных образований [84; 111; 122; 159; 161; 185].

Обоснование применимости предложенного метода взвешенного интегрирования к расчёту негомогенных пористых материалов может быть основано на равенстве работ внешних сил и внутренних напряжений на бесконечно малом виртуальном перемещении. Вначале рассмотрим некоторую сплошную область с геометрией в виде параллелепипеда, объём которой может быть сегментирован на конечное целое число подобъёмов (рис. 2.7). Построим в заданном

расчётном пространстве две сетки конечных элементов (см. п. 2.2.1): в первом случае вся область моделируется одним конечным элементом (рис. 2.7а), во втором – каждому микрообъёму ставится в соответствие отдельный конечный элемент (рис. 2.7б).

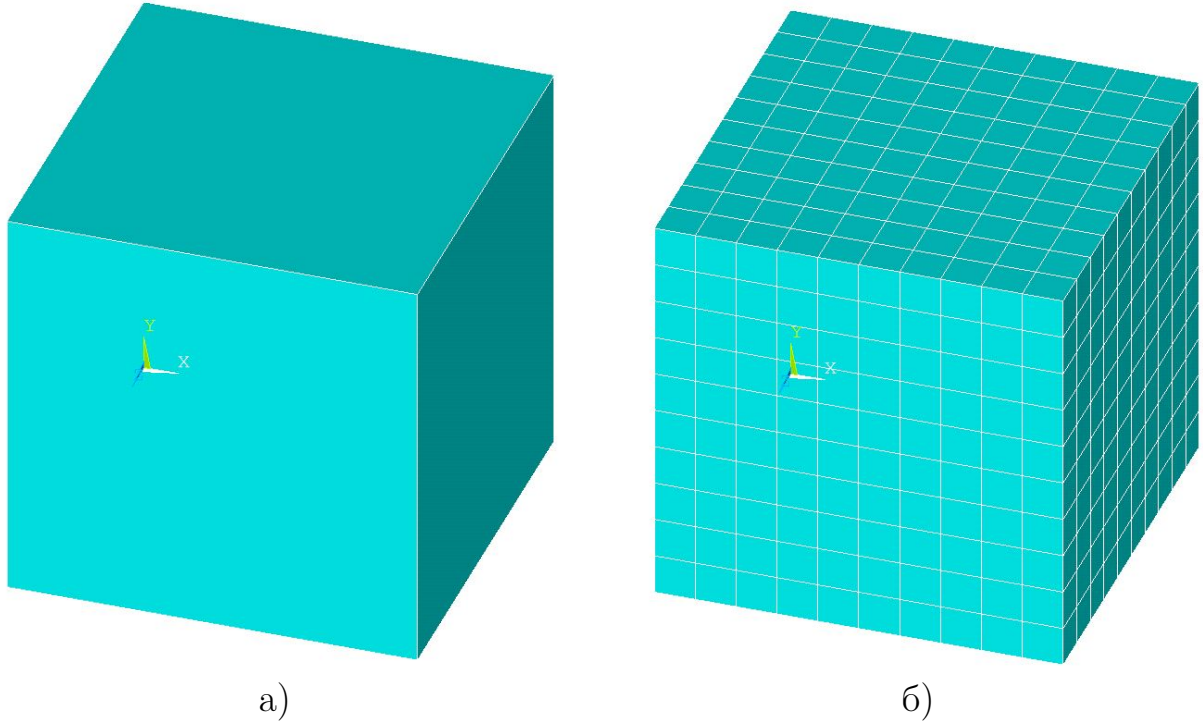


Рисунок 2.7 — Модельные конечно-элементные сетки для сплошной области: а) и б) – макрообъёмный и микрообъёмные конечные элементы, соответственно.

Выражение для работы внешних сил (*external forces*) в матричном представлении имеет вид [30]:

$$A_{ef} = \{d\delta\}^T \{P\} , \quad (2.24)$$

где  $\{d\delta\}$  – вектор бесконечно малых виртуальных перемещений,  $\{P\}$  – вектор усилий. Работа внутренних напряжений (*internal stresses*) аналогично может быть выражена формулой:

$$A_{is} = \int_V \{d\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV , \quad (2.25)$$

где  $\{d\varepsilon\}$  – вектор бесконечно малых виртуальных деформаций, а  $\{\sigma\}$  – вектор напряжений.

**Предположение 1.** Работа внутренних напряжений макрообъёмного конечного элемента равна сумме соответствующих работ микрообъёмных конечных элементов:

$$A_{is} = \sum_i A_{is}^i. \quad (2.26)$$

Используя данное соотношение, выражение (2.25) может быть переписано в виде:

$$A_{is} = \sum_i \int_{V_i} \{d\varepsilon_i\}^T \{\sigma_i\} dV. \quad (2.27)$$

**Ограничение 1.** Область определена однородным материалом, следовательно, каждому микрообъёму соответствуют одинаковые механические параметры среды:

$$[D_i] = [D_j] = [D] \text{ при } i \neq j, \quad (2.28)$$

где  $[D]$  – матрица упругих постоянных.

Приравнивая правые части уравнений (2.25) и (2.27) и подставляя в полученное равенство выражения для деформаций (2.9) и напряжений (2.12), с учётом первого ограничения (ф-ла (2.28)) приходим к соотношению:

$$\begin{aligned} \int_V \{d\delta\}^T [B]^T [D] [B] \{\delta\} dV = \\ = \sum_i \int_{V_i} \{d\delta_i\}^T [B_i]^T [D] [B_i] \{\delta_i\} dV, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где  $[B]$  – матрица дифференцирования.

Вектор перемещений в узлах  $i$ -ого конечного элемента может быть выражен через глобальный вектор узловых перемещений следующим образом:

$$\{\delta_i\} = [N_i] \{\delta\}, \quad (2.30)$$

где  $[N_i]$  – матрица функций формы, соответствующих  $i$ -ому конечному элементу. Подставим данное выражение в равенство (2.29) и вынесем из-под знака интеграла независимые от пространственных координат множители  $\{d\delta\}$ ,  $\{\delta\}$  и  $[N_i]$ :

$$\begin{aligned} \{d\delta\}^T \cdot \int_V [B]^T [D] [B] dV \cdot \{\delta\} = \\ = \{d\delta\}^T \sum_i \left( [N_i]^T \cdot \int_{V_i} [B_i]^T [D] [B_i] \{\delta_i\} dV \cdot [N_i] \right) \{\delta\}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Сокращая слева и справа на векторы  $\{d\delta\}$  и  $\{\delta\}$ , получим:

$$\int_V [B]^T [D] [B] dV = \sum_i \left( [N_i]^T \cdot \int_{V_i} [B_i]^T [D] [B_i] dV \cdot [N_i] \right). \quad (2.32)$$

Далее введём в рассмотрение известное соотношение для вычисления матрицы жёсткости сплошного конечного элемента [30]:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV. \quad (2.33)$$

В силу непрерывности функций формы, аппроксимирующих поле перемещений внутри области конечного элемента, данный интеграл по макрообъёму равен сумме соответствующих интегралов по микрообъёмам:

$$[K] = \sum_i \int_{V_i} [B]^T [D] [B] dV = \sum_i [K_{V_i}], \quad (2.34)$$

где  $[K_{V_i}]$  – элемент интегральной суммы, соответствующий  $i$ -ому микрообъёму.

**Ограничение 2.** Геометрические размеры всех микрообъёмов равны между собой:

$$V_i = V_j \text{ при } i \neq j. \quad (2.35)$$

В силу инвариантности подынтегрального выражения в формуле (2.33) относительно параллельного сдвига осей локальной системы координат и с условием выполнения второго ограничения (ф-ла (2.35)) матрицы жёсткости всех микрообъёмных конечных элементов оказываются равными между собой:

$$[K_i] = \int_{V_i} [B_i]^T [D] [B_i] dV = [\tilde{K}]. \quad (2.36)$$

Используя соотношения (2.34) и (2.36), равенство (2.32) приводится к виду:

$$\sum_i [K_{V_i}] = \sum_i [N_i]^T [\tilde{K}] [N_i]. \quad (2.37)$$

Таким образом, результирующая формула (2.37) доказывает равенство между интегральными суммами матрицы жёсткости сплошного макрообъёмного конечного элемента и суммой интегралов матриц жёсткости микрообъёмных конечных элементов с учётом всех установленных предположений (пред. 1) и ограничений (огр. 1, огр. 2).

Следует также отметить, что в случае численного расчёта исходной области непрямоугольной геометрии выбор метода для отыскания интегральных сумм макрообъёмного конечного элемента (ф-ла (2.34)) определяет точность результатов и сходимость подхода в целом. Более того, равенство микрообъёмов (огр. 2) не является обязательным условием и введено в ходе обоснования лишь для простоты сопутствующих выкладок. Такая процедура осуществлялась с целью установления визуального соответствия между конечно-элементным ансамблем и сеткой данных компьютерной томографии: в этом случае каждый конечный элемент занимает объём определённого вокселя исходного изображения.

Далее перейдём к рассмотрению несплошной области (рис. 2.8), геометрия которой соответствует исходной (рис. 2.7). Данный объём аналогичным образом может быть сегментирован на конечное число подобъёмов (рис. 2.8б). В этом случае из начальной сетки исключаются конечные элементы, соответствующие пренебрежительно малой жёсткости материала. Таким образом, каждый микрообъём полученного конечно-элементного ансамбля описывается одной и той же сплошной однородной средой, оказывающей ненулевое сопротивление внешнему силовому воздействию. Требуется обосновать, что матрица жёсткости макрообъёмного конечного элемента (рис. 2.8а) может быть вычислена методом взвешенного интегрирования с учётом структурной анизотропии, возникающей вследствие неоднородного распределения материала:

$$[\bar{K}] = \sum_j [K_{V_j}] , \quad (2.38)$$

где  $[K_{V_j}]$  – интегральные суммы, соответствующие микрообъёмам жёсткого материала расчётной среды. Таким образом, построение весовой функции необходимо проводить на основе значений, определяющих долю содержания твёрдого вещества в текущем объёме пространства (см. п. 2.1.2), а обоснование данного утверждения требует выполнения всех предположений (пред. 1) и ограничений (огр. 1, огр. 2), представленных для сплошной области.

**Предположение 2.** Работа внутренних напряжений совершается только в конечных элементах с ненулевой жёсткостью материала:

$$A_{is}^i \neq 0 \text{ при } [D_i] \neq [Z] , \quad (2.39)$$

где  $[D_i]$  – матрица упругих постоянных для  $i$ -ого микрообъёма области, а  $[Z]$  – нулевая матрица соответствующего размера.

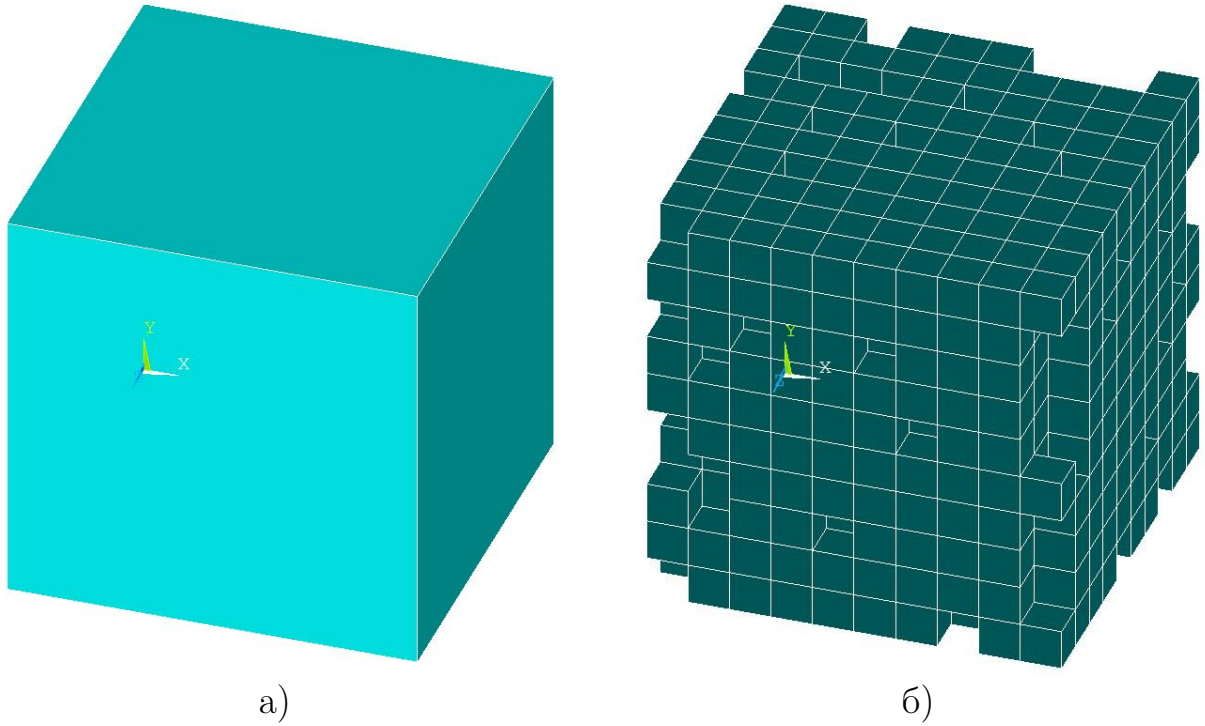


Рисунок 2.8 — Модельные конечно-элементные сетки для несплошной области: а) и б) – макрообъёмный и микрообъёмные конечные элементы, соответственно.

Из данного предположения следует, что в конечных элементах с несопротивляющимся материалом не возникают внутренние напряжения:

$$\{\sigma_i\} \neq 0 \text{ при } [D] \neq [Z]. \quad (2.40)$$

**Ограничение 3.** Неравномерность распределения материала в заданной области, определяющая условие структурной анизотропии, может быть описана следующим видом весовой функции:

$$\omega(\{r\}) = \begin{cases} 0, & \text{если } HU_{V_i} < \widehat{HU} \\ 1, & \text{если } HU_{V_i} \geq \widehat{HU} \end{cases}, \quad (2.41)$$

где  $HU_{V_i}$  – усреднённое значение единицы Хаунсфилда внутри  $i$ -ого микрообъёма, а  $\widehat{HU}$  – порог бинаризации, позволяющий проводить разделение среды на две фазы.

Используя введённое ранее выражение зависимости матрицы упругих постоянных от радиус-вектора пространственных координат (2.11), перепишем равенство работ внутренних напряжений (2.32) в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_V [B]^T [D] [B] \omega dV = \\ & = \sum_i \left( [N_i]^T \cdot \int_{V_i} [B_i]^T [D] [B_i] \omega dV \cdot [N_i] \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Применяя формулу (2.34) и исключая согласно третьему ограничению (ф-ла (2.41))  $i$ -ые слагаемые, соответствующие микрообъёмам с материалом незначительной жёсткости, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{V_j} [B]^T [D] [B] dV &= \\ &= \sum_j \left( [N_j]^T \cdot \int_{V_j} [B_j]^T [D] [B_j] dV \cdot [N_j] \right), \end{aligned} \quad (2.43)$$

откуда, на основе выражения (2.36), приходим к равенству:

$$\sum_j [K_{V_j}] = \sum_j [N_j]^T [\tilde{K}] [N_j]. \quad (2.44)$$

В силу выполнения первого (ф-ла (2.26)) и второго (ф-ла (2.39)) предположений и согласно полученному ранее соотношению (2.37) левая часть равенства (2.44) определяет матрицу жёсткости конечного элемента, построенного с учётом неравномерного распределения материала, что и требовалось обосновать.

## 2.3 Построение конечно-элементного ансамбля

Костные органы обладают сложной геометрией, особенности в восстановлении которой оказываются уникальными для каждого образца (см. п. 1.5). В этом случае построение конечно-элементной сетки предполагает решение топологически нетривиальной задачи. Аппроксимация геометрии для таких объектов может быть проведена несколькими способами, предполагающими предварительную бинаризацию данных компьютерной томографии.

### 2.3.1 Неортогональная сетка

Первый подход заключается в применении численных алгоритмов, позволяющих на основе данных о пространственном распределении некоторой



величины, в качестве которой, например, может быть выбрана плотность материала, восстановить образ объекта с заранее заданной точностью (см. п. 1.3.2). Следствием реализации такого метода оказывается охват объёмом отдельной ячейки (по вершинам которой впоследствии может быть построен конечный элемент) максимального (определённого точностью дискретизации сетки) количества вокселей, соответствующих костному материалу, а, значит, и исходной геометрии образца. В этом случае геометрия отдельного конечного элемента оказывается непрямоугольной, что определяет необходимость применения алгоритмов учёта принадлежности объёму элемента соответствующих квадратурных точек интегрирования (см. п. 2.2.3). На рисунке 2.9а представлены бинаризованные данные компьютерной томографии диафиза бедренной кости крысы. Изображение получено на основе промышленного компьютерного томографа. Геометрический размер области составлял  $4.21 \times 3.46 \times 5.89$  мм, размер вокселя –  $6.747 \times 6.747 \times 6.747$  мкм, количественный размер массива данных –  $624 \times 512 \times 874$  вокселя. На рисунках 2.9б и 2.9в представлены конечно-элементные сетки, построенные на основе применения численных алгоритмов в системе автоматизированного проектирования *Siemens NX*. Модели содержат 44 и 1200 элементов, соответственно.

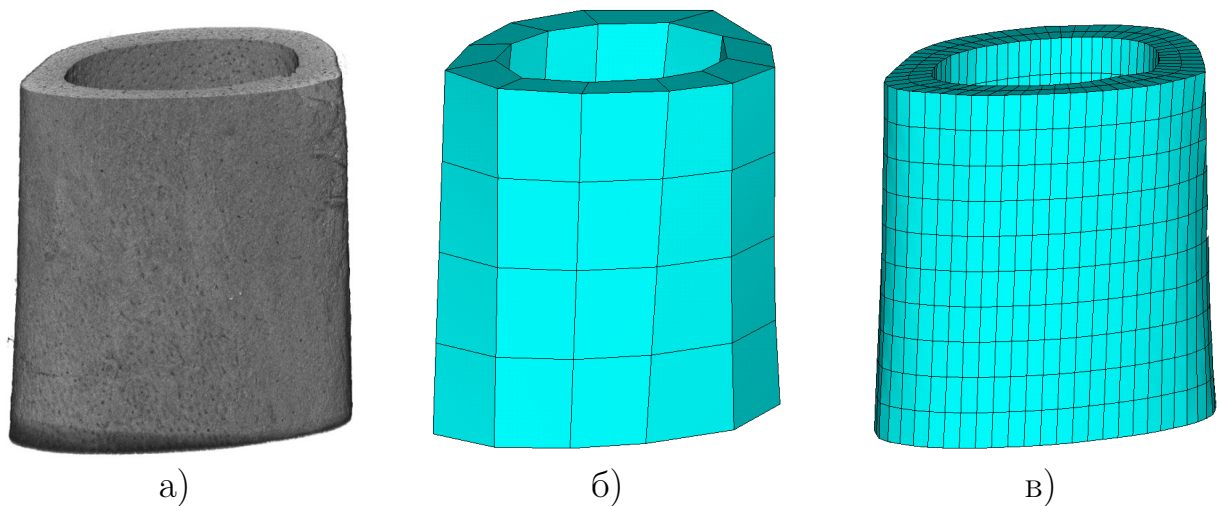


Рисунок 2.9 — Построение конечно-элементной сетки: а) – трёхмерное представление бинаризованных данных диафиза бедренной кости крысы; б) и в) – аппроксимация геометрии на основе численных алгоритмов.

### 2.3.2 Ортогональная сетка

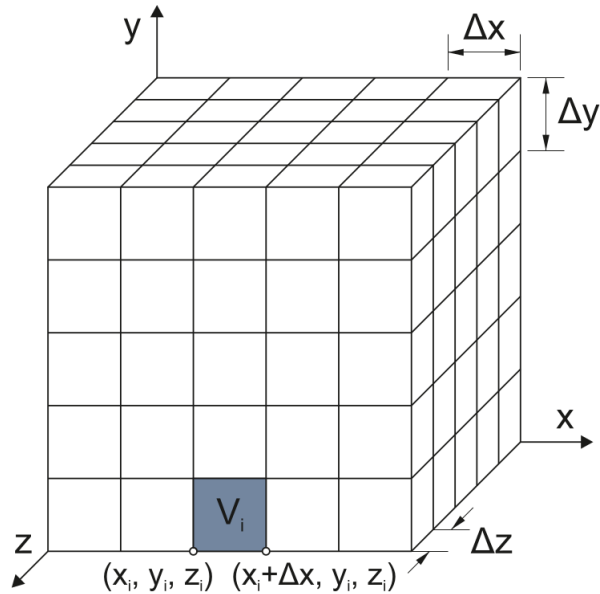


Рисунок 2.10 — Схема построения регулярной ортогональной конечно-элементной сетки.

Проведение компьютерной томографии предполагает восстановление изображения в прямоугольной области, полностью покрывающей объём сканируемого объекта. Сегментация полученного объёма может быть реализована путём наложения регулярной прямоугольной конечно-элементной сетки (рис. 2.10):

$$V_i : x \in [x_i; x_i + \Delta x], y \in [y_i; y_i + \Delta y], z \in [z_i; z_i + \Delta z]. \quad (2.45)$$

Здесь индекс  $i$  определяется диапазоном  $[1; N]$ , где  $N$  – количество конечных элементов исходной сетки. Второй приближенный метод восстановления геометрии образца предполагает удаление из полученной структурированной дискретизации подобъёмов с низким относительным содержанием твёрдого вещества:

$$MF_i = \frac{\sum_j dV_j}{V_i}, \quad dV_j \in V_i. \quad (2.46)$$

Здесь  $MF_i$  – доля содержания упругого материала (*material fraction*) в объёме  $i$ -го конечного элемента  $V_i$ , индекс  $j$  определяется диапазоном  $[1; M]$ , где  $M$  – количество микрообъёмов  $dV_j$ , соответствующих ненулевому содержанию твёрдого вещества. На рисунке 2.11 представлены микрообъёмы с

различной пористостью костного материала. В этом случае результатом выступает модель, построенная на основе прямоугольной конечно-элементной сетки заданной точности аппроксимации и пороговым процентным содержанием костной ткани.

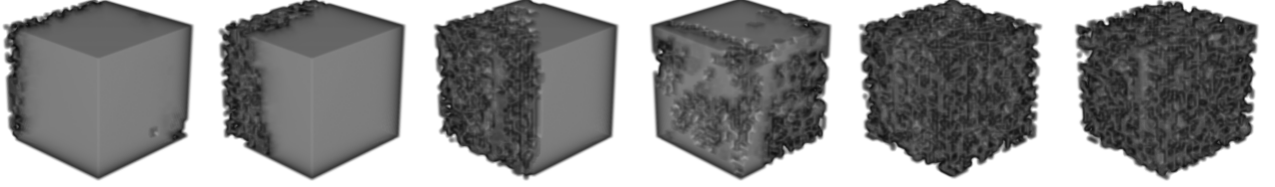


Рисунок 2.11 — Элементарные объёмы костной ткани, соответствующие различной плотности материала (расположены слева направо по возрастанию пористости).

На рисунке 2.12 представлены бинаризованные данные компьютерной томографии берцовой кости свиньи (минипига). Изображение получено на основе медицинского компьютерного томографа. Геометрический размер области составлял  $120.0 \times 120.0 \times 91.2$  мм, размер вокселя –  $0.2 \times 0.2 \times 0.2$  мм, количественный размер массива данных –  $600 \times 600 \times 456$  вокселей. Модель содержит 855 конечных элементов: фильтрация исходной регулярной сетки производилась путём удаления элементов с относительным содержанием костного вещества менее 5 %. Определение расчётной области может быть построено на основе следующих выражений:

$$V_{empt} = \cup_i V_i^{empt} , \quad (2.47a)$$

$$V_{matl} = V \setminus V_{empt} , \quad (2.47b)$$

где  $V_i^{empt}$  – объёмы, соответствующие конечным элементам с низким содержанием упругого материала ( $MF_i < 0.05$ ). Таким образом, полученная регулярная ортогональная сетка определяется областью  $V^0 = V_{matl}$ .

Таким образом, первый подход позволяет топологически более точно восстанавливать геометрию образца, но влечёт за собой значительные трудности в автоматизации алгоритма в силу нетривиальности и уникальности исходных изображений. Также к недостаткам данного метода можно отнести необходимость в проверке принадлежности квадратурных точек области интегрирования. Второй подход позволяет избежать трудностей, возникающих на этапе сегментации исходного изображения, так как предполагает восстановление геометрии не путём учёта её топологических особенностей, а на

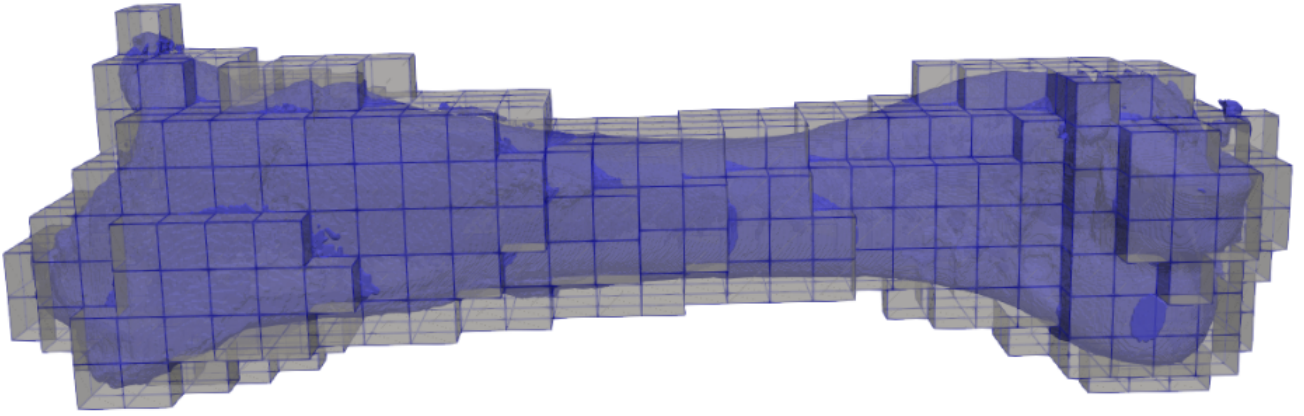


Рисунок 2.12 — Аппроксимация геометрии образца на основе построения регулярной сетки с последующим удалением элементов, соответствующих низкому содержанию кости.

основе данных о распределении плотности материала в объёме. Данный способ определяет возможность автоматизации процесса, что, при достаточном уровне дискретизации модели, предполагает приближённую аппроксимацию геометрии с возможностью интегрирования матрицы жёсткости элемента по прямоугольной области. Расширением второго подхода может выступать метод, основанный на приближении узлов конечного элемента к поверхности костного органа таким образом, чтобы объёмное содержание материала «фоновой» среды (воздуха) стремилось к минимуму. В этом случае может быть получена более точная аппроксимация геометрии, что, однако, приведёт к исключению возможности интегрирования по прямоугольной области.

Выбор одного из предложенных методов также позволяет реализовывать стратифицированную сегментацию изображения по слоям, что предполагает выделение областей, соответствующих различному виду костной ткани (кортикальная и губчатая костная ткань). Более того, каждый подход может быть дополнен с учётом особенностей данных компьютерной томографии алгоритмами, позволяющими с большей точностью описывать индивидуальную геометрию образца в силу особенностей её структурных составляющих. В данном случае могут быть рассмотрены вопросы связности геометрии, а также способы исключения «артефактов», соответствующих не интересующим с точки зрения вычислений участкам образца.

## 2.4 Восстановление механических свойств

На данный момент существует множество исследований, посвящённых как изучению структурных свойств образцов из неомогенных материалов, так и вопросам определения их прочностных характеристик [47; 69; 81; 225]. Рассмотрение линейных изотропных материалов предполагает определённую зависимость полученного решения от величины прикладываемого воздействия. В этом случае расчёты, проводимые кинематическим нагружением моделей, построенным по данным сканирования методом взвешенного интегрирования, позволяют восстанавливать значения модуля упругости Юнга и касательных модулей для образцов неоднородной структуры. Более того, тензор упругости, используемый при вычислении матрицы жёсткости конечного элемента (ф-ла (2.13)), также устанавливает линейную зависимость относительно модуля упругости Юнга (касательного модуля) материала:

$$[D] = [D(E_{matl})] , \quad (2.48a)$$

$$[K^e] = [K^e([D])] , \quad (2.48б)$$

где  $[D]$  – тензор упругих постоянных,  $E_{matl}$  – модуль упругости Юнга (касательный модуль) изотропного материала и  $[K^e]$  – матрица жёсткости конечного элемента сетки.

В качестве исходного значения механического параметра материала может быть принято произвольное значение, близкое к уже существующим данным в литературе. Дальнейший алгоритм основывается на проведении натурного эксперимента над образцом и получении соответствующего графика разрушения в осях перемещение/усилие (рис. 2.13). Линейность численной модели позволяет проводить расчёты для одной из точек, соответствующих диапазону перемещений из физического эксперимента, аппроксимируя значения в остальных точках прямой линией. Таким образом, проведение вычислений методом интегрирования по данным компьютерной томографии позволяет на основе двух значений (отсутствие нагружения и приложение определённого перемещения) определить соотношение между действительной величиной возникающего усилия, полученного из эксперимента, и моделируемой – определяемой численным расчётом. Искомая величина модуля упругости Юнга (касательного модуля), при фиксированном значении коэффициента Пуассона, может быть

определена аналогичным отношением к исходному значению:

$$k = \frac{F_{act}}{F_{eq}}, \quad (2.49a)$$

$$E_{matl} = kE_{init}, \quad (2.49б)$$

где  $F_{eq}$  – эквивалентное усилие, получаемое численным моделированием,  $F_{act}$  – действительная реакция, определяемая физическим испытанием,  $E_{matl}$  и  $E_{init}$  – истинный (соответствующий изотропному материалу) и исходный модули упругости Юнга (касательные модули), соответственно.

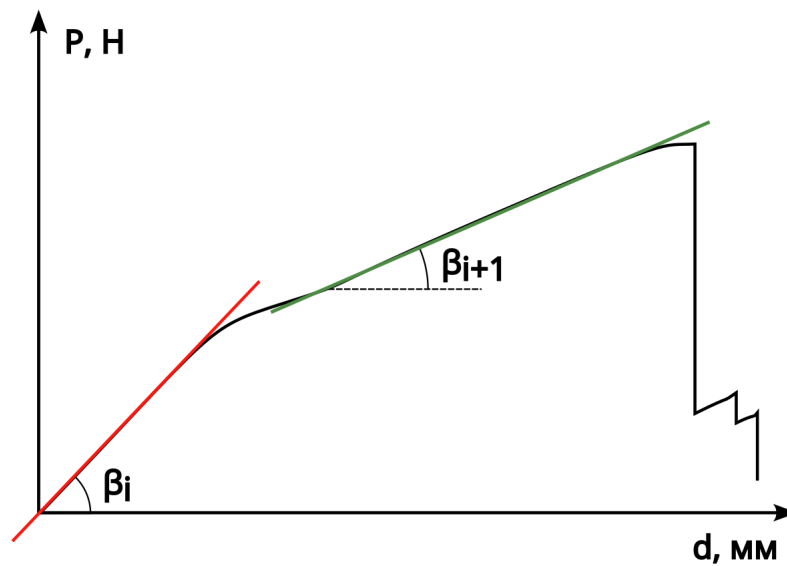


Рисунок 2.13 — Условная диаграмма разрушения образца: красным и зелёным цветом обозначены линейные участки нагружения.

Проведение натуральных экспериментов на каждом образце костного органа носит уникальный характер, что определяет необходимость в установлении линейных участков диаграммы разрушения образца в индивидуальном порядке. Таким образом, коэффициент отношения полученных результатов может быть определён на основе тангенса угла наклона касательной для соответствующих графиков (рис. 2.13):

$$k = \frac{\operatorname{tg}(\beta_i)}{\operatorname{tg}(\alpha)}, \quad (2.50)$$

где  $\beta_i$  – угол наклона касательной для  $i$ -го линейного участка диаграммы разрушения (каждому линейному участку соответствует отдельное значение механического параметра материала),  $\alpha$  – угол наклона касательной для решения, полученного численным моделированием.

## Выводы по главе 2

1. Воссоздание изображений исследуемой области предполагает получение массива значений, соответствующих данным о распределении проницаемости среды в объёме. На данный момент существуют различные подходы к интерпретации полученных таким образом значений. Установленные на основе проведения физических экспериментов зависимости между проницаемостью среды и плотностью материала позволяют использовать данные сканирования в численном моделировании с учётом пространственного распределения механических свойств образца, а методы постпроцессорной обработки результатов могут быть применены для выделения в исследуемом объёме различных фаз вещества. В случае моделирования костной ткани с учётом предположения о большем влиянии распределения материала, чем его свойств, построение цифрового двойника может быть проведено на основе двухфазной модели материала, которой соответствует бинаризованный массив исходных значений. В качестве алгоритма бинаризации данных для разделения соответствующих фаз материала (костная ткань и вещество в порах) может быть применён метод Оцу.
2. Численные модели, основанные на применении данных сканирования, позволяют учитывать особенности распределения механических характеристик в расчётном объёме. Один из таких подходов может быть реализован на основе метода конечных элементов, позволяющего проводить усреднение механических характеристик на уровне отдельного конечного элемента сетки. Предложенная методика взвешенного интегрирования локальной матрицы жёсткости предполагает применение данных с изображения, ограниченных пространственным расположением соответствующего конечного элемента, в качестве значений весовой функции, определяющей долю влияния жёсткости материала в текущем микроэлементе объёма (вокселе). Аналогичным образом проводится усреднение значений напряжённо-деформированного состояния, позволяющее проводить оценку прочностных параметров материала с учётом его пространственного распределения. Исследование соответствия системы координат отдельного конечного элемента

- и массива данных сканирования всего объекта позволяет прийти к выводу о целесообразности проведения интегрирования в системе координат, соответствующей структурным особенностям восстановленных изображений согласно технологическим параметрам сканирующего устройства. Обоснование допустимости предложенного метода прямого учёта свойств материала при построении численной модели на основе метода конечных элементов может быть проведено введением в рассмотрение равенства работ внешних сил и внутренних напряжений на выбранном участке с использованием предположений как о возможности представления работы соответствующего макрообъёма в качестве суммы работ микрообъёмов, так и о возникновении реакции в элементах, определяемых ненулевой долей содержания упругого материала.
3. Построение конечно-элементного ансамбля может проводиться как на основе сглаженных аппроксимаций геометрии по данным о распределении плотности материала, так и методом исключения из исходной прямоугольной сетки элементов с низким содержанием упругого вещества. Применение фильтрации оказывается наиболее подходящим для автоматизации процесса сегментации исходной области, а также исключает необходимость в точном описании топологических особенностей геометрии образца. Исследования на основе построения обоих типов конечно-элементных сеток позволяют провести оценку сходимости численной методики в рамках моделирования образцов костных органов, состоящих из кусочно-однородного материала пористой структуры, с учётом анизотропии механических свойств на уровне отдельного конечного элемента.
  4. Установленная линейная зависимость результатов численного моделирования относительно величины прикладываемого воздействия позволяет восстанавливать значения механических параметров на основе данных с изображений исследуемой среды. В качестве таких параметров могут рассматриваться модуль упругости Юнга и касательные модули материала. Коэффициент пропорциональности между расчётным значением механических характеристик и действительным может быть установлен на основе результатов проведения вычислительного и натурального экспериментов в виде соотношения между моделируемой и реальной величиной возникающего усилия.



## Глава 3. Проведение численных экспериментов

### 3.1 Постановка задачи

#### 3.1.1 Общие положения

Механическое поведение системы, соответствующей объёму  $V$  в трёхмерном пространстве  $R^3$  с заданной границей  $\partial V$ , в терминах линейной теории упругости описывается на основе следующих соотношений [31; 65—67; 71]. Уравнения равновесия имеют вид:

$$\nabla_i \sigma_{ij} = 0 : \quad \forall \{r\} \in V^0, \quad (3.1)$$

где  $\{\nabla\}$  – оператор набла,  $[\sigma]$  – тензор напряжений,  $\{r\}$  – вектор координат и  $V^0$  – объём занимаемого пространства  $V$  с соответствующей границей  $\partial V$  (рис. 3.1):

$$V^0 = V \cup \partial V. \quad (3.2)$$

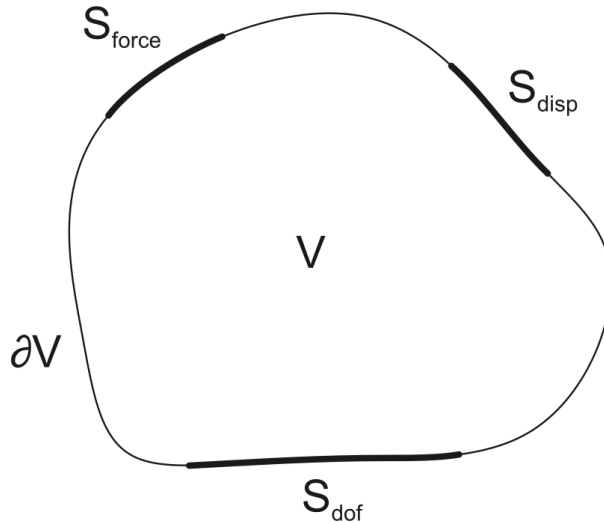


Рисунок 3.1 — Схема постановки задачи.

Уравнения Коши выражаются соотношениями:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_k}{\partial r_l} + \frac{\partial u_l}{\partial r_k} \right) = \frac{1}{2} (\partial u_{k,l} + \partial u_{l,k}) : \quad \forall \{r\} \in V^0, \quad (3.3)$$

где  $[\varepsilon]$  – тензор упругих деформаций и  $\{u\}$  – вектор перемещений.

Обобщённый закон Гука может быть представлен в виде равенства:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} : \quad \forall \{r\} \in V^0, \quad (3.4)$$

где  $[C]$  – тензор упругих постоянных четвёртого ранга.

Кинематические граничные условия могут быть определены как отсутствием перемещений на поверхности закрепления  $S_{dof}$ :

$$\{u(\{r\})\} = 0 : \quad \forall \{r\} \in S_{dof}, \quad (3.5)$$

так и приложением заданного вектора перемещений  $\{u_0\}$  на поверхности  $S_{disp}$ :

$$\{u(\{r\})\} = \{u_0\} : \quad \forall \{r\} \in S_{disp}, \quad (3.6)$$

где поверхность кинематического нагружения определяется областью:

$$S_{kinem} = S_{dof} \cup S_{disp}. \quad (3.7)$$

Статические граничные условия выражаются на основе нормали  $\{n\}$  к поверхности нагружения  $S_{stat}$  и определяются как отсутствием напряжений на свободной границе  $S_{free}$ :

$$\sigma_{ij} n_i = 0 : \quad \forall \{r\} \in S_{free}, \quad (3.8)$$

так и приложением распределённого по поверхности  $S_{force}$  усилия:

$$\sigma_{ij} n_i = q_j : \quad \forall \{r\} \in S_{force}, \quad (3.9)$$

где  $\{q\}$  – вектор давления, на основе которого могут быть получены компоненты вектора реакции на эквивалентную силу:

$$\{F\} = \int_{S_{force}} \{q\} dS. \quad (3.10)$$

Поверхность статического нагружения соответствует области приложения статических граничных условий:

$$S_{stat} = S_{free} \cup S_{force}. \quad (3.11)$$

Поверхности кинематического и статического нагружения принадлежат внешней границе объёма  $V$ :

$$S_{kinem} \cup S_{stat} \in \partial V. \quad (3.12)$$

### 3.1.2 Нотация Фойгта

Симметрия тензоров напряжений  $[\sigma]$  и деформаций  $[\varepsilon]$  предполагает, что существует не более шести различных элементов. Таким образом, тензор упругих постоянных четвёртого ранга может быть переписан в виде:

$$C_{ijkl} \Rightarrow C_{\alpha\beta} . \quad (3.13)$$

Таким образом, обобщённый закон Гука (3.4) для анизотропного тела может быть записан в следующем виде:

$$\sigma_\alpha = C_{\alpha\beta} \varepsilon_\beta : \quad \forall \{r\} \in V^0 . \quad (3.14)$$

Тензор упругости изотропного материала представим на основе двух постоянных, определяющих упругие свойства:

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} , \quad (3.15)$$

где  $\lambda$  и  $\mu$  – постоянные Ламэ, которые могут быть выражены через модуль упругости Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  следующим образом:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} , \quad (3.16a)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} . \quad (3.16b)$$

### 3.1.3 Пространственное распределение свойств материала

Восстановление изображения исследуемой области предполагает построение массива значений, каждый элемент которого соответствует усреднённой величине проницаемости материала в текущем микрообъёме среды. Таким

образом, зависимость компонент тензора упругости  $[D]$  от вектора пространственных координат  $\{r\}$  может быть выражена следующим образом:

$$[D] = [D(\{r\})] : \quad \forall \{r\} \in V^0 . \quad (3.17)$$

Применение в расчётах бинаризованных изображений предполагает наличие двух фаз материала (ф-ла (2.41)):

$$[D(\{r\})] = \begin{cases} [D_1] : & \forall \{r\} \in V_1 \\ [D_2] : & \forall \{r\} \in V_2 \end{cases} , \quad (3.18)$$

где  $[D_1]$  и  $[D_2]$  – тензоры упругости, а  $V_1$  и  $V_2$  – объёмы, соответствующие материалам первой и второй фазы, соответственно. Следует отметить, что построение численных моделей, основанное на усреднённых значениях пространственного распределения свойств материала, предполагает постоянство механических параметров в пределах одного микрообъёма:

$$[D(\{r\})] = Const : \quad \forall \{r\} \in dV , \quad (3.19)$$

где  $dV$  – элементарный объём среды, размер которого определяется разрешающей способностью сканирующего устройства:

$$dV \in V . \quad (3.20)$$

### 3.2 Программная реализация алгоритма

Реализация численного алгоритма осуществлялась на основе языка программирования  $C++$ . Полученный программный комплекс позволяет проводить статические расчёты образцов из негетерогенных материалов на основе данных о распределении свойств материала, полученных путём проведения компьютерной томографии объекта. Вычисления предполагают решение прямой задачи в перемещениях на основе построения восьмиузлового изопараметрического конечного элемента с геометрией в виде гексаэдра и тремя степенями свободы в каждом узле (рис. 3.2).

В силу ресурсоемкости метода интегрирования средними прямоугольниками процесс вычисления матрицы жёсткости каждого конечного элемента

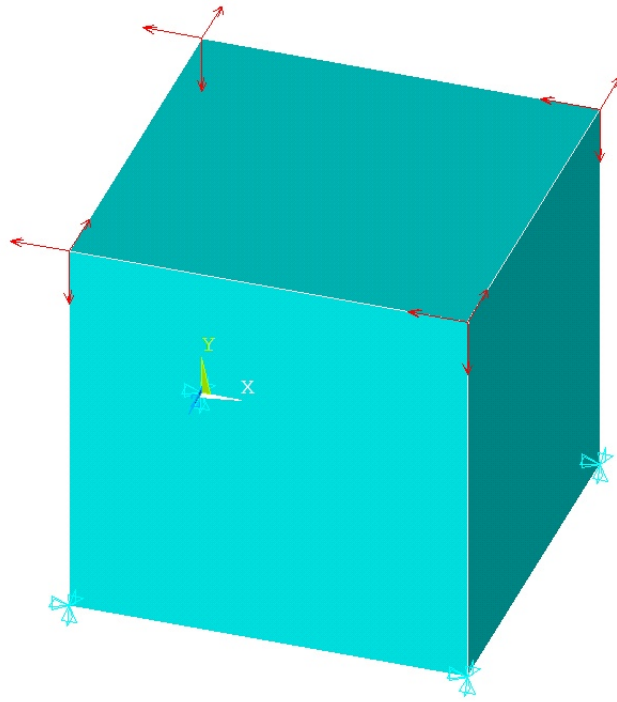


Рисунок 3.2 — Модель восьмиузлового конечного элемента с тремя степенями свободы в каждом узле.

был распределён на параллельные виртуальные потоки процессора. Реализация данной методики осуществлялась на основе применения технологии параллельного решения *OpenMP*, предназначенной для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью. Решение возникающей в рамках метода конечных элементов системы линейных алгебраических уравнений производилось на основе библиотеки линейной алгебры *Eigen*. В этом случае применялось разложение Холецкого без квадратного корня из разреженных самосопряжённых положительно определённых матриц с помощью модуля *Eigen::SimplicialLDLT*.

Численные расчёты проводились на компьютере со следующими техническими характеристиками: центральный процессор – *AMD Ryzen 7 1700* с 8 физическими и 16 логическими ядрами с частотой 3.7 ГГц, оперативная память – *G.Skill Aegis 16GB DDR4 3000 16GISB K2 C16* с частотой 2933 МГц, системная плата – *MSI B350M MORTAR*. Нагрузка на логические ядра процессора распределялась равномерно и непрерывно и соответствовала 100 %.

Просмотр и предварительная обработка исходных данных с изображений (медицинской и промышленной компьютерной томографии) проводилась в программном обеспечении для визуализации и анализа данных компьютерной томографии и микроскопии *Avizo Software*. Построение конечно-элементных

сеток выполнялось как на основе собственного программного обеспечения, предназначенного для разбиения исходной прямоугольной области на регулярную сетку заданного размера с постоянным размером конечного элемента, так и с применением существующих программных пакетов: реализация сглаженных расчётных сеток на основе данных с изображений проводилась в системе автоматизированного проектирования *Siemens NX*, приложение соответствующих граничных условий – в универсальной программной системе анализа методом конечных элементов *Ansys*. Постпроцессорный анализ результатов производился на основе открытого графического кросс-платформенного пакета для интерактивной визуализации *ParaView*.

### 3.3 Сходимость сеточного метода

Оценка сходимости предложенной методики построения численной модели на основе взвешенного интегрирования матрицы жёсткости каждого конечного элемента сетки может быть проведена путём исследования влияния двух основных показателей, каждый из которых напрямую связан с разрешающей способностью компьютерного томографа и точностью дискретизации исходной геометрии образца. Такие параметры, в силу фиксированного размера исходных данных с изображения, оказываются взаимозависимыми: с одной стороны, количество вокселей внутри объёма каждого конечного элемента определяет точность метода интегрирования, так как узловые точки соответствуют их геометрическим центрам; с другой стороны, количество элементов сетки определяет точность аппроксимации исходной геометрии и выступает в качестве одного из основополагающих критериев сходимости метода конечных элементов.

#### 3.3.1 Сходимость метода интегрирования

Постоянное разрешение исходного изображения исследуемого образца приводит к необходимости в определении оптимального соотношения между

параметрами сходимости метода интегрирования (количеством узловых точек, соответствующих вокселям, и углом наклона граней элементов сетки) и точностью дискретизации численной модели на основе объёмного распределения исследуемого материала. Определение влияния каждого из таких параметров может быть получено на основе результатов проведения показательных задач, в рамках которых осуществляется независимое варьирование соответствующих значений.

### 3.3.1.1 Влияние размера исходного изображения

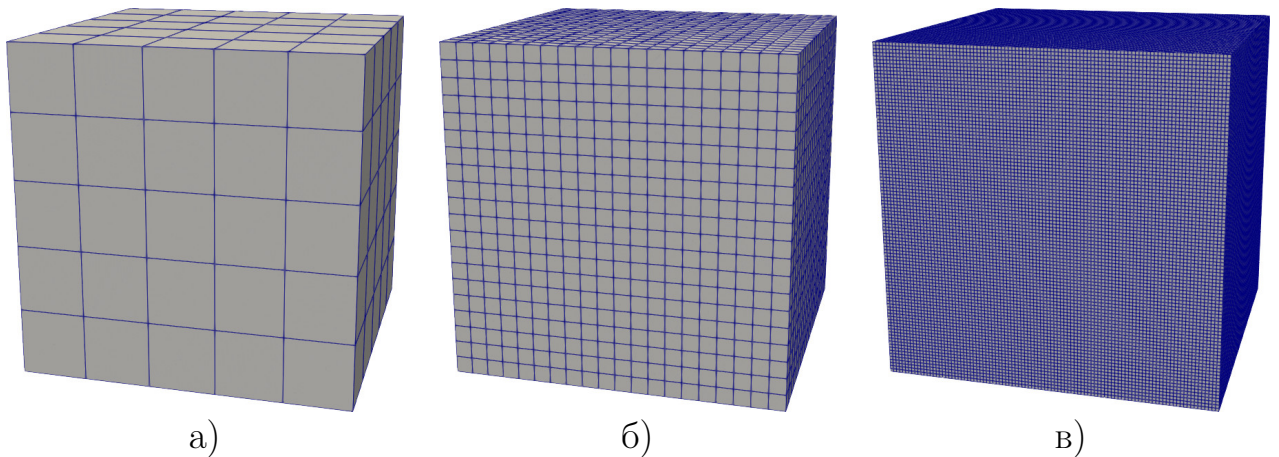


Рисунок 3.3 — Изменение плотности трёхмерной сетки вокселей: а), б) и в) — 5, 20 и 100 микрообъёмов на ребре куба, соответственно.

Влияние размера исходного изображения может быть исследовано путём проведения расчётов над численной моделью фиксированной геометрии, но с различным количеством точек интегрирования, соответствующих геометрическим центрам пространственных вокселей (рис. 3.3). Рассмотрим задачу (3.1), (3.3) и (3.4) в прямоугольной области, заданной одним конечным элементом (см. п. 2.2.1) с геометрией в виде куба (рис. 3.4):

$$V^0 : x, y, z \in [0; a] . \quad (3.21)$$

Перемещения узлов нижней поверхности фиксировались в направлении трёх координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\{u(x, y, z)\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{dof} , \quad (3.22)$$

где поверхность закрепления  $S_{dof}$  может быть описана как:

$$S_{dof} : y = 0, \forall x, z \in [0; a] . \quad (3.23)$$

К узлам верхней плоскости прикладывалась равномерно распределённая нагрузка (ф-ла (3.9)), направленная вдоль осей  $Oy$  или  $Ox$  (в силу симметрии геометрии выбор оси  $Oz$  приводит к идентичным результатам), что определяло моделирование сжатия (рис. 3.4, воздействие силы  $F_1$ ):

$$\{n\} = \{0, 1, 0\}^T , \quad (3.24a)$$

$$\{q\} = \{0, -q_1, 0\}^T , \quad (3.24б)$$

$$F_1 = - \int_{S_{force}} q_1 dS \quad (3.24в)$$

или сдвига (рис. 3.4, воздействие силы  $F_2$ ):

$$\{n\} = \{1, 0, 0\}^T , \quad (3.25a)$$

$$\{q\} = \{-q_2, 0, 0\}^T , \quad (3.25б)$$

$$F_2 = - \int_{S_{force}} q_2 dS , \quad (3.25в)$$

соответственно, где поверхность статического нагружения  $S_{force}$  может быть представлена в виде:

$$S_{force} : y = a, \forall x, z \in [0; a] . \quad (3.26)$$

На свободной поверхности  $S_{free}$  статические граничные условия отсутствовали:

$$\{q\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{free} , \quad (3.27)$$

где

$$S_{free} = \partial V \setminus (S_{dof} \cup S_{force}) . \quad (3.28)$$

Вариационным параметром выступала плотность заполнения расчётного объёма вокселями, устанавливающая количество узлов интегрирования методом средних прямоугольников. Значения весовой функции принимались равными единице, что исключало возникновение структурной анизотропии в силу неравномерного распределения параметров материала и, как следствие, определяло массив данных, соответствующий сплошному образцу с постоянным распределением физической величины. В этом случае компоненты тензора упругости  $[D]$  являлись постоянными величинами (ф-ла (3.17)):

$$[D (\{r\})] = Const . \quad (3.29)$$



Таким образом, варьируя количеством вокселей, производились расчёты на моделях с различной точностью описания распределения параметров материала при фиксированном физическом размере исходной геометрии.

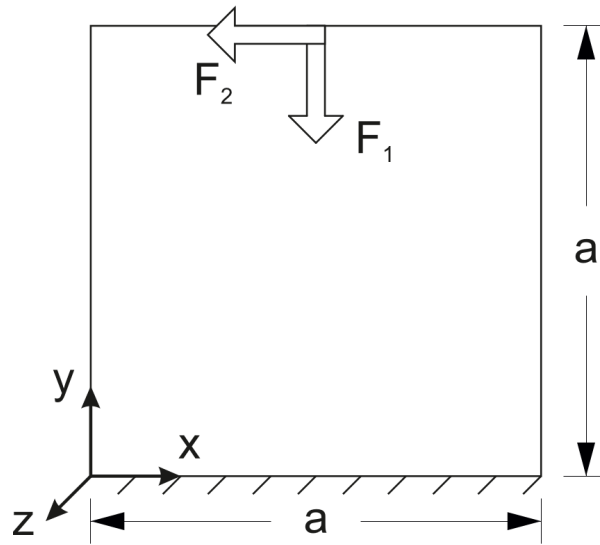


Рисунок 3.4 — Геометрия образца в проекции на плоскость  $Oxy$  с приложенными граничными условиями:  $F_1$  — сжимающая нагрузка;  $F_2$  — сдвигающее усилие.

В таблице 3.1 представлена выборка, определяющая зависимость количества узлов интегрирования на ребре рассматриваемой кубической геометрии элемента от физического размера вокселей (см. п. 2.2.1). Проводя интегрирование матрицы жёсткости конечного элемента методом средних прямоугольников путём вариации количества слагаемых в квадратурных формулах, точность полученных результатов расчёта может быть оценена на основе сравнения с решением методом Гаусса.

Таблица 3.1 — Вариация количества узлов интегрирования на ребре единичного куба постоянной величины относительно соответствующих значений размера вокселя.

$N_{FE}$	5	10	20	50	100	200
$S_{vox}$	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01	0.005

На рисунке 3.5 представлены результаты численного интегрирования. Графики относительной погрешности результатов показывают, что количество квадратурных точек (пространственная плотность данных с изображения) оказывает незначительное влияние (менее 0.1 %) на сходимость метода средних прямоугольников к методу Гаусса для прямоугольной геометрии, начиная с 20

вокселей на ребре куба. Таким образом, полученные данные о характере конвергентности интерполирующих функций позволяют сделать вывод о быстром приближении к асимптотическим значениям погрешности метода, а также подтверждают применимость подхода к интегрированию по данным компьютерной томографии образцов при установлении достаточного количества вокселей на стороне конечного элемента сетки в каждом из трёх ортогональных направлений локальной системы координат.

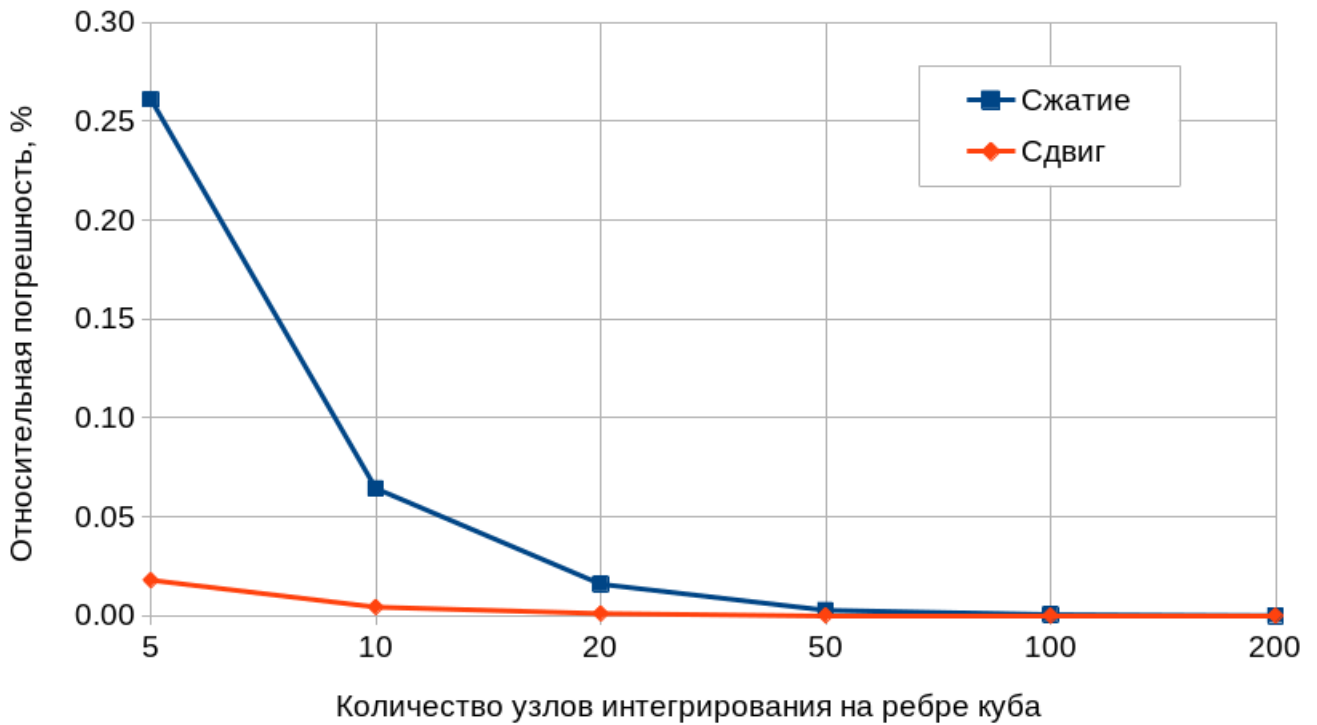


Рисунок 3.5 — Результаты численных расчётов: погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно решения, полученного методом Гаусса.

Графики, представленные на рисунке 3.6, отображают время вычислений, проводимых с учётом различного количества слагаемых в квадратурных формулах. Таким образом, в силу постоянного размера расчётной сетки, количество выполняемых операций прямо пропорционально количеству узлов интегрирования и соответственно равно для двух способов нагружения образца. Исходя из построенной кусочно-линейной интерполяции времени расчётов, можно сделать вывод о возникновении значительного роста продолжительности вычислений, начиная с 50 вокселей на ребре куба, что в совокупности с результатами анализа сходимости метода интегрирования позволяет определить допустимый

интервал для количества слагаемых в квадратурной сумме согласно диапазону  $[20; 50]$  в направлении трёх декартовых координатных осей.



Рисунок 3.6 — Результаты численных расчётов: время вычислений, соответствующее различному количеству узлов интегрирования.

### 3.3.1.2 Влияние геометрии расчётной области

Компьютерная томография натуральных образцов позволяет восстанавливать геометрию различной формы и топологии, что определяет её нетривиальность и индивидуальность (см. п. 1.3.1). В этом случае степень приближения расчётной сетки к исходному объёму образца определяет особенности интегрирования матрицы жёсткости каждого конечного элемента в отдельности. Таким образом, одной из задач вычисления оптимальных параметров метода интегрирования средними прямоугольниками выступает способ определения принадлежности вокселя текущему представительному объёму интегрирования, образованному геометрией элемента. Рассмотрим задачу, постановка которой соответствует пункту 3.3.1.1. Исходная геометрия, заданная одним конечным элементом, испытывает поворот против часовой стрелки

(положительное направление) вокруг оси  $Oz$ . Характеристикой вращения принимается угол  $\alpha$  (рис. 3.7). Построенная таким образом область может быть описана на основе следующих уравнений:

$$\begin{aligned}
 V^0 : f_{left}(x, y, z) &= y + \operatorname{ctg} \alpha \cdot x , \\
 f_{right}(x, y, z) &= f_{left}(x, y, z) - \frac{a}{\sin \alpha} , \\
 f_{lower}(x, y, z) &= y - \operatorname{tg} \alpha \cdot x , \\
 f_{upper}(x, y, z) &= f_{lower}(x, y, z) - \frac{a}{\cos \alpha} , \\
 \forall x &\in [-a \cdot \sin \alpha; a \cdot \cos \alpha] , \\
 \forall y &\in [0; a(\cos \alpha + \sin \alpha)] , \\
 \forall z &\in [0; a] ,
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

где  $f_{left}(x, y, z)$ ,  $f_{right}(x, y, z)$ ,  $f_{lower}(x, y, z)$  и  $f_{upper}(x, y, z)$  – внешние границы расчётного объёма  $V^0$ .

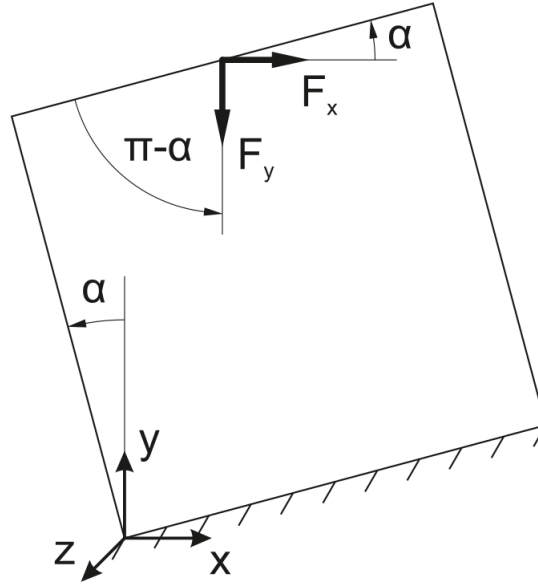


Рисунок 3.7 — Геометрия образца в проекции на плоскость  $Oxy$  с приложенными граничными условиями:  $F_x$  и  $F_y$  – компоненты прикладываемого усилия  $F$  в проекциях на оси  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно;  $\alpha$  – заданный угол поворота геометрии.

Перемещения узлов нижней поверхности фиксировались в направлении трёх координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\{u(x, y, z)\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{dof} , \tag{3.31}$$

где поверхность закрепления  $S_{dof}$  может быть описана как:

$$\begin{aligned} S_{dof} : f_{dof}(x, y, z) &= y - \operatorname{tg} \alpha \cdot x , \\ \forall y &\in [0; a \cdot \sin \alpha] , \\ \forall x &\in [0; a \cdot \cos \alpha] , \\ \forall z &\in [0; a] , \end{aligned} \quad (3.32)$$

где  $f_{dof}(x, y, z)$  – функция, определяющая геометрию  $S_{dof}$ .

Численные расчёты проводились для углов поворота  $\alpha$  в диапазоне  $[5; 40]$  градусов, исключая крайние положения, постановка задачи на основе которых полностью соответствовала предыдущему пункту (см. п. 3.3.1.1, ф-лы (3.21), (3.22), (3.24), (3.25) и (3.27)). Количество вокселей на стороне области, содержащей куб, устанавливалось равным 50, что соответствовало максимальному значению, оказывающему существенное влияние на точность метода интегрирования (рис. 3.5). На рисунке 3.7 представлена проекция геометрии конечного элемента на плоскость  $Oxy$ : прикладываемое усилие  $F$  раскладывалось на компоненты согласно соответствующим проекциям на оси  $Ox$  и  $Oy$  в зависимости от угла поворота граней вокруг оси  $Oz$ : сжимающей нагрузке соответствовали выражения

$$\{n\} = \{\sin \alpha, \cos \alpha, 0\}^T , \quad (3.33a)$$

$$\{q\} = \{q_1^x, -q_1^y, 0\}^T , \quad (3.33б)$$

$$\{F_1^x, F_1^y, 0\}^T = \int_{S_{force}} \{q_1^x, -q_1^y, 0\}^T dS , \quad (3.33в)$$

компоненты сдвигового усилия определялись уравнениями

$$\{n\} = \{\cos \alpha, \sin \alpha, 0\}^T , \quad (3.34a)$$

$$\{q\} = \{-q_2^x, -q_2^y, 0\}^T , \quad (3.34б)$$

$$\{F_2^x, F_2^y, 0\}^T = \int_{S_{force}} \{-q_2^x, -q_2^y, 0\}^T dS , \quad (3.34в)$$

где поверхность статического нагружения  $S_{force}$  может быть представлена в виде:

$$\begin{aligned} S_{force} : f_{force}(x, y, z) &= y - \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{a}{\cos \alpha} , \\ \forall x &\in [-a \cdot \sin \alpha; a(-\sin \alpha + \cos \alpha)] , \\ \forall y &\in [a \cdot \cos \alpha; a(\cos \alpha + \sin \alpha)] , \\ \forall z &\in [0; a] , \end{aligned} \quad (3.35)$$

где  $f_{force}(x, y, z)$  – функция, определяющая геометрию  $S_{force}$ . На свободной поверхности  $S_{free}$  статические граничные условия отсутствовали:

$$\{q\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{free} , \quad (3.36)$$

где

$$S_{free} = \partial V \setminus (S_{dof} \cup S_{force}) . \quad (3.37)$$

Осуществляя таким образом поворот постоянной геометрии образца, варьировалось количество вокселей, принадлежащих границам заданного объёма, что оказывало влияние на жёсткость конечного элемента при интегрировании соответствующей матрицы жёсткости.

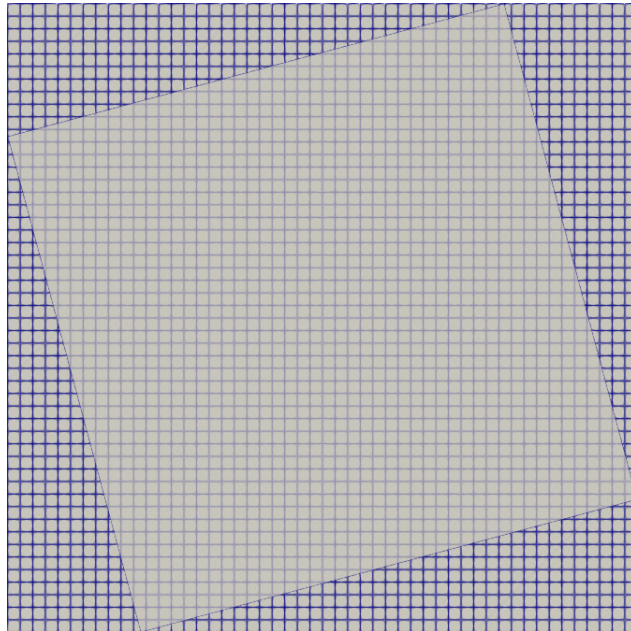


Рисунок 3.8 — Относительное расположение геометрии конечного элемента и сетки компьютерной томографии в проекции на плоскость  $Oxy$  (50 вокселей вдоль координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно; угол поворота вокруг оси  $Oz$  –  $15^\circ$ ).

Интегрирование локальной матрицы жёсткости производится в системе координат, связанной с сеткой данных компьютерной томографии операцией смещения относительно начальной позиции изображения (см. п. 2.2.3). Такая процедура позволяет напрямую определять из исходного массива данных как значения весовой функции, так и координаты узлов интегрирования по заданной области. В этом случае количество слагаемых в квадратурной сумме напрямую зависит от числа вокселей, принадлежащих объёму конечного элемента (рис. 2.4б). На рисунках 3.9 и 3.10 представлены графики относительной

погрешности для расчётов с захватом вокселя по геометрическому центру (синий цвет) и по его некоторой заданной окрестности (оранжевый цвет).

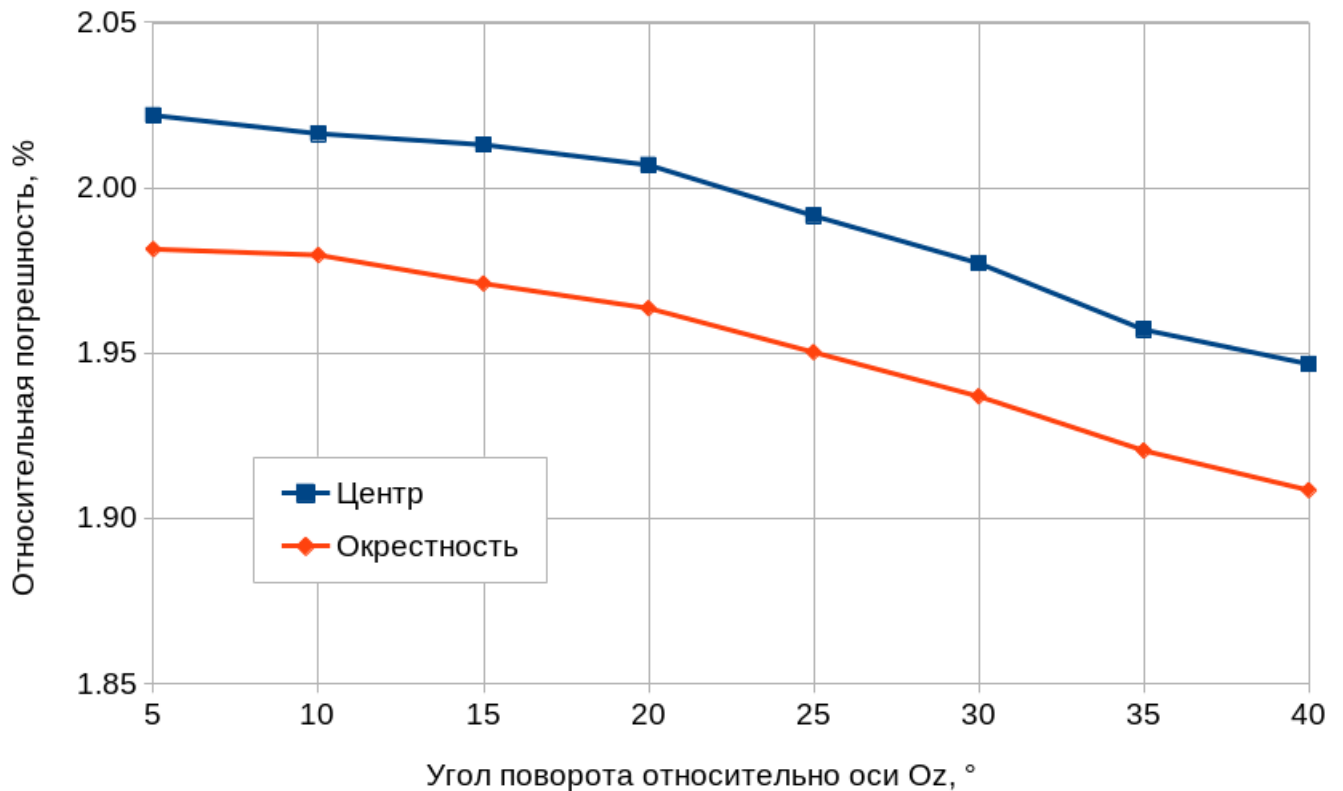


Рисунок 3.9 — Результаты численных расчётов (сжатие): погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно решения, полученного методом Гаусса.

Представленные графики сходимости результатов показывают, что при стремлении угла поворота к  $45^\circ$  относительная погрешность перемещений приближается к значениям, полученным для метода средних прямоугольников в системе координат, параллельной направлению ортогональных осей пространственного распределения данных компьютерной томографии (рис. 3.5). Следует также отметить, что значения, полученные на основе «захвата» вокселей по некоторой окрестности дают более точное решение (в пределах 0.05 %) относительно результатов, полученных путём включения микрообъёмов по их геометрическому центру.

Представленные на рисунках 3.9 и 3.10 результаты показывают, что относительная погрешность перемещений в зависимости от типа нагружения лежит в пределах 1-2 %, что позволяет сделать вывод о незначительном влиянии угла наклона геометрии конечного элемента относительно ортогональных осей

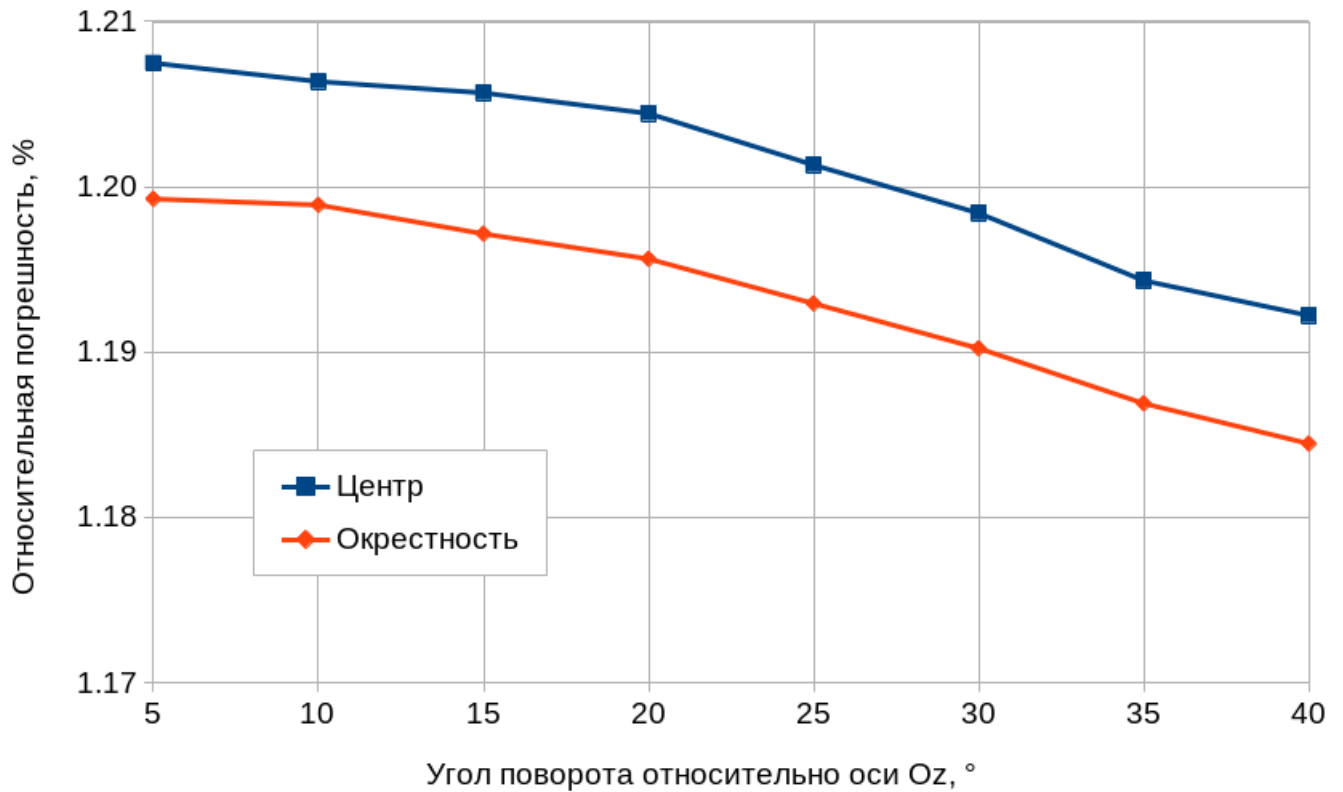


Рисунок 3.10 — Результаты численных расчётов (сдвиг): погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно решения, полученного методом Гаусса.

декартовой системы координат. Данный результат свидетельствует о возможности аппроксимации исходной области непрямоугольной сеткой, сглаженной относительно поверхности исследуемого образца.

### 3.3.2 Сходимость конечно-элементного ансамбля

Одним из основных показателей сходимости сеточного метода выступает определение характерного размера его представительных элементов. В этом случае предполагается, что исходный массив данных компьютерной томографии имеет фиксированный объём при постоянном физическом размере вокселей, что, в совокупности с выводами пунктов 3.3.1.1 и 3.3.1.2 накладывает ограничения на величину макрообъёма, соответствующего отдельному конечному элементу. Проведение таких численных экспериментов позволяет



определить влияние точности дискретизации исходной геометрии на сходимость метода конечных элементов.

Рассмотрим задачу (3.1), (3.3) и (3.4), соответствующую нагружению стержня квадратного поперечного сечения с одним характеристическим размером  $a$  (рис. 3.11):

$$V^0 : x, z \in [0; a], y \in [0; 5 \cdot a] . \quad (3.38)$$

Аналогично постановкам задач в пунктах 3.3.1.1 и 3.3.1.2, перемещения узлов нижней поверхности фиксировались в направлении трёх координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\{u(x, y, z)\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{dof} , \quad (3.39)$$

где поверхность закрепления  $S_{dof}$  может быть описана как:

$$S_{dof} : y = 0, \forall x, z \in [0; a] . \quad (3.40)$$

К узлам верхней поверхности прикладывалась равномерно распределённая нагрузка, соответствующая сжимающему давлению (рис. 3.11, воздействие силы  $F_1$ ):

$$\{n\} = \{0, 1, 0\}^T , \quad (3.41a)$$

$$\{q\} = \{0, -q_1, 0\}^T , \quad (3.41б)$$

$$F_1 = - \int_{S_{force}} q_1 dS \quad (3.41в)$$

и изгибающему усилию (рис. 3.11, воздействие силы  $F_2$ ):

$$\{n\} = \{1, 0, 0\}^T , \quad (3.42a)$$

$$\{q\} = \{-q_2, 0, 0\}^T , \quad (3.42б)$$

$$F_2 = - \int_{S_{force}} q_2 dS , \quad (3.42в)$$

где поверхность статического нагружения  $S_{force}$  может быть представлена в виде:

$$S_{force} : y = b, \forall x, z \in [0; a] . \quad (3.43)$$

На свободной поверхности  $S_{free}$  статические граничные условия отсутствовали:

$$\{q\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{free} , \quad (3.44)$$

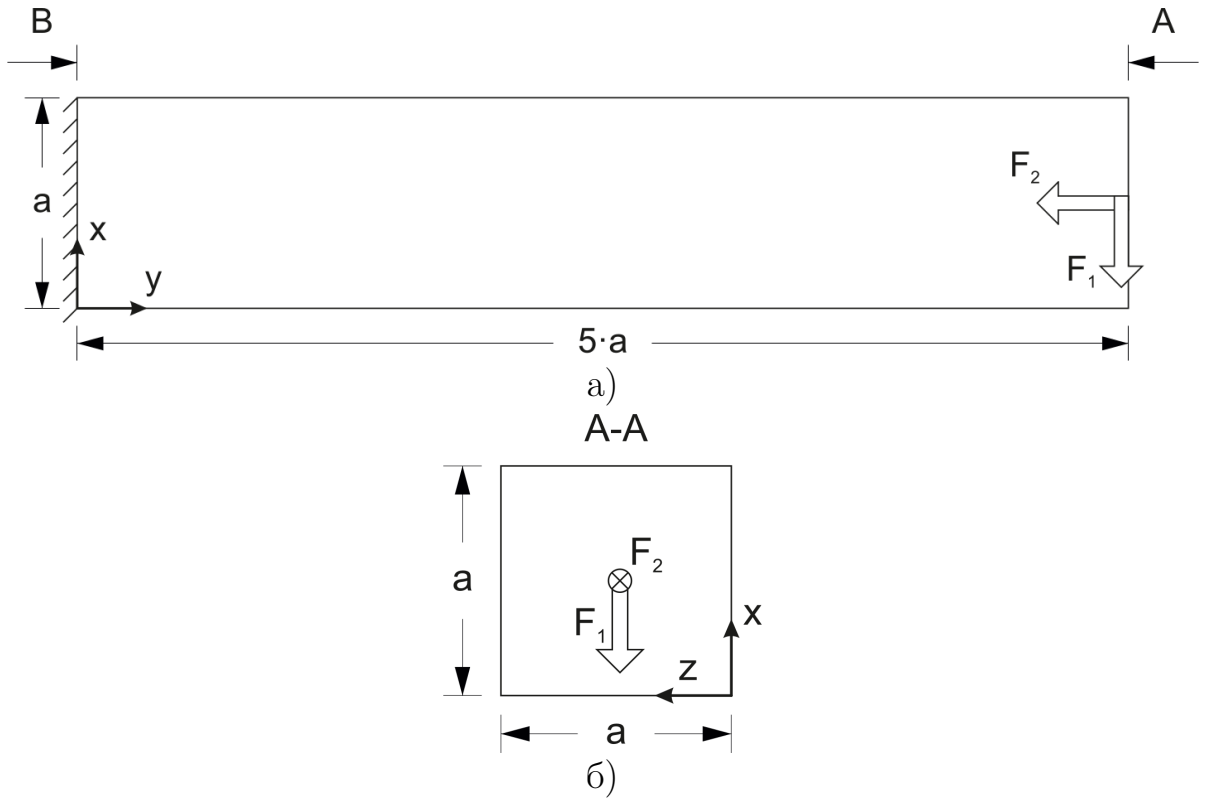


Рисунок 3.11 — Геометрия образца в проекциях на координатные плоскости с приложенными граничными условиями: а) — проекция на плоскость  $Oxy$  (сечение  $B-A$ ); б) — проекция на плоскость  $Oxz$  (сечение  $A-A$ ).

где

$$S_{free} = \partial V \setminus (S_{dof} \cup S_{force}) . \quad (3.45)$$

В качестве вариационного параметра рассматривалось количество конечных элементов, принадлежащих ребру куба заданной величины. На рисунке 3.12 представлены конечно-элементные сетки, соответствующие различной степени дискретизации исходной геометрии образца.

Зависимость точности дискретизации исходной геометрии относительно постоянного объёма данных компьютерной томографии представлена в таблице 3.2. Результирующее количество узлов интегрирования внутри макрообъёма соответствует диапазону  $[10; 80]$ , что определяет верхнюю и нижнюю границы для значений, оказывающих наибольшее влияние на сходимость метода интегрирования при относительно низком времени вычислений (см. п. 3.3.1.1, рис. 3.5). Аналогично постановкам задач в пунктах 3.3.1.1 и 3.3.1.2 тензор упругости принимался постоянной величиной:

$$[D(\{r\})] = Const . \quad (3.46)$$

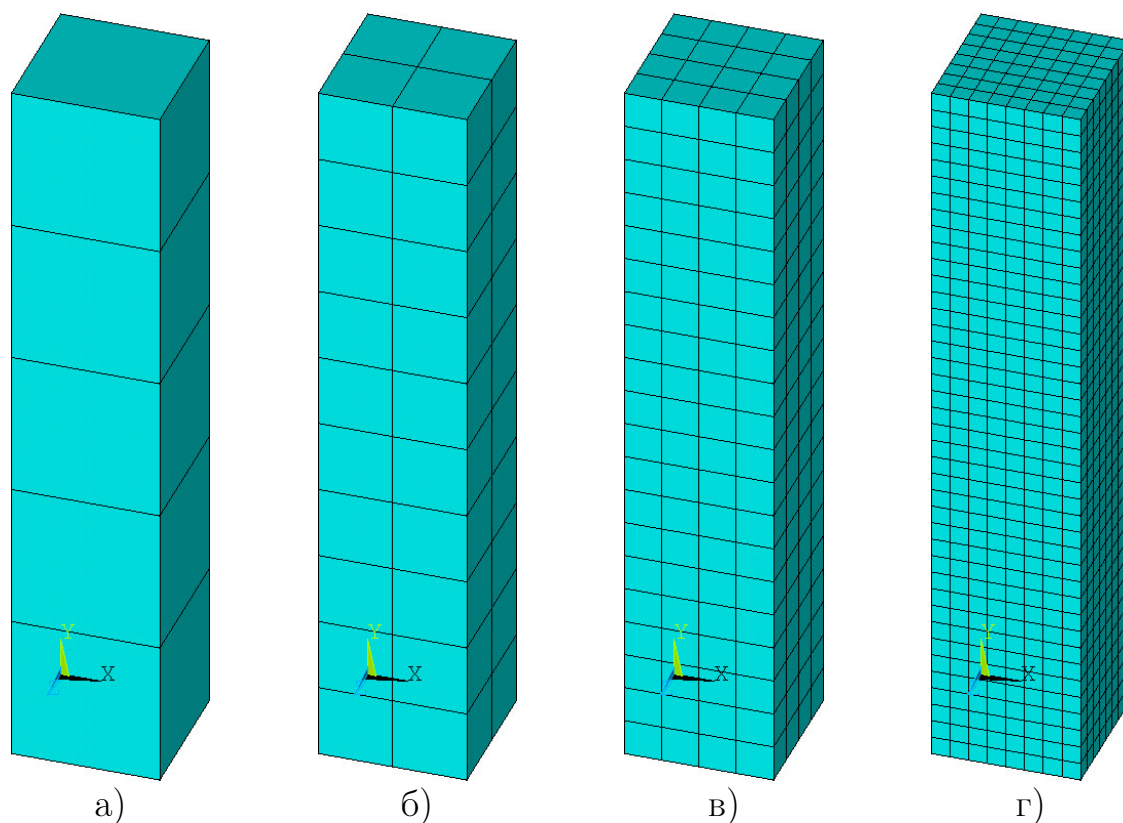


Рисунок 3.12 — Конечно-элементная сетка различной степени дискретизации: а), б), в) и г) – 1, 2, 4 и 8 конечных элементов на ребре куба характеристического размера, соответственно.

Таблица 3.2 — Вариация количества конечных элементов на ребре куба характеристического размера относительно соответствующего числа узлов интегрирования.

$N_{FE}$	1	2	4	8
$N_{vox}$	80	40	20	10

Анализ полученных результатов проводился на основе значений перемещений, усреднённых по узлам сетки поверхности статического нагружения. Численные эксперименты проводились как на основе модели, построенной методом взвешенного интегрирования локальной матрицы жёсткости, так и с применением программного пакета численного расчёта *Ansys*: в качестве типа элемента использовался восьмиузловой изопараметрический конечный элемент *Solid185* с линейной аппроксимацией геометрии, аналогичный упругому конечному элементу сплошной среды. Погрешность полученных перемещений вычислялась относительно решения, полученного аналитическим способом со-

гласно формулам:

$$\delta_y = \frac{Fl}{EA}, \quad (3.47a)$$

$$\delta_x = \frac{Fl^3}{3}, \quad (3.47b)$$

где  $\delta_y$  и  $\delta_x$  – перемещения точек нагруженной поверхности для сжатия и изгиба, соответственно;  $F$  – прикладываемое усилие,  $l$  – продольный размер стержня,  $E$  – модуль упругости Юнга,  $A$  – площадь поперечного сечения геометрии.

На рисунках 3.13 и 3.14 представлены графики сходимости результатов численных расчётов, полученных на основе двух способов моделирования, к аналитическому решению. В обоих случаях решение методом средних прямоугольников показывает аналогичную результатам решения в системе *Ansys* асимптотику. Величина погрешности не превышает 1 %, а относительная разница результатов – не более 0.01 % и 0.07 % для численных испытаний на сжатие и сдвиг, соответственно.

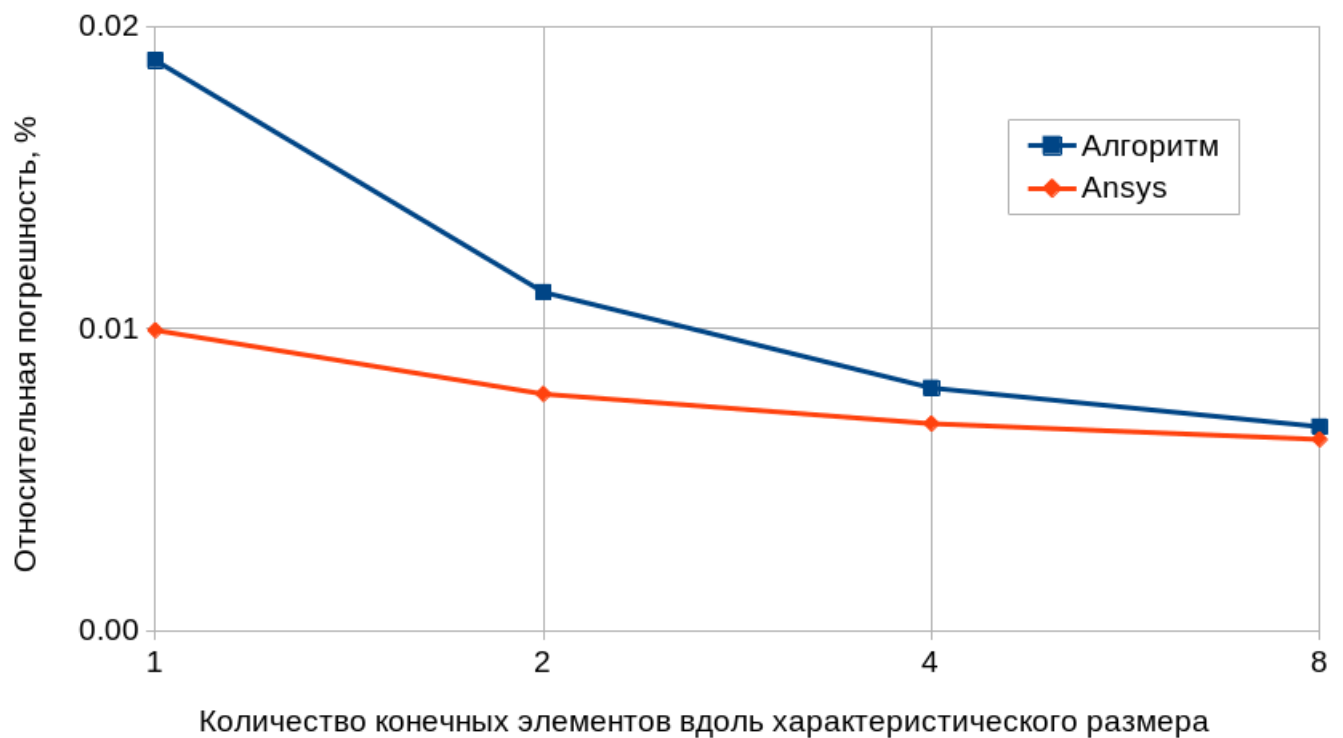


Рисунок 3.13 — Результаты численных расчётов (сжатие): погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно аналитического решения.

Представленные графики 3.13 и 3.14 демонстрируют достижение большей точности результатов при проведении испытаний на сжатие, чем на изгиб.

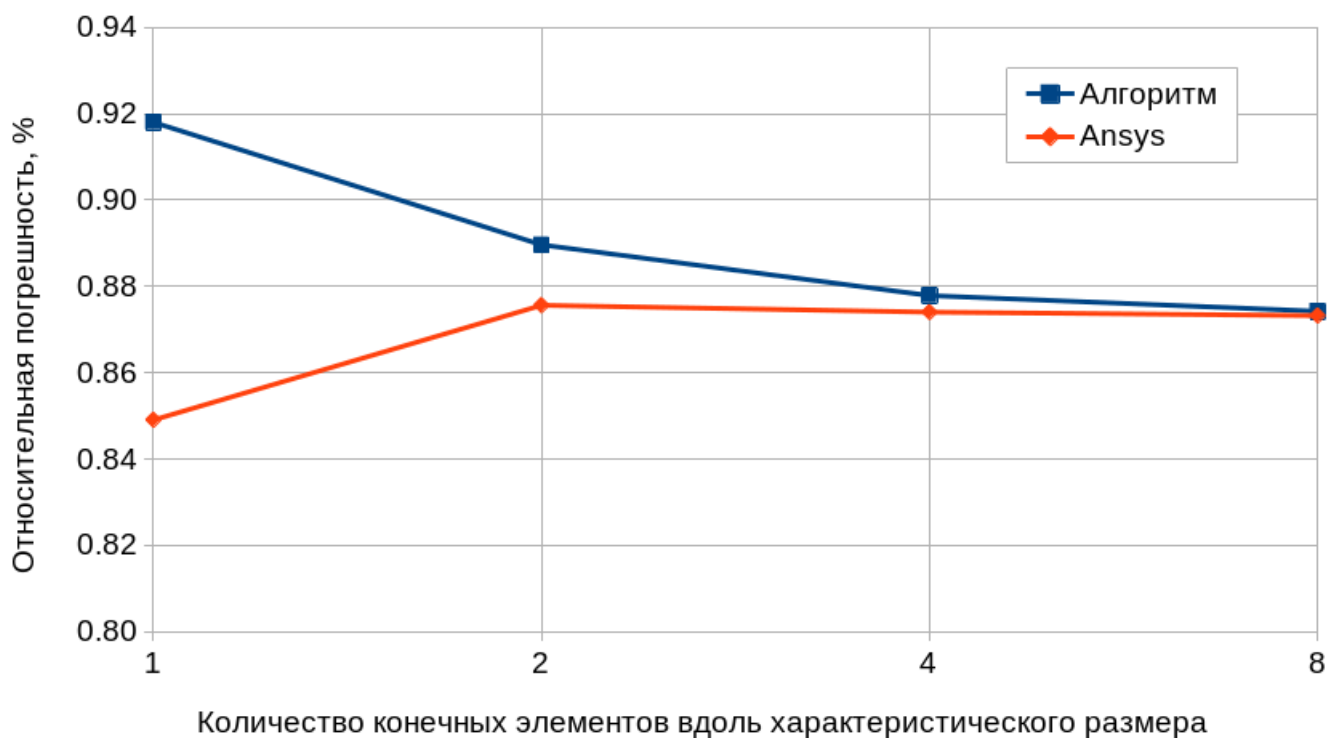


Рисунок 3.14 — Результаты численных расчётов (изгиб): погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно аналитического решения.

Рисунок 3.15 отображает рост времени вычислений относительно количества конечных элементов сетки. Постоянный объём массива данных компьютерной томографии определяет фиксированное число узлов интегрирования, вследствие чего увеличение расчётного времени объясняется в большей степени повышением размера глобальной матрицы жёсткости конечно-элементной сетки и, как следствие, размерности системы линейных алгебраических уравнений.

Анализ представленных данных показывает, что увеличение точности дискретизации геометрии оказывает незначительное влияние на сходимость конечно-элементного ансамбля при постановке задач в условиях прямоугольной геометрии и простых моделей нагружения. Таким образом, увеличение количества представительных объёмов позволяет с большей степенью достоверности описывать исходную геометрию области, а также увеличивать точность решения при рассмотрении напряжённо-деформированного состояния образца, что объясняется кусочно-линейным характером соответствующих аппроксимирующих функций.

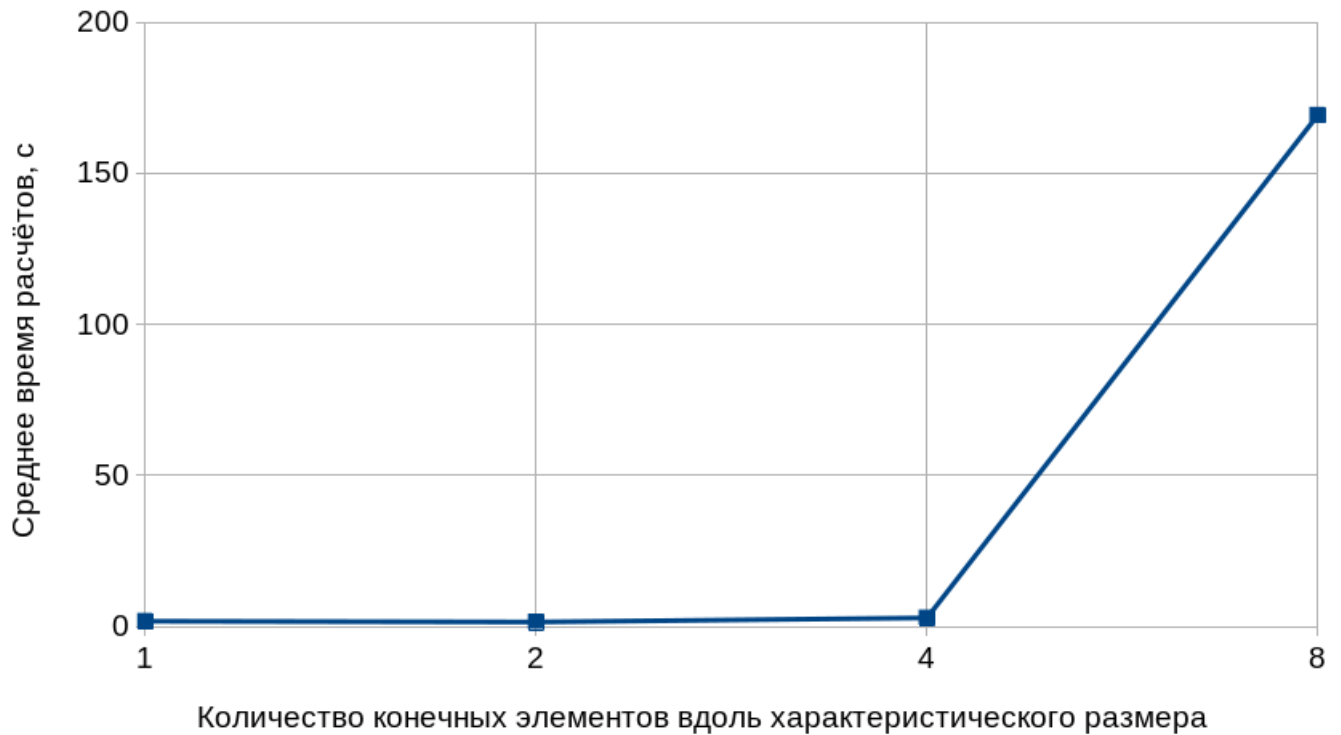


Рисунок 3.15 — Результаты численных расчётов: время вычислений, соответствующее различному количеству конечных элементов на ребре куба характеристического размера.

### 3.3.3 Сходимость метода прямого учёта анизотропных свойств

Применение взвешенного интегрирования методом средних прямоугольников в численном моделировании таких негомогенных пористых материалов, как костная ткань, предполагает, что структурное распределение трабекулярной кости оказывает большее влияние на анизотропию свойств, чем изменение её механических параметров (см. п. 1.4.3). Исключение влияния последнего может быть достигнуто путём бинаризации исходного массива данных с изображений. В этом случае первоначально негомогенный материал преобразуется в гетерогенный (двухфазный) – состоящий из твёрдого вещества, определяющего жёсткость конструкции, и «фонового», заполняющего промежуточное пространство (см. п. 2.1.2). Моделирование образцов подобной структуры может быть реализовано методом прямого моделирования, в основе которого каждому микрообъёму сплошной среды (вокселю) ставится в соответствие отдельный конечный элемент. Сходимость предложенного метода интегрирования методом средних прямоугольников по данным компьютерной томографии мо-

жет быть исследована на основе оценки влияния соответствующих значений весовой функции. Таким образом, проведение численного моделирования с использованием двух подходов позволяет получить анализ степени достоверности результатов расчётов при известном распределении материала в объёме.

Наиболее показательным подходом в этом случае оказывается рассмотрение двумерной постановки исследуемой задачи с определением третьего размера вдоль координатной оси  $Oz$  на порядок меньше размеров вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$ . Рассмотрим постановку, соответствующую уравнениям (3.1), (3.3) и (3.4). В качестве области нагружения использовалась прямоугольная геометрия в виде квадрата (рис. 3.16), представляющая собой проекцию на плоскость  $Oxy$  куба фиксированного размера (см. п. 3.3.1.1):

$$S^0 : x, y \in [0; a] . \quad (3.48)$$

Граничные условия соответствовали моделированию сжимающей нагрузки: перемещения узлов нижней линии сетки ограничивались в направлении двух координатных осей  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\{u(x, y)\} = 0 : \forall x, y \in L_{dof} , \quad (3.49)$$

где область закрепления  $L_{dof}$  может быть описана как:

$$L_{dof} : y = 0, \forall x \in [0; a] . \quad (3.50)$$

К узлам верхней линии прикладывалась равномерно распределённая сжимающая нагрузка, направленная вдоль оси  $Oy$ :

$$\{n\} = \{0, 1\}^T , \quad (3.51a)$$

$$\{q\} = \{0, -q_0\}^T , \quad (3.51b)$$

$$F_0 = - \int_{L_{force}} q_0 dS , \quad (3.51в)$$

где область статического нагружения  $L_{force}$  может быть представлена в виде:

$$L_{force} : y = a, \forall x \in [0; a] . \quad (3.52)$$

На свободном контуре  $L_{free}$  статические граничные условия отсутствовали:

$$\{q\} = 0 : \forall x, y \in L_{free} , \quad (3.53)$$

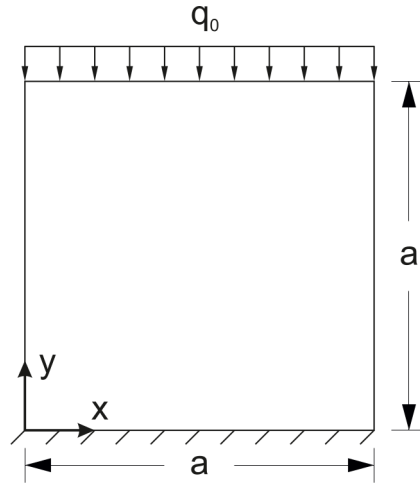


Рисунок 3.16 — Геометрия образцов с приложенными граничными условиями.

где

$$L_{free} = \partial S \setminus (L_{dof} \cup L_{force}) . \quad (3.54)$$

Численное моделирование проводилось на основе фиктивного массива данных с изображения, определяемого постоянным размером  $100 \times 100 \times 1$  вокселей (пикселей – в двумерном случае) вдоль направления соответствующих декартовых координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ . Прямое моделирование осуществлялось методом аппроксимации отдельного микрообъёма томографии одним конечным элементом. В этом случае численный расчёт сплошного образца предполагал построение сетки, состоящей из  $10^4$  конечных элементов. Свойства материала задавались значениями соответствующей фиктивной весовой функции, определяющей как наличие нескольких фаз внутри материала (рис. 3.17), так и их структурное распределение в заданном объёме образца (рис. 3.22). В отличие от постановок задач, рассматриваемых в пунктах 3.3.1 и 3.3.2, компоненты тензора упругости  $[D]$  зависели от вектора пространственных координат  $\{r\}$  и определялись следующими величинами (ф-ла (3.18)):

$$[D(\{r\})] = \begin{cases} [D_{matl}] : & \forall \{r\} \in V_{matl} \\ [Z] : & \forall \{r\} \in V_{empt} \end{cases} , \quad (3.55)$$

где  $[D_{matl}]$  – матрица, соответствующая заданному материалу, и  $[Z]$  – нулевая матрица. Объём  $V_{matl}$  определяет упругий материал,  $V_{empt}$  – его отсутствие (пустоту).

Моделирование заданного пространственного распределения материала может быть выражено на основе следующего представления в выражении (3.55)



объёмов  $V_{matl}$  и  $V_{empt}$ :

$$V_{empt} = \cup_i dV_i^{empt}, \quad (3.56a)$$

$$V_{matl} = V^0 \setminus V_{empt}. \quad (3.56b)$$

Здесь индексы  $i$  элементарных объёмов  $dV_i^{empt}$  определяются диапазоном  $[1; N]$ , где  $N$  – количество точек расчётной области  $V^0$ , построенных на основе геометрических параметров модели. Выбор соответствующих координат, устанавливающих область отсутствия твёрдого материала  $V_{empt}$ , задаётся структурными особенностями среды.

Вариационным параметром выступало количество конечных элементов на стороне квадрата (в направлении оси  $Oz$  степень аппроксимации была постоянной и соответствовала 1 вокселю и 1 конечному элементу, соответственно). Изменение размера расчётной сетки при фиксированном объёме искусственного массива данных томографии приводило к переменному числу узлов интегрирования внутри отдельного макрообъёма (см. п. 3.3.2). Зависимость степени дискретизации исходной геометрии относительно количества значений весовой функции представлена в таблице 3.3. Результирующее число узлов интегрирования внутри соответствующего представительного объёма определяется диапазоном  $[2; 100]$ , что устанавливает предельные значения для интегрирования методом средних прямоугольников.

Таблица 3.3 — Вариация количества конечных элементов на стороне квадрата относительно соответствующего числа узлов интегрирования.

$N_{FE}$	1	2	4	10	25	50
$N_{vox}$	100	50	25	10	4	2

Анализ полученных результатов проводился на основе вычисления погрешности перемещений в статически нагруженных узлах сетки (рис. 3.16, верхняя линия) относительно значений, полученных как аналитическим решением (для пористого образца), так и численным моделированием в системе *Ansys* (для обоих образцов) на основе конечного элемента типа *Solid185*, аналогично рассматриваемого в пункте 3.3.2. Данный способ исследования сходимости метода интегрирования с учётом весовых факторов, определяющих свойства материала в текущем микрообъёме, позволяет устанавливать влияние пространственного распределения расчётной среды с учётом варьирования размера конечно-элементной сетки. Таким образом, может быть получена

оценка сходимости результатов метода взвешенного интегрирования с данными прямого моделирования на основе проведения численных расчётов с заданным распределением материала дискретно-постоянных механических характеристик внутри исследуемой области.

### 3.3.3.1 Влияние многофазной неоднородности материала

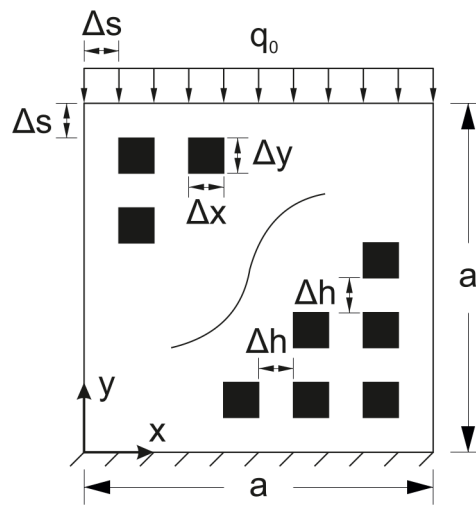


Рисунок 3.17 — Геометрия и внутренняя структура образца с примененными граничными условиями (равномерно распределённая пористость): ( $\Delta x$  и  $\Delta y$  — размер поры в направлении осей  $Ox$  и  $Oy$ , соответственно;  $\Delta h$  — расстояние между порами;  $\Delta s$  — толщина внешней сплошной стенки).

Исследование влияния равномерного заполнения материалом некоторой области на жёсткость образованной негомогенной среды может быть проведено на основе моделирования изображения, соответствующего двухфазному веществу, предполагающему наличие упругого материала и пустоты, описывающей поры, влияние возникающих сил реакции в которых пренебрежительно мало. Наиболее подходящим для изучения в этом случае оказывается использование сетки томографии, имеющей вид «шахматной доски», структурная составляющая которой отмечена на рисунке 3.17. Равномерное распределение пористости достигалось на основе следующих значений параметров:

$$\Delta x = \Delta y = \Delta s = \Delta h = \frac{a}{N - 1}, \quad (3.57)$$

где количество координатных точек  $N = 101$ . Элементарные объёмы  $dV_i^{empt}$ , соответствующие пустоте (ф-ла (3.56a)), определялись следующим образом:

$$dV_i^{empt} : x \in [x_i; x_i + \Delta x] , y \in [y_i; y_i + \Delta y] . \quad (3.58)$$

В этом случае негомогенные свойства среды устанавливались на основе изменения индексов  $i$  в диапазоне  $[2; N - 2]$  с шагом 2:

$$\{x_i, y_i\} : i = 2, 4, \dots, N - 2 . \quad (3.59)$$

Выбор нумерации координатных узлов таким образом предполагал равномерное распределение пористости во внутренней области и обеспечивал сплошную постоянную среду на границе.

Конечно-элементный ансамбль, применяемый для прямого моделирования сеткой максимального разрешения относительно размера томографии, может быть получен методом удаления конечных элементов, соответствующих вокселям с низким содержанием твёрдого вещества. Сохранение сплошности прикладываемых кинематических и статических граничных условий обеспечивалось постоянной границей размером в один воксел, состоящей из упругого материала. На рисунке 3.18 представлены расчётные сетки, используемые для решения на основе метода интегрирования с учётом весовых факторов. Стоит отметить, что в силу постоянного наличия, вне зависимости от размера конечных элементов, упругого материала внутри каждого макрообъёма, интегрирование локальной матрицы жёсткости всегда определялось ненулевыми значениями: во всех случаях, вплоть до разбиения границы области на 50 конечных элементов (рис. 3.18e), каждый микрообъём содержал не менее 50 % твёрдого вещества.

На рисунке 3.19 представлены графики погрешности перемещений узлов на верхней линии геометрии относительно решения, полученного в системе *Ansys*. Результаты показывают, что расхождение значений численного моделирования не превышает 9.5 % и в значительной степени стремится к нулю: при использовании 10 конечных элементов на стороне квадрата относительная погрешность составляет порядка 2 %. Такая сходимость данных в большей степени может быть объяснена линейной аппроксимацией поля перемещений конечного элемента, что накладывает ограничения на показатель дискретизации исходной геометрии [42, гл. 3, 4: пример].

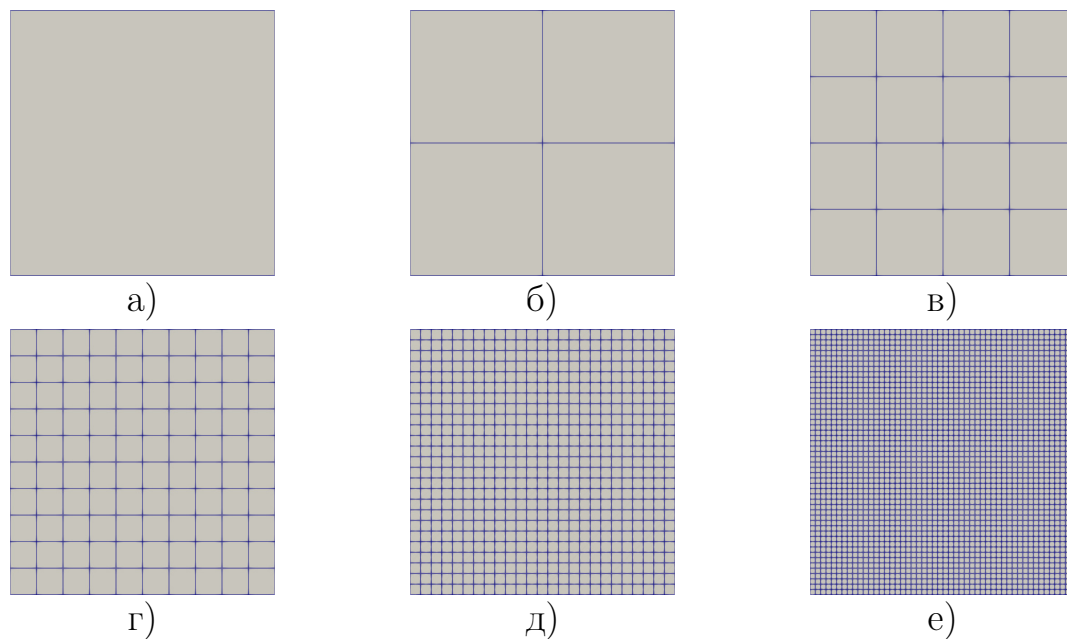


Рисунок 3.18 — Изменение размера конечно-элементной сетки для образца пористой структуры: а)-е) – 1, 2, 4, 10, 25 и 50 конечных элементов на стороне квадрата, соответственно.

Важно подчеркнуть, что представленные результаты численных расчётов позволяют определить концентраторы, возникающие в верхних угловых точках геометрии при использовании сеток с 25 и 50 конечными элементами на стороне квадрата, что оказывается причиной повышенных значений относительной погрешности (рис. 3.19, голубой и коричневый графики: образование пиковых значений на правой границе). Получение таких увеличенных (по модулю) значений объясняется как возникновением концентраторов напряжённо-деформированного состояния, так и неравномерным распределением материала внутри макрообъёмов на границе, что особенно выражается при небольших размерах конечного элемента относительно микрообъёма вокселя. Исключая диапазон данных, соответствующий подобным участкам с повышенным показателем ошибки, максимальные значения погрешности на достоверном промежутке могут быть отображены в виде графика 3.20. Таким образом, учитывая особенности сеточной сходимости при использовании линейной аппроксимации геометрии, а также в силу особой обработки результатов в угловых точках геометрии, решение, полученное методом взвешенного интегрирования по данным томографии пористого образца, позволяет сделать вывод о быстрой сходимости расчётов к результатам прямого моделирования, что объясняется наличием относительной погрешности порядка 2 % при дискретизации характеристического размера геометрии 10-тью конечными элементами.

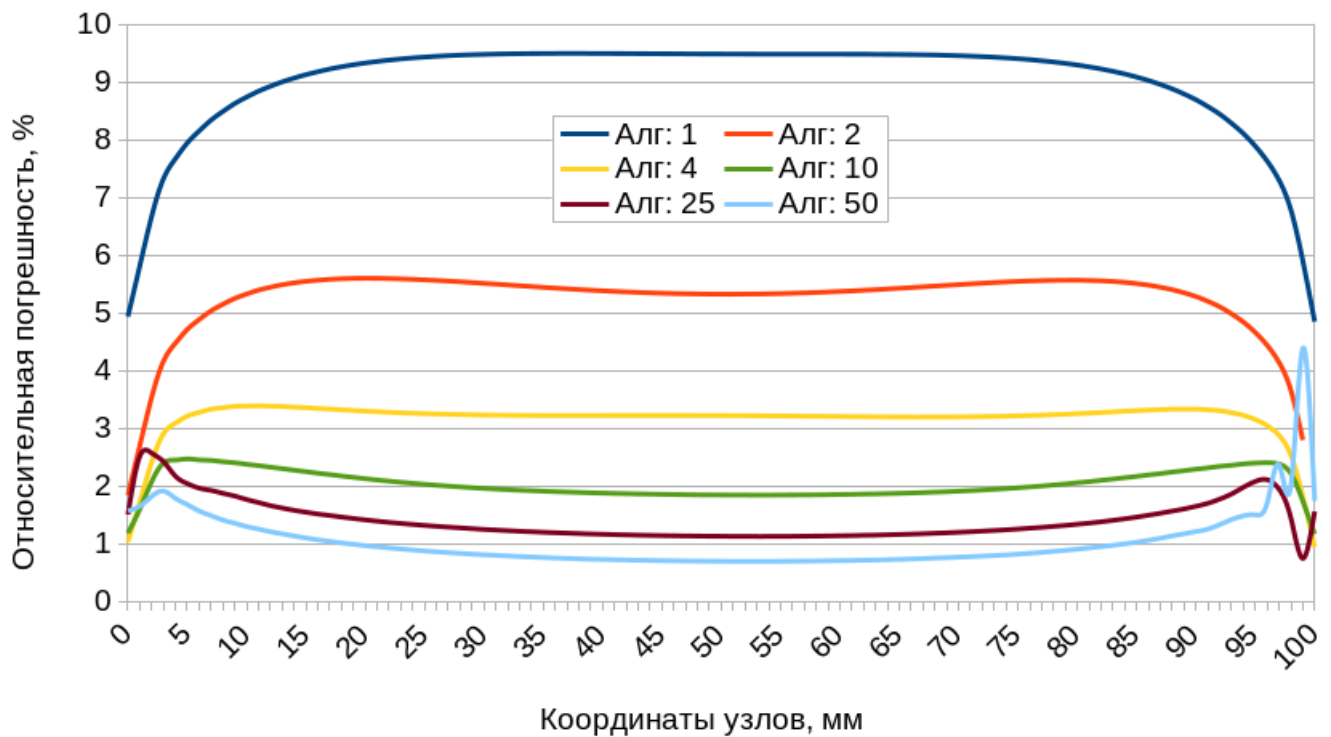


Рисунок 3.19 — Результаты численных расчётов: погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно решения, полученного в системе *Ansys*.

Выбранный характер структурной анизотропии материала, описанный фиктивными данными компьютерной томографии, определяет равномерное распределение структурных особенностей и позволяет провести аналитический расчёт деформированного состояния образца на основе заданных свойств среды. В этом случае, исходя из известных соотношений закона механической смеси [19; 83; 151], эффективный модуль упругости Юнга (касательный модуль) двухфазного композита, соответствующего пористому материалу, состоящему из твёрдой фазы и пор, может быть вычислен согласно следующей формуле:

$$E = \alpha E_0, \quad (3.60)$$

где  $\alpha$  — коэффициент пористости материала, а  $E_0$  — модуль упругости Юнга твёрдого вещества. На рисунке 3.21 представлена погрешность перемещений для среднего узла верхней линии сетки относительно решения, полученного аналитическим способом на основе формулы (3.60). Следует отметить, что моделирование с учётом особенностей пространственного распределения материала показывает более точные результаты, чем решение в системе *Ansys*, начиная с 25-ти конечных элементов на стороне квадрата включительно.

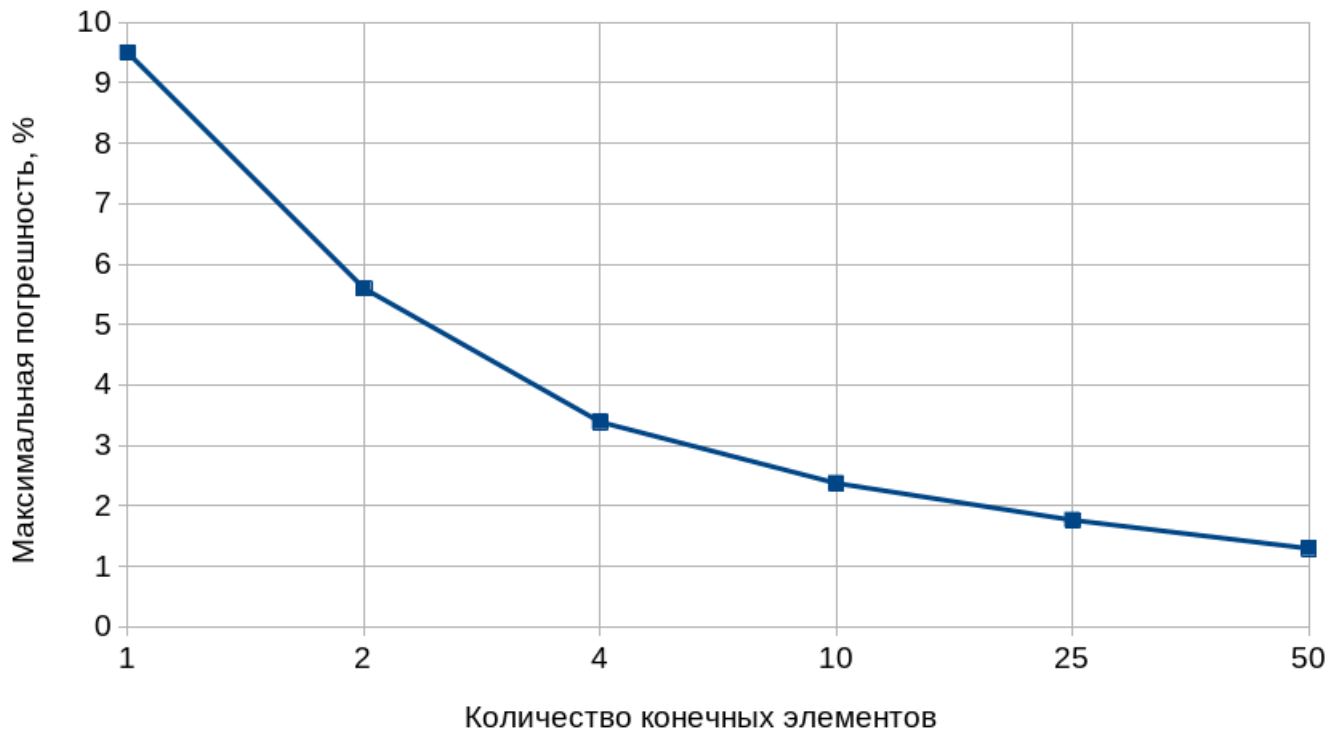


Рисунок 3.20 — Результаты численных расчётов: максимальная относительная (*Ansys*) погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно количества конечных элементов на стороне квадрата.

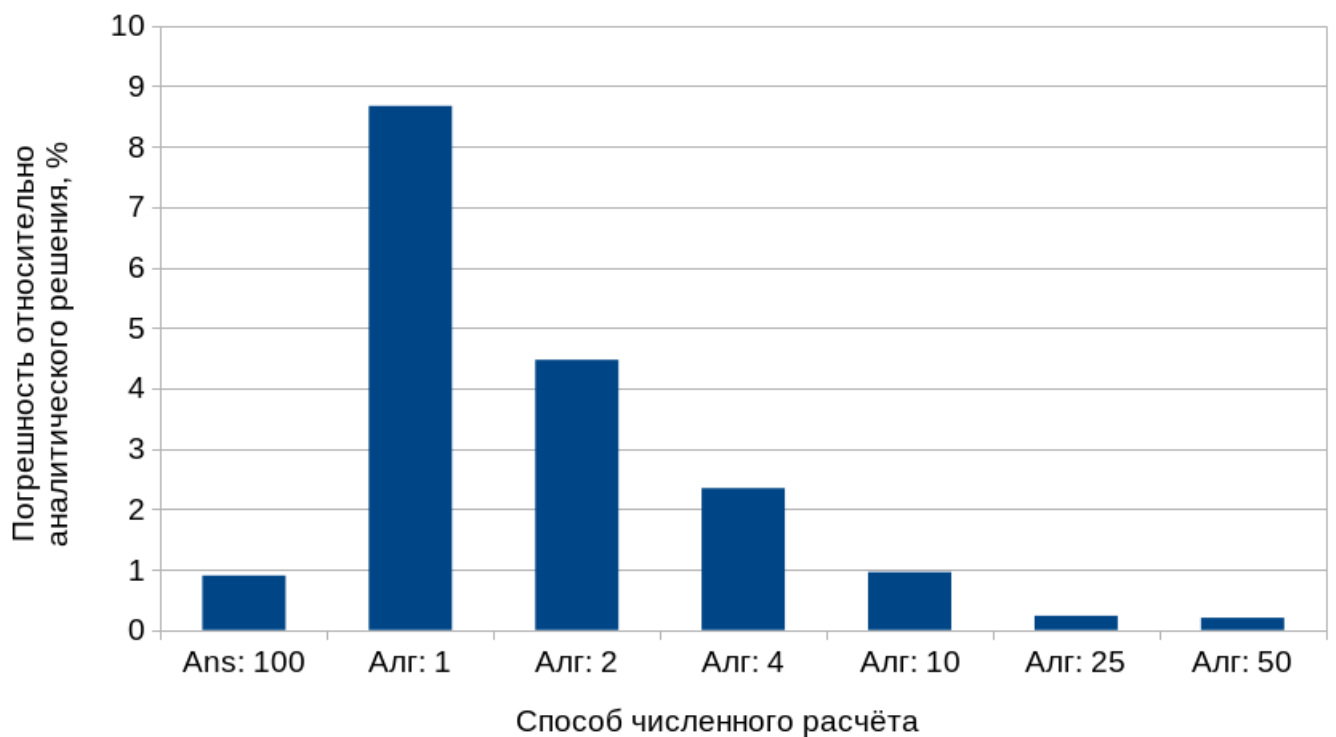


Рисунок 3.21 — Результаты численных расчётов: погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно аналитического решения.

### 3.3.3.2 Влияние структурного распределения материала

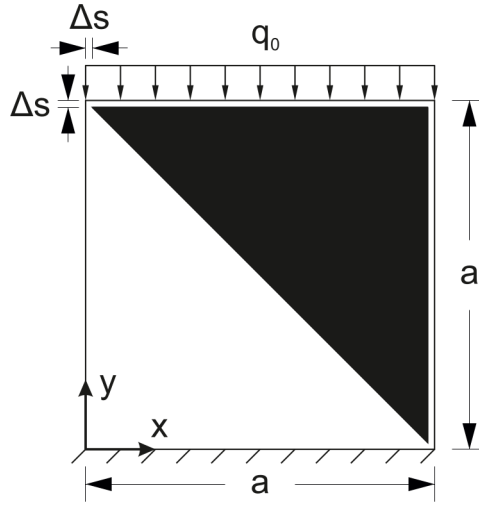


Рисунок 3.22 — Геометрия и внутренняя структура образца с приложенными граничными условиями (треугольный вырез): ( $\Delta s$  – толщина остаточного слоя).

Оценка влияния структурного распределения упругого материала в заданном объёме образца может быть проведена на основе воссоздания томографии с полостью в виде треугольного выреза (рис. 3.22), форма которого определялась следующим значением толщины остаточного слоя:

$$\Delta s = \frac{a}{N - 1}, \quad (3.61)$$

где количество координатных точек  $N = 51$ . В данной задаче распределение материала в расчётной области может быть определено на основе следующего представления элементарных объёмов  $dV_i^{empt}$  в равенстве (3.56а):

$$dV_i^{empt} : x \in [x_i; x_i + \Delta x], y \in [y_{N-i}; y_{N-i} + \Delta y]. \quad (3.62)$$

Здесь область треугольного выреза обеспечивалась выбором индексов в диапазоне  $[4; N - 3]$  с шагом 1:

$$\{x_i, y_{N-i}\} : i = 4, 5, \dots, N - 3. \quad (3.63)$$

Реализация структурной анизотропии таким образом аналогично предполагала наличие сплошного постоянного материала на границе области и определяла толщину остаточного слоя стенки величиной в два элементарных объёма. Данный характер неоднородной структуры нарушал симметрию механических свойств материала относительно вертикальной оси  $Oy$ , вдоль которой

прикладывалась сжимающая нагрузка. Таким образом, выбирая аналогично предыдущему пункту 3.3.3.1 различную степень дискретизации геометрии (рис. 3.23), может быть исследована сходимость подхода к методу прямого моделирования, а также проведена оценка возможности учёта полученной структурной анизотропии на основе конструкции рамочного типа.

В отличие от пористого образца (рис. 3.17), в силу наличия большой полости относительно общей площади поверхности, начиная с определённого количества конечных элементов на стороне квадрата, могут возникать макрообъёмы с нулевым содержанием упругого материала, что в случае интегрирования локальной матрицы жёсткости по данным томографии приводит к нулевым значениям её элементов. Данный эффект оказывает наибольшее влияние при сегментации исходного изображения расчётной сеткой с образованием «пустых» конечных элементов на границе, что приводит к появлению узлов, в которых отсутствует жёсткость материала. Исключение влияния ошибки, возникающей в силу такой вычислительной особенности, может быть достигнуто путём предварительного удаления из ансамбля конечных элементов с низким содержанием материала (или его полным отсутствием: см. п. 2.3.2). Результат выполнения данной процедуры представлен на рисунках 3.23в — 3.23е.

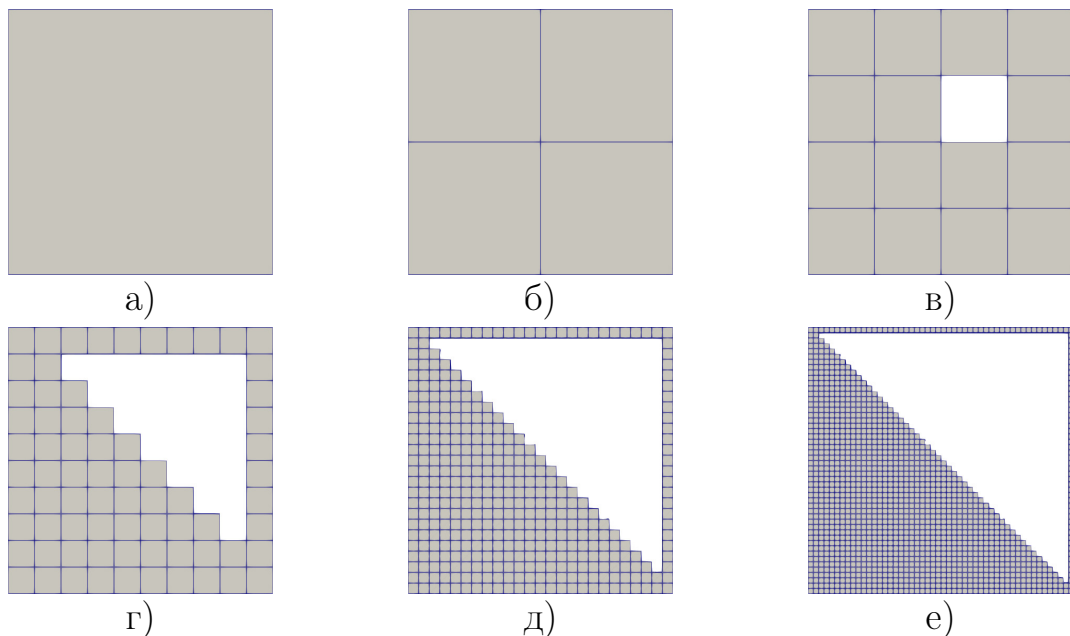


Рисунок 3.23 — Изменение размера конечно-элементной сетки для образца с треугольным вырезом: а)-е) — 1, 2, 4, 10, 25 и 50 конечных элементов на стороне квадрата, соответственно.

Характер возникновения пиковых значений в граничных элементах аналогичен результатам, представленным в пункте 3.3.3.1 (рис. 3.19). Таким образом,



с учётом исключения из допустимого диапазона результатов узлов, соответствующих большой величине погрешности, сходимость расчётов с данными прямого моделирования может быть представлена на рисунке 3.24, описывающем отклонение перемещений в узлах верхней линии сетки относительно решения, полученного в системе *Ansys*.

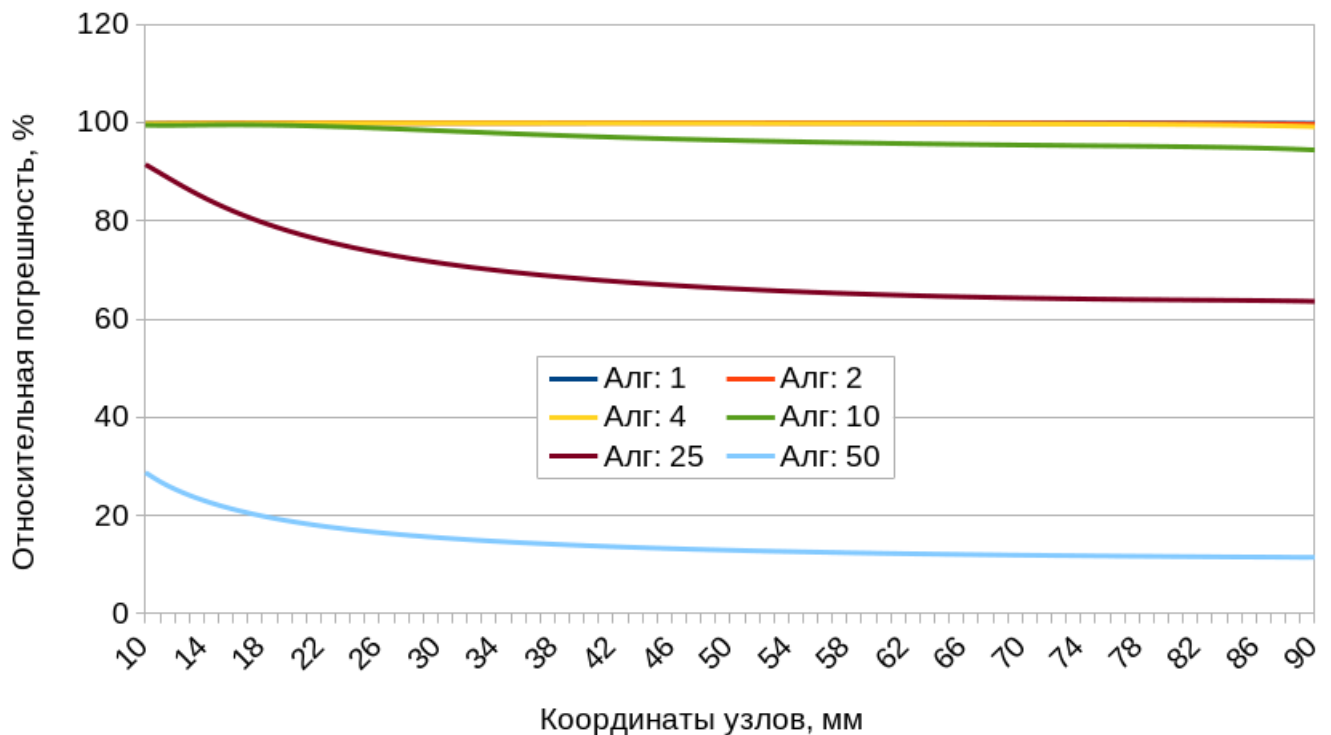


Рисунок 3.24 — Результаты численных расчётов: погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно решения, полученного в системе *Ansys* (усечённый диапазон значений).

Представленные графики сходимости расчётов на основе взвешенного интегрирования по области с треугольным вырезом показывают, что, в отличие от пористого образца, размер конечно-элементной сетки оказывается наиболее значимым показателем, определяющим наибольшее влияние на величину относительной погрешности и порядок её значений. Таким образом, дискретизация стороны квадрата сеткой, соответствующей рисункам 3.23а — 3.23г, приводит к около 100 % погрешности результатов относительно метода прямого моделирования в системе *Ansys*. Сходимость в значительной степени улучшается при использовании более 25-ти конечных элементов и, аналогично моделированию пористого образца, стремится к величине 10 % (рис. 3.24, коричневый и голубой графики). На рисунке 3.25 представлены максимальные значения относительной погрешности.

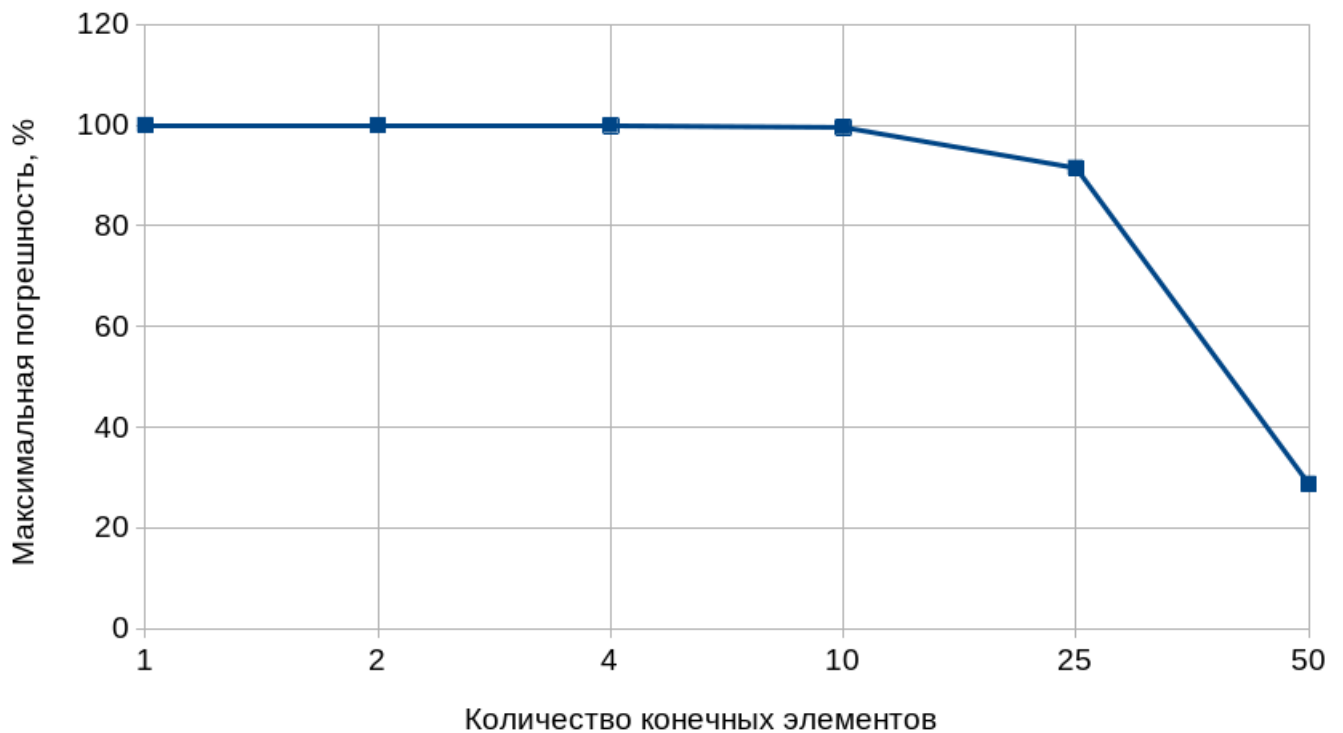


Рисунок 3.25 — Результаты численных расчётов: максимальная относительная (*Ansys*) погрешность перемещений в статически нагруженных узлах сетки относительно количества конечных элементов на стороне квадрата.

Результаты показывают, что моделирование структурной анизотропии, определяемой вырезанной областью несимметричной геометрии, может быть проведено на основе конечно-элементных сеток различной степени дискретизации. В этом случае появление элементов с нулевым содержанием материала приводит к необходимости в их удалении: образованная таким образом геометрия представляет собой рамочную конструкцию. Данный эффект оказывает значительное влияние на сходимость результатов, так как в отличие от исследования образца пористой структуры требует, в случае применения линейной аппроксимации поля перемещений, достаточной степени дискретизации области. На рисунке 3.26 представлены соответствующие эпюры, качественно определяющие характер деформированного состояния образца с треугольным вырезом.

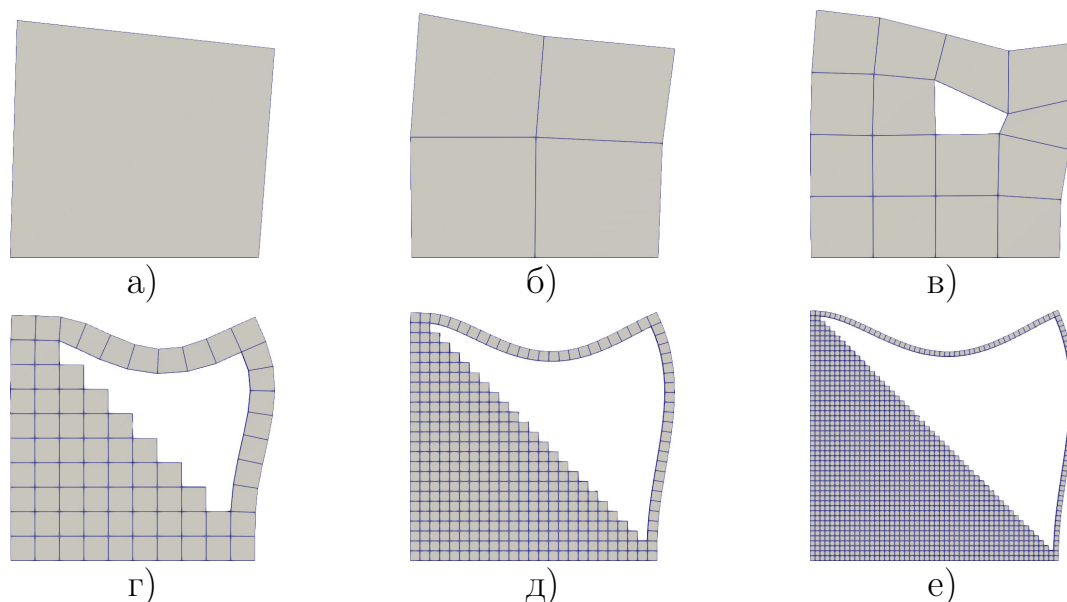


Рисунок 3.26 — Деформированное состояние образца с треугольным вырезом относительно размера конечно-элементной сетки: а)-е) — 1, 2, 4, 10, 25 и 50 конечных элементов на стороне квадрата, соответственно.

### 3.4 Модельные задачи

Вычислительные эксперименты модельных образцов выполнялись на основе данных компьютерной томографии трубчатых костей животных. Полученные изображения расчётной среды соответствовали макроскопическому уровню. Моделирование образцов относительно небольшого физического размера (кости конечностей лабораторных крыс) выполнялось с применением микрокомпьютерной томографии. Исходный объём полученного массива данных и степень дискретизации области (размер шага сканирования) определялись разрешающей способностью сканирующего устройства. Механические свойства костной ткани соответствовали линейно-упругому материалу [215; 262] и определяли возможность моделирования в условиях упругой постановки задачи: хрупкое разрушение образцов устанавливалось как возникновением трещин, так и локальным повреждением структуры органа.

Согласно П.Ф. Лесгафту, строение костных органов образовано таким образом, чтобы «при наименьшей затрате материала обладать наибольшей крепостью и лёгкостью, по возможности уменьшая влияние толчков и сотрясений» [49—51]. В этом случае длинные кости скелета характеризуются наличием вытянутой трубчатой средней части, называемой диафизом и состоящей из

плотного (компактного) вещества (рис. 3.27а). Внутренняя полость заполнена жёлтым костным мозгом. Области на концах органа называются эпифизом и образуются губчатым веществом с красным костным мозгом и суставной поверхностью с хрящом. Между эпифизом и диафизом находятся хрящевая эпифизарная пластинка и метафиз, обеспечивающие рост кости. Таким образом, длинные кости в основном образуют скелет конечностей, а выступы, расположенные на эпифизах (апофизы) определяют место крепления мышц и связок. Неровности, возникающие на костной поверхности, предназначены как для реализации механических соединений, так и для обмена веществ извне. В первом случае подобные особенности строения служат как для состыковки костей между собой, так и для крепления мускулов. Стоит отметить, что, согласно свойствам адаптации костей, уникальность и выраженность таких концентраторов определяется развитостью мускулатуры. В другом случае находящиеся на поверхности «питательные отверстия» оказываются каналами для прохода внутрь нервов и кровеносных сосудов [122]. В общем случае состав костной ткани определяется компактным и губчатым веществом (рис. 3.27б). Компактный биологический материал характеризуется своей однородностью и твёрдостью. Такого рода структура свойственна наружному слою кости и особенно развита в средней части трубчатых костей, уменьшаясь к дистальным областям. Строение губчатого вещества может быть описано как некоторое распределение пересекающихся в различных направлениях пластинок, образующих систему полостей и отверстий, сливающихся в большую полость в середине длинных костей. Наружный слой костного органа покрыт так называемой надкостницей, представляющей собой оболочку из соединительной ткани, содержащей не только кровеносные сосуды, но и некоторые клеточные элементы, предназначенные для питания, роста и восстановления кости [84; 111; 159; 161; 185].

Таким образом, численное и экспериментальное нагружение образцов трубчатых костей приводит к работе (в большей степени) упругой костной ткани, что предоставляет возможность её моделирования по данным с изображений. В этом случае проведение экспериментов на модельных образцах позволяет осуществить валидацию предложенной методики численного расчёта на основе весовых характеристик, описывающих пространственное распределение свойств материала. В работе [114] было установлено, что связь между морфологическими и упругими свойствами костной ткани, основанная на объёмной доли кости и структурной анизотропии материала, объясняет до

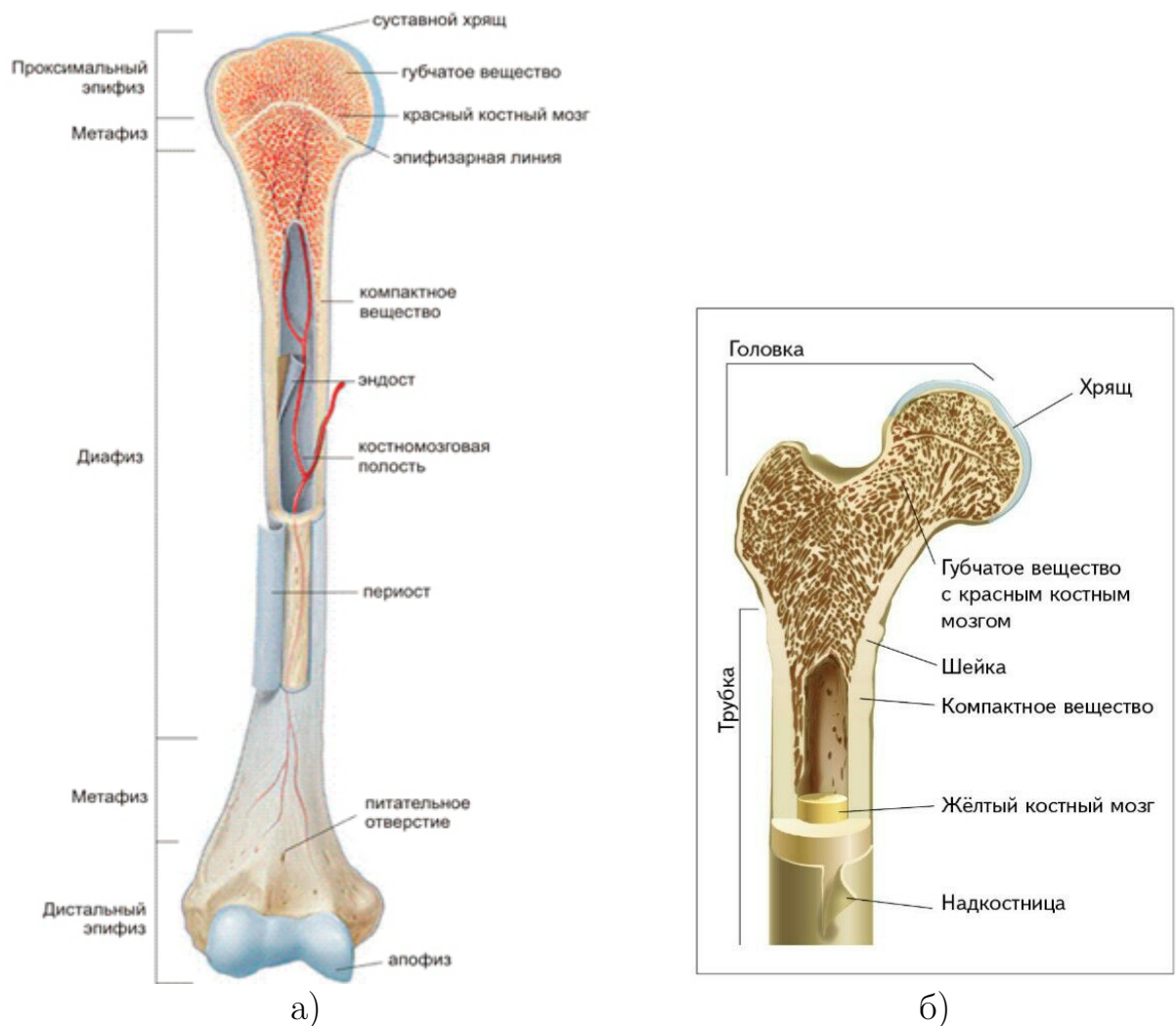


Рисунок 3.27 — Структура длинной трубчатой кости на макроскопическом уровне в сечении (образцы костных органов человека): а) – плечевая кость; б) – проксимальный участок бедренной кости.

98 % изменений её упругих свойств. Исследования показали, что во всех рассматриваемых анатомических областях (использовались кубические образцы трабекулярной кости, извлечённые из бедренной и лучевой костей, позвонков и гребня подвздошной кости) объёмная доля содержания кости определяет приблизительно 87 % различий в упругих свойствах материала. Структурная анизотропия ткани дополнительно позволяет описывать до 10 % жёсткости, а последующее уточнение модели на основе введения других независимых показателей оказывается незначительным (менее 1 %). Таким образом, вопреки распространённому мнению, другие морфологические переменные не вносят существенного дополнительного вклада, что позволяет рассматривать костный материал в качестве двухфазной среды [200] и выполнять моделирование на ос-

нове предварительной бинаризации исходного массива данных компьютерной томографии согласно заданному порогу.

В качестве исходных изображений рассматривались данные компьютерной томографии образцов костей конечностей крыс, кроликов и свиней. Протокол экспериментов, включающий анестезию, хирургическое вмешательство, послеоперационный уход, тестирование и эвтаназию, был одобрен Комитетом по уходу за животными Казанского государственного медицинского университета (протокол № 5 от 20 мая 2020 года). Все экспериментальные процедуры проводились в соответствии со стандартами, чтобы свести к минимуму страдания животных и размер экспериментальных групп. Вычисления проводились на сетках (воксельных и конечно-элементных) различного размера. Исследовались методики как сглаженного восстановления геометрии (см. п. 2.3.1), так и фильтрации прямоугольной регулярной конечно-элементной сетки (см. п. 2.3.2). Параметрами для анализа выступали напряжённо-деформированное состояние образцов и величина нормированной ошибки по напряжениям. Валидация проводилась методом сравнения результатов численного решения с данными натурального эксперимента.

Сканирование образцов выполнялось с применением микро-/нанофокусной системы рентгеновского контроля для компьютерной томографии и 2D инспекции *Phoenix V/tome/X S240* в лаборатории рентгеновской компьютерной томографии Института геологии и нефтегазовых технологий Казанского (Приволжского) федерального университета. Система оснащена двумя рентгеновскими трубками: микрофокусной с максимальным ускоряющим напряжением 240 кВ мощностью 320 Вт и нанофокусной с максимальным ускоряющим напряжением 180 кВ мощностью 15 Вт. Для первичной обработки данных и создания объёмной (воксельной) модели образца на базе рентгеновских снимков (проекций) использовалось программное обеспечение *datos/x reconstruction*. Зафиксированный в держателе образец помещался на вращающийся столик камеры компьютерного томографа на оптимальном расстоянии от источника рентгеновского излучения. Съёмка проводилась при ускоряющем напряжении 90-100 кВ и токе 140-150 мА.

### 3.4.1 Сглаженная аппроксимация геометрии: Испытание на сжатие

В задаче использовались данные компьютерной томографии диафиза бедренной кости крысы (рис. 3.28а). Размер исследуемой области составлял  $4.21 \times 3.46 \times 5.89$  мм, количество вокселей в направлении соответствующих координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  –  $624 \times 512 \times 874$ , размер вокселя –  $6.747 \times 6.747 \times 6.747$  мкм. На рисунках 3.28б и 3.28в представлены конечно-элементные сетки с различной степенью дискретизации геометрии (44 и 1200 элементов, соответственно).

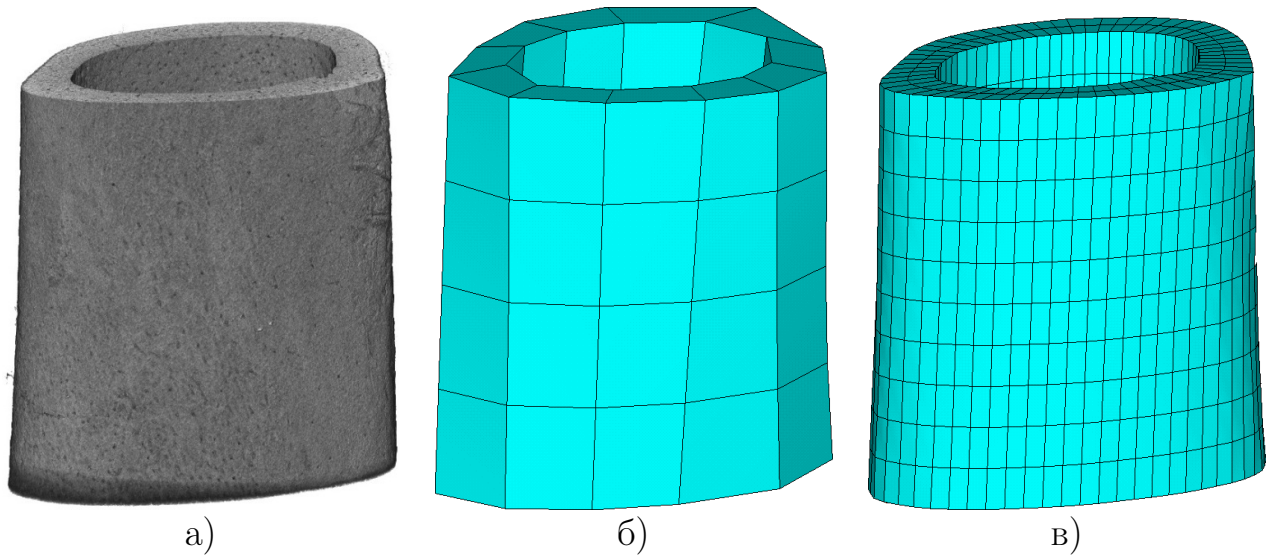


Рисунок 3.28 — Моделирование диафиза бедренной кости крысы: а) — компьютерная томография образца; б), в) — конечно-элементные сетки с различной степенью аппроксимации геометрии.

На рисунке 3.29 представлена геометрия диафиза кости в проекции на плоскость  $Oxz$  с приложенными кинематическими и статическими граничными условиями. Рассмотрим задачу (3.1), (3.3) и (3.4) для расчётной области, соответствующей численной модели диафиза костного органа:

$$V^0 : x, y \in S_{mesh}(z), z \in [0; L], \quad (3.64)$$

где  $S_{mesh}(z)$  — поверхность сечения конечно-элементной сетки при заданном  $z$  и  $L$  — длина образца в направлении оси  $Oz$ . Узлы нижней грани фиксировались в перемещении вдоль трёх координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\{u(x, y, z)\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{dof}, \quad (3.65)$$

где поверхность закрепления  $S_{dof}$  (плоскость нижнего сечения диафиза) может быть описана как:

$$S_{dof} : z = 0, \forall x, y \in S_{mesh}(z) |_{z=0}. \quad (3.66)$$

На верхнем торце прикладывалось равномерно распределённое по узлам поверхности сечения диафиза продольное сжимающее усилие  $F_0$  величиной 1 кН:

$$\{n\} = \{0, 1, 0\}^T, \quad (3.67a)$$

$$\{q\} = \{0, -q_0, 0\}^T, \quad (3.67b)$$

$$F_0 = - \int_{S_{force}} q_0 dS, \quad (3.67b)$$

где поверхность статического нагружения  $S_{force}$  (плоскость верхнего сечения диафиза) может быть представлена в виде:

$$S_{force} : z = L, \forall x, y \in S_{mesh}(z) |_{z=L}. \quad (3.68)$$

На свободной поверхности  $S_{free}$  статические граничные условия отсутствовали:

$$\{q\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{free}, \quad (3.69)$$

где

$$S_{free} = \partial V \setminus (S_{dof} \cup S_{force}). \quad (3.70)$$

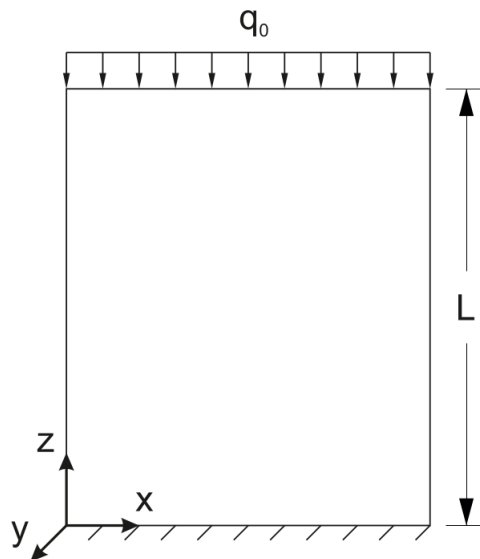


Рисунок 3.29 — Геометрия образца в проекции на плоскость  $Oxz$  с приложенными граничными условиями:  $q$  – равномерно распределённая сжимающая нагрузка, эквивалентная сосредоточенному усилию  $F_0$ .



Компоненты тензора упругости  $[D]$  зависели от вектора пространственных координат  $\{r\}$  и определялись следующими величинами (ф-ла (3.18)):

$$[D(\{r\})] = \begin{cases} [D_{bone}] : & \forall \{r\} \in V_{matl} \\ [Z] : & \forall \{r\} \in V_{empt} \end{cases}, \quad (3.71)$$

где  $[D_{bone}]$  – матрица, соответствующая материалу костной ткани, и  $[Z]$  – нулевая матрица. Объём  $V_{matl}$  определяет упругий материал,  $V_{empt}$  – его отсутствие (пустоту или поры костной ткани).

Моделирование заданного пространственного распределения материала выполнялось на основе бинаризованных значений весовой функции, определяемой данными компьютерной томографии образца. Объёмы  $V_{matl}$  и  $V_{empt}$ , представленные в выражении (3.55), с учётом распределения плотности материала могут быть описаны в виде:

$$V_{empt} = \cup_i \omega(\{r_i\}) dV_i \text{ при } \omega(\{r_i\}) = 0, \quad (3.72a)$$

$$V_{matl} = \cup_i \omega(\{r_i\}) dV_i \text{ при } \omega(\{r_i\}) = 1. \quad (3.72b)$$

Здесь  $\omega(\{r_i\})$  соответствует усреднённым значениям проницаемости среды в микрообъёме  $dV_i$ , индексы  $i$  определяются диапазоном  $[1; N]$ , где  $N$  – количество значений массива данных с изображения расчётной области  $V^0$ . Пространственное распределение материала устанавливается на основе структурных особенностей моделируемой по данным компьютерной томографии среды: бинаризация исходного массива значений проводилась на основе заданного порога, согласно которому выделялись две фазы материала – костная ткань и пустота, определяемая порами. Величина порогового значения устанавливалась методом Оцу, основанном на гистограмме исходного изображения (см. п. 2.1.2).

Модуль упругости Юнга составлял 30 ГПа [225], коэффициент Пуассона – 0.3. Интегрирование по непрямоугольным конечным элементам осуществлялось таким образом, что определение принадлежности квадратурных точек области производилось по геометрическим центрам вокселей.

На рисунке 3.30 представлено распределение осевых перемещений для двух типов конечно-элементных сеток. На основе полученного распределения значений можно отметить, что численная модель, соответствующая 44 конечным элементам, оказалась более жёсткой, что может быть объяснено меньшим количеством степеней свободы конструкции. Также на результаты в значительной степени повлияла степень аппроксимации геометрии, что определило

точность описания объёма образца и, как следствие, количество квадратурных точек интегрирования внутри отдельного конечного элемента. На рисунке 3.31 представлены доверительные интервалы средних перемещений для узлов верхнего торца геометрии. Рост значений стандартного отклонения оказывается следствием увеличения количества узлов на поверхности нагружения, что приводит к уменьшению жёсткости конструкции и изменению формы её деформированного состояния.

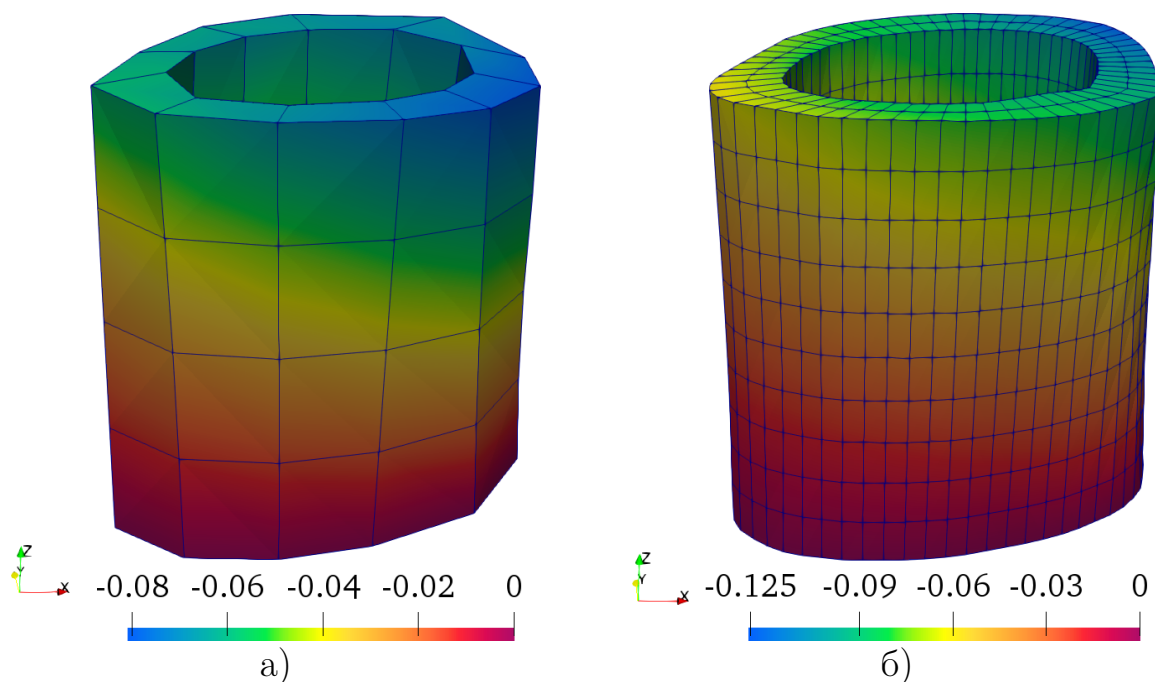


Рисунок 3.30 — Распределение значений поля перемещений в направлении приложения нагрузки, (мм): а) и б) – 44 и 1200 конечных элементов, соответственно.

На рисунках 3.32 и 3.33 представлено поле распределения значений напряжённо-деформированного состояния для соответствующих конечно-элементных сеток. Следует отметить, что увеличение количества конечных элементов позволяет с большей точностью описывать геометрию исследуемого образца, а также с лучшей степенью достоверности определяет характер его деформированного состояния. Таким образом, построение численной модели на основе большого числа конечных элементов уменьшает жёсткость конструкции и исключает возникновение концентраторов в областях с повышенной вычислительной ошибкой.

Время расчётов находилось в пределах 6-10 минут для обоих типов сеток. Стоит отметить, что в силу фиксированного размера данных компьютерной томографии, количество квадратурных точек метода средних прямоугольников оставалось приблизительно постоянным (зависит от расположения точек

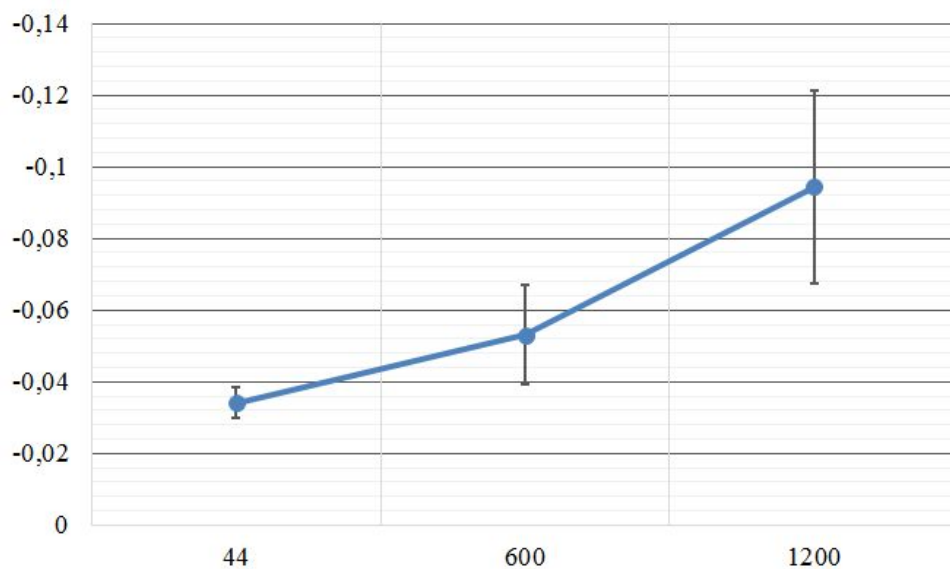


Рисунок 3.31 — Среднее продольное перемещение верхнего торца в направлении приложения нагрузки со стандартным отклонением при различном разбиении, (мм): данные представлены для расчётных сеток с 44, 600 и 1200 конечными элементами, соответственно.

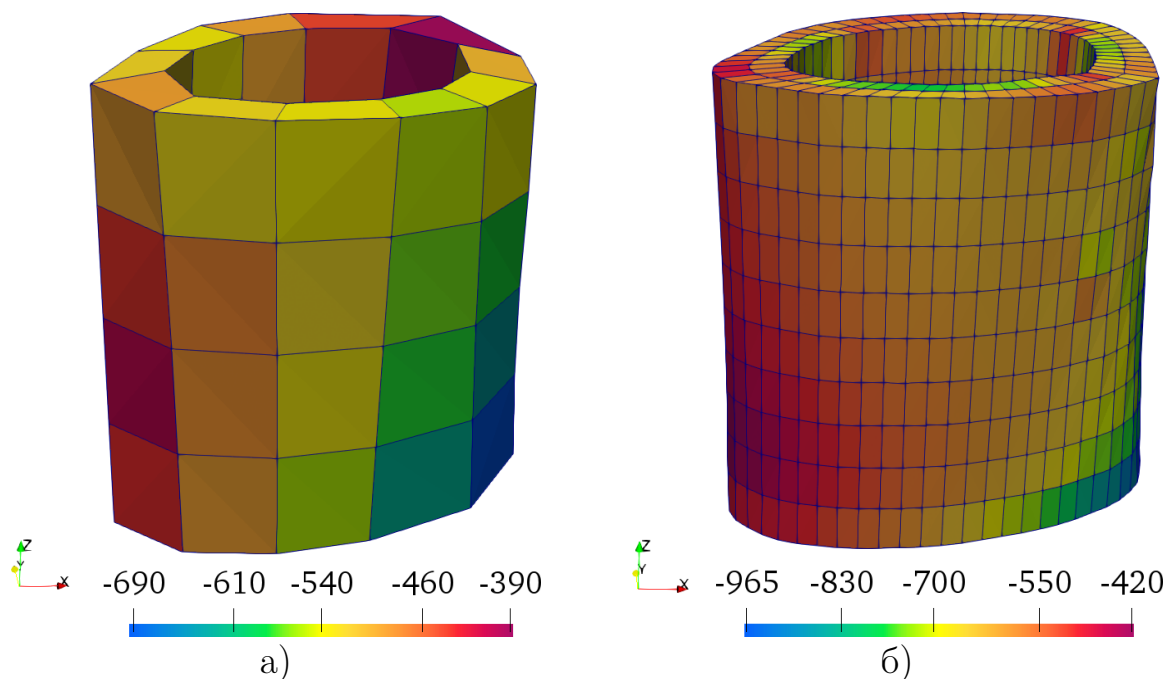


Рисунок 3.32 — Распределение значений поля напряжений в направлении приложения нагрузки, (МПа): а) и б) – 44 и 1200 конечных элементов, соответственно.

аппроксимации геометрии), что объясняет сопоставимость времени вычислений с различной точностью конечно-элементной сетки. Решающим показателем оказывается размерность системы уравнений, на решение которой в случае 1200 конечных элементов необходимо затратить больше времени. При этом стоит отметить, что вычисление глобальной матрицы жёсткости для образца с

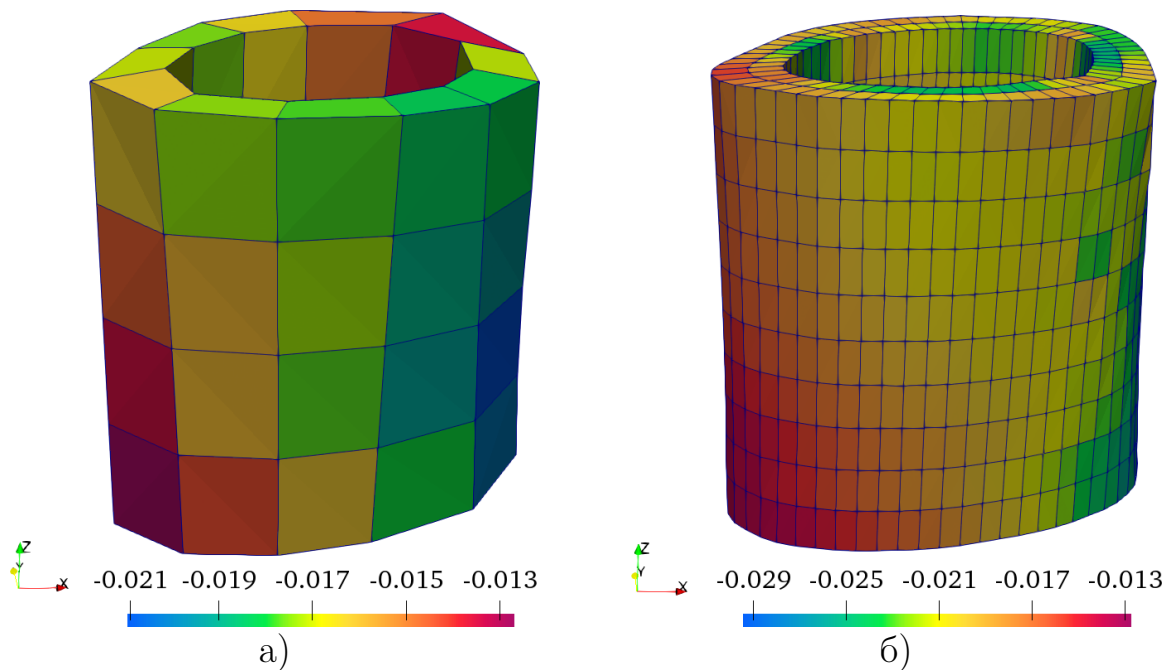


Рисунок 3.33 — Распределение значений поля деформаций в направлении приложения нагрузки: а) и б) – 44 и 1200 конечных элементов, соответственно.

соответствующими данными компьютерной томографии и конечно-элементной сеткой производится только один раз и может быть применено при дальнейших расчётах с иными граничными условиями.

Результаты расчётов показали, что предложенный метод учёта анизотропии материала позволяет определять поведение образцов из неомогенных пористых материалов (диафиза бедренной кости крысы) в условиях действия внешних нагрузок (сжимающего усилия). Предложенный метод предоставляет возможность производить расчёты биологических объектов при условии, что их геометрия может быть восстановлена на основе одного из возможных подходов к построению конечно-элементной сетки. Точность результатов определяется как разрешающей способностью компьютерного томографа, так и точностью дискретизации исследуемого объёма.

### 3.4.2 Построение геометрии фильтрацией: Испытание на изгиб

В модельной задаче рассматривался образец плечевой кости минипига. Эксперименты проводились на шести вьетнамских свиньях-самцах весом 15-20 кг. Животных помещали в индивидуальные клетки в стандартных лабо-

раторных условиях с неограниченным доступом к пище и воде и 12-часовым циклом день/ночь. Животных включали в эксперименты после периода адаптации продолжительностью не менее 7 дней. В экспериментах использовались кости животных после контузионной травмы позвоночника. Животных умерщвляли на 8-й неделе после травмы спинного мозга. Эвтаназия проводилась под глубокой анестезией путём передозировки ингаляционного наркозного средства (изофлурана). Извлекались кости передних и задних конечностей.

Объём данных компьютерной томографии составлял  $752 \times 752 \times 752$  элементов, размер вокселя –  $0.2 \times 0.2 \times 0.2$  мм, габариты сканируемой области –  $150.4 \times 150.4 \times 150.4$  мм. На рисунке 3.34а представлена визуализация данных сканирования, подверженных бинаризации исходного массива согласно заданному порогу.

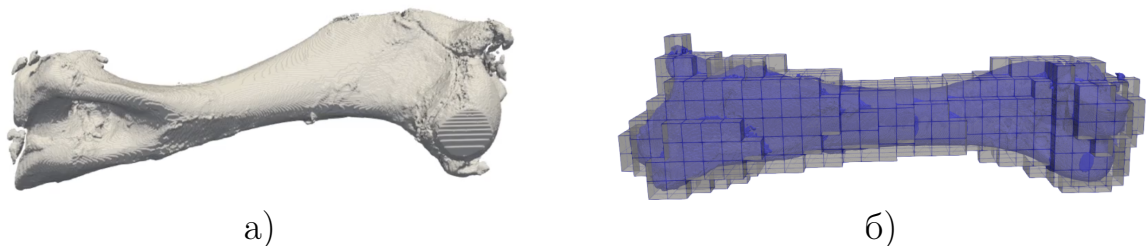


Рисунок 3.34 — Моделирование кости передней конечности минипига (плечо): а) – визуализация обработанных данных компьютерной томографии; б) – конечно-элементная сетка, наложенная поверх результатов сканирования.

Исходный физический образец подвергался натурному эксперименту на универсальной двухзонной напольной разрывной машине для испытания конструкционных материалов «УТС 110М-100», предназначенной для проведения механических испытаний образцов на растяжение, сжатие и изгиб. На рисунке 3.35 представлена схема соответствующей экспериментальной установки. Дистальный и проксимальный участки костного органа фиксировались согласно жёсткому заземлению, в верхней области диафиза прикладывалось воздействие индентора, перпендикулярное к поверхности внешних кортикальных стенок. Установленные таким образом граничные условия соответствовали испытанию на поперечный изгиб. Увеличение прикладываемого усилия осуществлялось до разрушения (перелома) костного органа, влекущего за собой образование трещины (рис. 3.37, область, выделенная красным).

Численное моделирование костного органа проводилось на конечно-элементных сетках различной степени дискретизации: физический размер

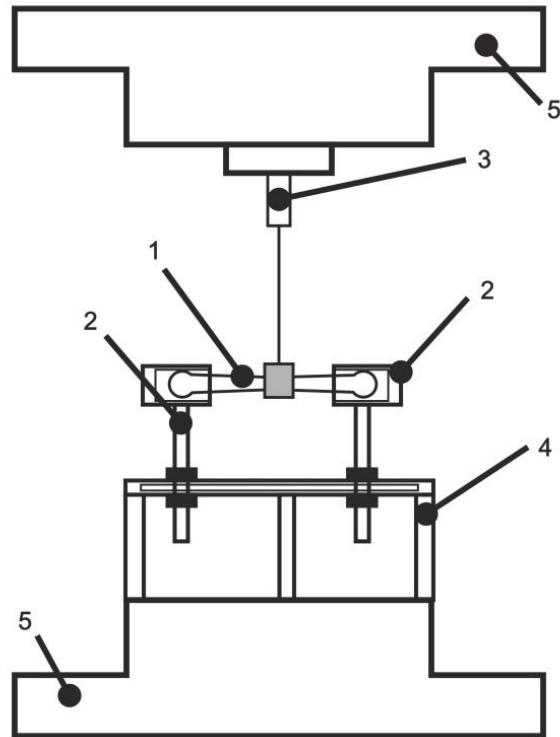


Рисунок 3.35 — Схема экспериментальной установки, соответствующей разрывной машине «УТС 110М-100»: 1 – экспериментальный образец; 2 – фиксаторы проксимального и дистального участков; 3 – датчик возникающего усилия; 4 – жёсткое основание (опора); 5 – траверсы (верхняя – подвижная, нижняя – фиксированная).

конечных элементов в направлении каждой координатной оси компьютерной томографии составлял 10 и 5 мм, что соответствовало 20 и 40 конечным элементам на стороне выделенной области. Построение расчётных сеток выполнялось методом фильтрации: удалялись конечные элементы, содержание костного материала в которых оказывалось ниже 5 % (рис. 3.34б). Рассмотрим постановку задачи, соответствующую уравнениям (3.1), (3.3) и (3.4). Расчётная геометрия численной модели описывалась в виде:

$$V^0 = \cup_i V_i, \quad i \in [1; N], \quad (3.73)$$

где  $V_i$  – объём  $i$ -го конечного элемента сетки и  $N$  – их суммарное количество. Область каждого соответствующего подобъёма  $V_i$  может быть определена следующим образом:

$$V_i : x \in [x_i; x_i + a], \quad y \in [y_i; y_i + a], \quad z \in [z_i; z_i + a], \quad (3.74)$$

где  $\{x_i, y_i, z_i\}$  – наименьшие координаты узлов  $i$ -го конечного элемента и  $a$  – размер стороны соответствующего подобъёма с геометрией в виде куба.

Кинематические граничные условия с наибольшей степенью достоверности соответствовали натурному эксперименту (рис. 3.36 и 3.38). Перемещения узлов верхней и нижней поверхности дистальных участков костного органа фиксировались в направлении трёх декартовых координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$ :

$$\{u(x, y, z)\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{dof}, \quad (3.75)$$

где поверхность закрепления  $S_{dof}$  может быть описана как:

$$S_{dof} = S_A \cup S_B \cup S_C \cup S_D. \quad (3.76)$$

Здесь  $S_A$ ,  $S_B$ ,  $S_C$  и  $S_D$  – поверхности, соответствующие зонам контакта костного органа с фиксаторами проксимального и дистального участков (рис. 3.35, элемент 2; рис. 3.36, зоны контакта А, В, С и D). В области диафиза прикладывалась поперечная изгибающая нагрузка в виде кинематического перемещения:

$$\{u(x, y, z)\} = \{0, -u_0, 0\}^T : \forall x, y, z \in S_{disp}, \quad (3.77)$$

где поверхность кинематического нагружения  $S_{disp}$  может быть представлена в виде:

$$S_{disp} = S_{FG}. \quad (3.78)$$

Здесь область  $S_{FG}$  соответствует зоне контакта индентора с диафизом кости (рис. 3.36, участок  $F - G$ ). На свободной поверхности  $S_{free}$  статические граничные условия отсутствовали:

$$\{q\} = 0 : \forall x, y, z \in S_{free}, \quad (3.79)$$

где

$$S_{free} = \partial V \setminus S_{kinem}. \quad (3.80)$$

Аналогично постановке задачи в пункте 3.4.1 компоненты тензора упругости  $[D]$  зависели от вектора пространственных координат  $\{r\}$  и определялись величинами, представленными в выражении (3.71). Моделирование заданного пространственного распределения материала установленным образом выполнялось на основе бинаризованных значений весовой функции, определяемой данными компьютерной томографии образца (ф-ла (3.72)).

В качестве исходных параметров материала принимались следующие величины: модуль упругости Юнга – 30 ГПа, коэффициент Пуассона – 0.3. Для



возможности сопоставления результатов, полученных на основе численного моделирования и путём проведения натурального испытания, в качестве кинематического нагружения принимались перемещения, равные 1, 2, 3 и 4 мм, соответственно. Время вычислений варьировалось в пределах 15 минут для каждой расчётной сетки.

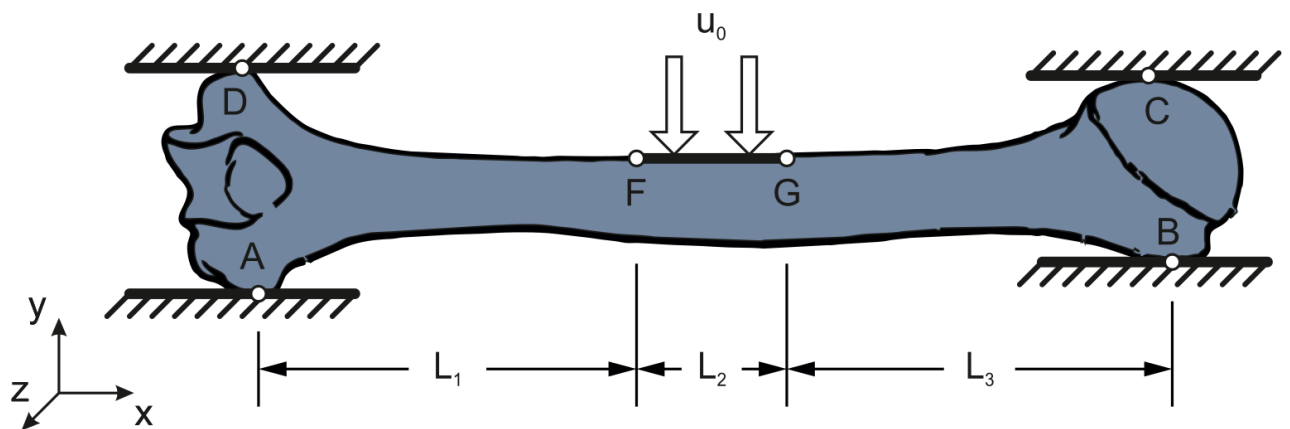


Рисунок 3.36 — Схематичное представление органа трубчатой кости в условиях действия граничных условий, соответствующих испытанию на поперечный изгиб.



Рисунок 3.37 — Проведение натурального эксперимента, соответствующего поперечному изгибу: образование трещины в области диафиза.

Графическое представление полученных результатов проводилось на основе построения двух типов сеток: расчётной и постпроцессорной. В первом случае использовалась исходная конечно-элементная модель, на основе которой проводились численные расчёты. Во втором случае к данной сеточной структуре применялась сглаженная аппроксимация относительно оригинальной геометрии образца: каждая ячейка полученной таким образом сетки соответствовала результатам численного моделирования. Введение расчётной и постпроцессорной сеток обусловлено как необходимостью в показательном



описании полученных величин, так и для сопоставления результатов моделирования с данными натурального эксперимента.

Рассмотрим результаты численного моделирования для кинематического нагружения, соответствующего перемещению индентора в области диафиза кости на 4 мм. Оценка достоверности полученных результатов проводилась на основе вычисления нормированной ошибки энергии по напряжениям в каждом конечном элементе сетки. Особое внимание уделялось значениям, соответствующим областям с максимальным эквивалентным напряжением по Мизесу. На рисунке 3.38 представлено распределение локально усреднённых по объёму значений нормированной ошибки энергии для двух конечно-элементных моделей, определённое на расчётных сетках.

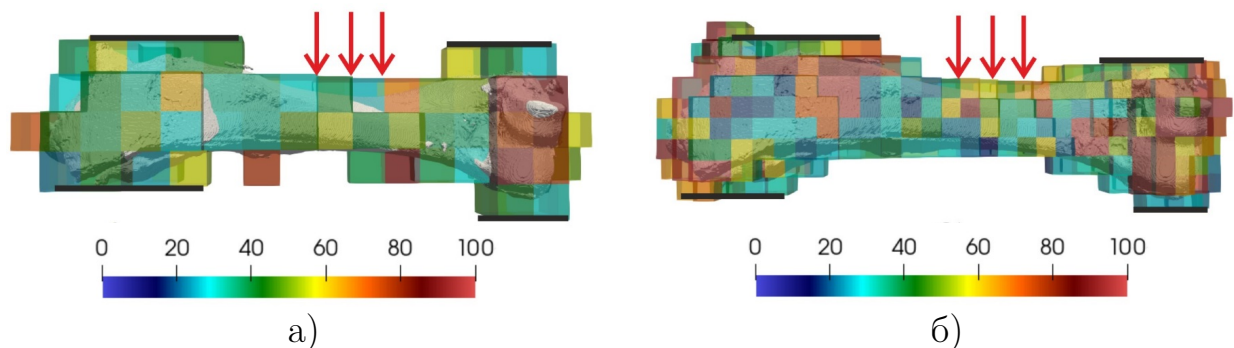


Рисунок 3.38 — Распределение значений нормированной ошибки энергии (расчётная сетка, %): а) и б) – 20 и 40 конечных элементов в направлении каждой координатной оси, соответственно.

На рисунке 3.39 представлено распределение значений эквивалентного напряжения по Мизесу, определённое на постпроцессорных сетках. Следует отметить, что в случае усреднения значений напряжений по объёму элемента на основе данных компьютерной томографии меняется понимание полученной величины. В этом случае каждый конечный элемент рассматривается как под-объём цифрового прототипа с неизвестным пространственным распределением напряжений, но известной усреднённой величиной, что приводит к возникновению ошибочно больших и/или малых значений. Таким образом, для обеих сеток нормированная ошибка достигает максимальных значений в области граничащих элементов, где относительное содержание костной ткани оказывается наименьшим. Данная особенность может быть объяснена уменьшением «сопротивляемости» локальной матрицы жёсткости. В областях, интересующих с точки зрения результатов расчёта, значения нормированной ошибки находятся в пределах 50 %. При этом максимальная величина соответствует границе

приложения кинематических граничных условий, а в остальных регионах не превышает 25 %.

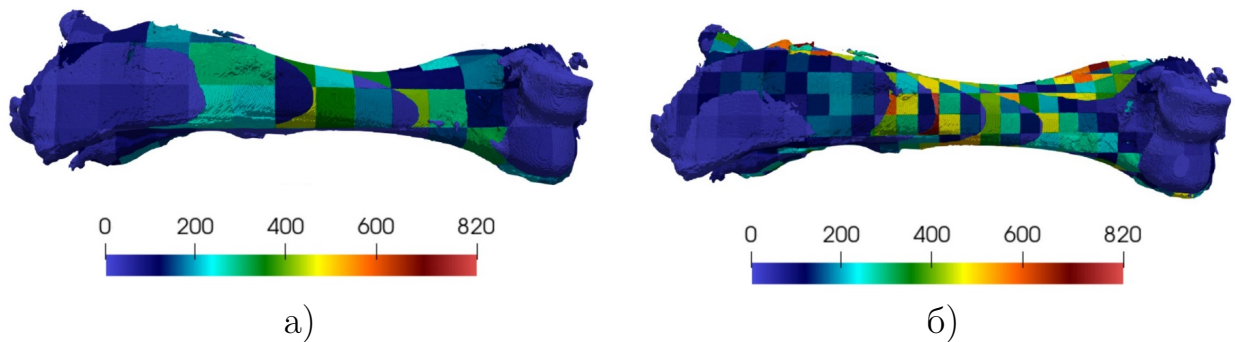


Рисунок 3.39 — Распределение значений эквивалентного напряжения по Мизесу (постпроцессорная сетка, МПа): а) и б) – 20 и 40 конечных элементов в направлении каждой координатной оси, соответственно.

Проведём анализ результатов, полученных для расчётной сетки с 40 конечными элементами в направлении каждой координатной оси (рис. 3.38б и 3.39б). Минимальная ошибка энергии (20 %) и максимальное значение эквивалентного напряжения по Мизесу (500 МПа) соответствуют области, расположенной вблизи приложения нагрузки. На рисунке 3.40 представлено распределение значений главных компонент тензора напряжений, определённое на постпроцессорных сетках (рис. 3.40а, 3.40в и 3.40д), и соответствующих главных направлений, отмеченных векторным полем (рис. 3.40б, 3.40г и 3.40е). Следует отметить, что в области максимума значений эквивалентного напряжения по Мизесу первая главная компонента тензора напряжений достигает наибольшего значения (400 МПа), а 3-я – наименьшего (-400 МПа). Данные результаты коррелируют с характером образования трещины в образце, определяемой натурным экспериментом, так как полученные значения превышают предел прочности костной ткани [47; 69; 81].

Сравнительный анализ результатов численного моделирования с данными натурального эксперимента проводился на основе вычисления эквивалентного усилия в области приложения кинематического нагружения. В общем случае воздействие индентора испытательной установки не направлено вдоль одной из координатных осей, соответствующих данным компьютерной томографии. Таким образом, величина полученной реакции может быть определена на основе её разложения в проекциях на компоненты. Интеграл от вектора напряжений в направлении приложения усилия, умноженного на проекцию элементарной площадки на нормальную плоскость, может рассматриваться как реакция на

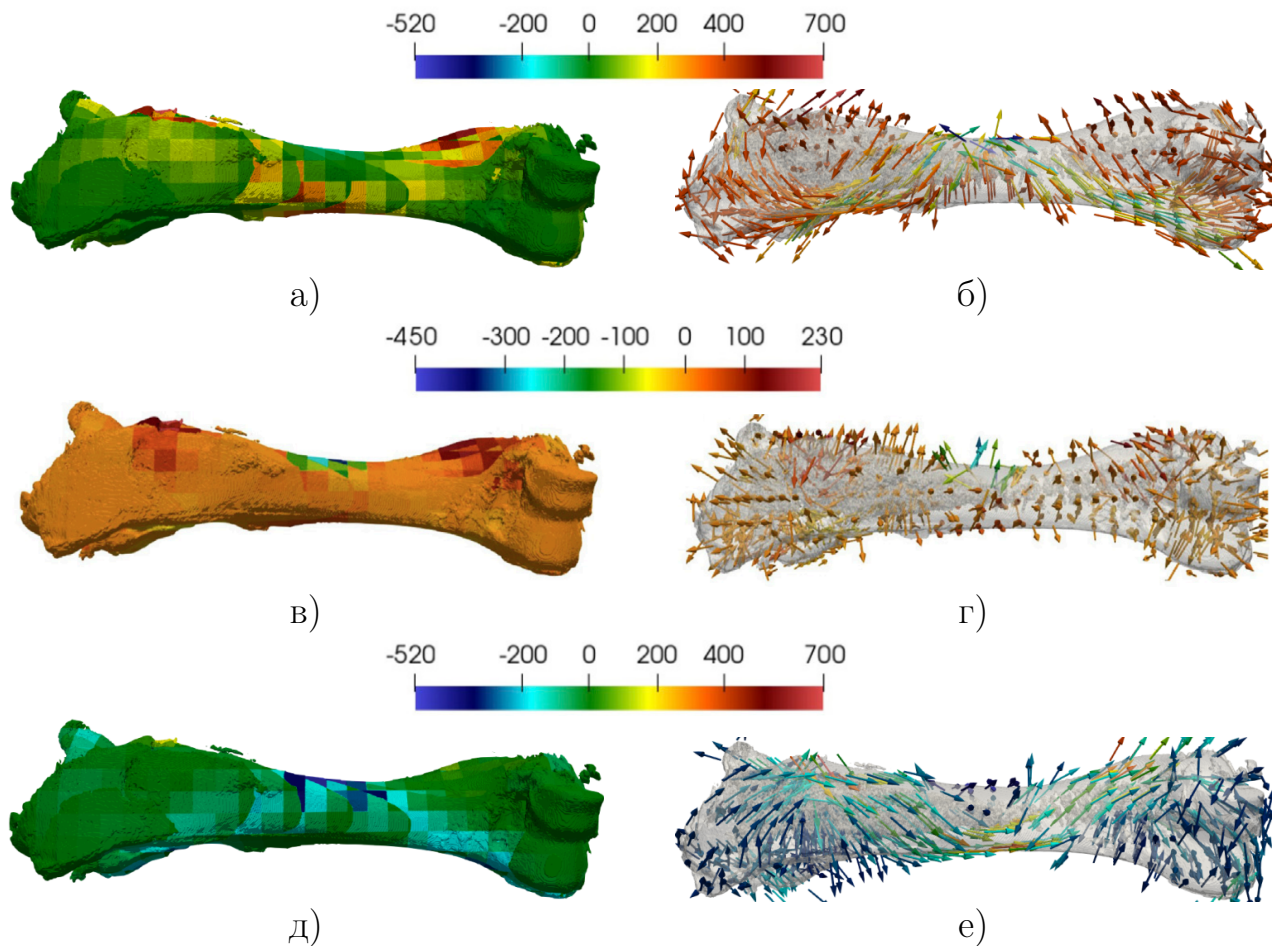


Рисунок 3.40 — Результаты численных расчётов (постпроцессорная сетка, 40 конечных элементов в направлении каждой координатной оси): а), в) и д) – распределение значений первой, второй и третьей главных компонент тензора напряжений, (МПа); б), г) и е) – векторное представление главных направлений соответствующих компонент.

эквивалентную силу (ф-ла (3.10)):

$$F = \int_{A^n} [\sigma] \{n\} dA, \quad (3.81)$$

где  $\{n\}$  – вектор нормали, определяющий направление воздействия индентора,  $A^n$  – проекция площади нагружения на плоскость, перпендикулярную вектору  $\{n\}$ , и  $[\sigma]$  – тензор напряжений, усреднённый по узлам поверхности кинематически нагруженных конечных элементов. Результирующий вектор силы сопоставлялся с данными физического испытания образца. В качестве расчётных точек в численной модели рассматривались перемещения, не превышающие предельные значения, полученные до образования трещины в области диафиза костного органа.

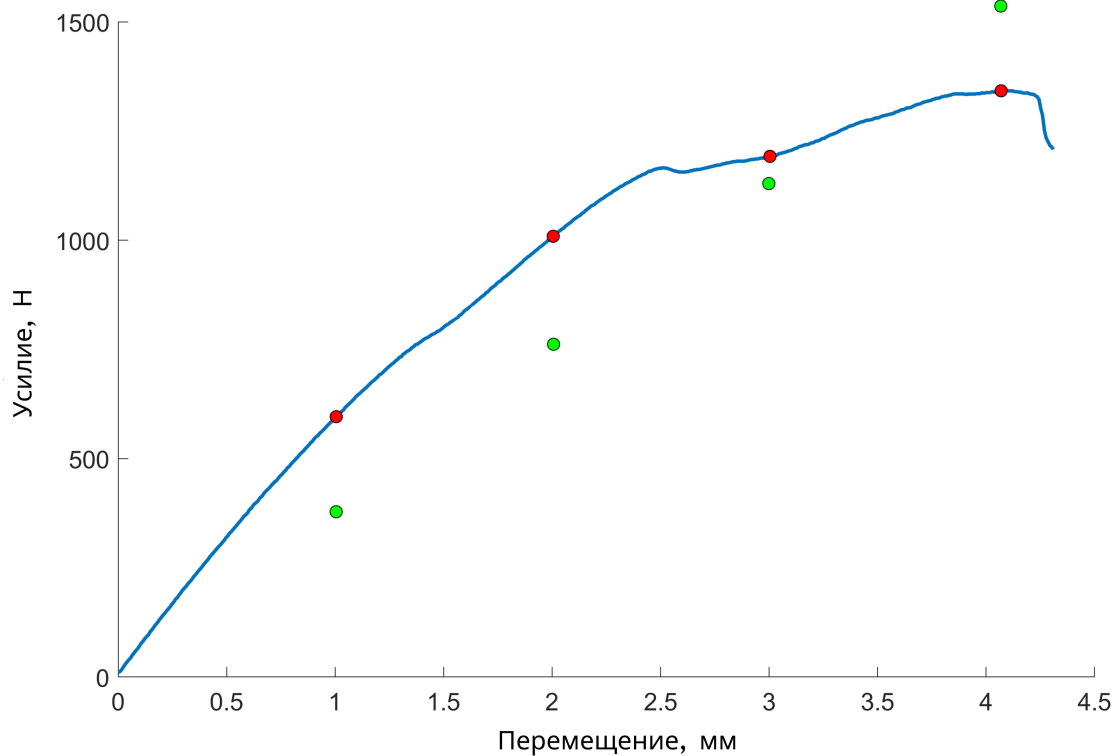


Рисунок 3.41 — Диаграмма разрушения образца: красные точки соответствуют данным натурального эксперимента, зелёные — результатам численного моделирования (40 конечных элементов в направлении каждой координатной оси).

Валидация численных результатов может быть реализована на основе построения графика зависимости усилия от перемещения (рис. 3.41). На кривой отмечены значения эквивалентной силы и прикладываемой в натурном эксперименте нагрузки для соответствующих значений перемещений. Относительная ошибка результатов варьировалась в пределах от 3 до 15 %. Область образования трещины соответствовала данным численного эксперимента. Погрешность может быть в большей степени определена неточностью приложения граничных условий.

### 3.4.3 Определение механических параметров

Моделирование, проводимое на основе постановки задачи, рассматриваемой в пункте 3.4.3, позволяет выполнять численные расчёты по данным компьютерной томографии образцов с учётом известного значения усреднённых механических параметров материала. Утверждение о линейной зависимости

полученного решения от величины прикладываемого воздействия и, соответственно, от модуля Юнга основывается на выражениях для определения компонент тензора упругости, представленных в формулах (3.15) и (3.16).

Рассмотрим построение модели для образца предплечевой кости минипига. Порядок проведения экспериментов над лабораторными животными описан в пункте 3.4.2. Размер данных компьютерной томографии аналогично составлял  $752 \times 752 \times 752$  элементов, величина вокселя –  $0.2 \times 0.2 \times 0.2$  мм, габариты сканируемой области –  $150.4 \times 150.4 \times 150.4$  мм. На рисунке 3.42а представлена визуализация данных сканирования, подверженных бинаризации исходного массива согласно заданному порогу.

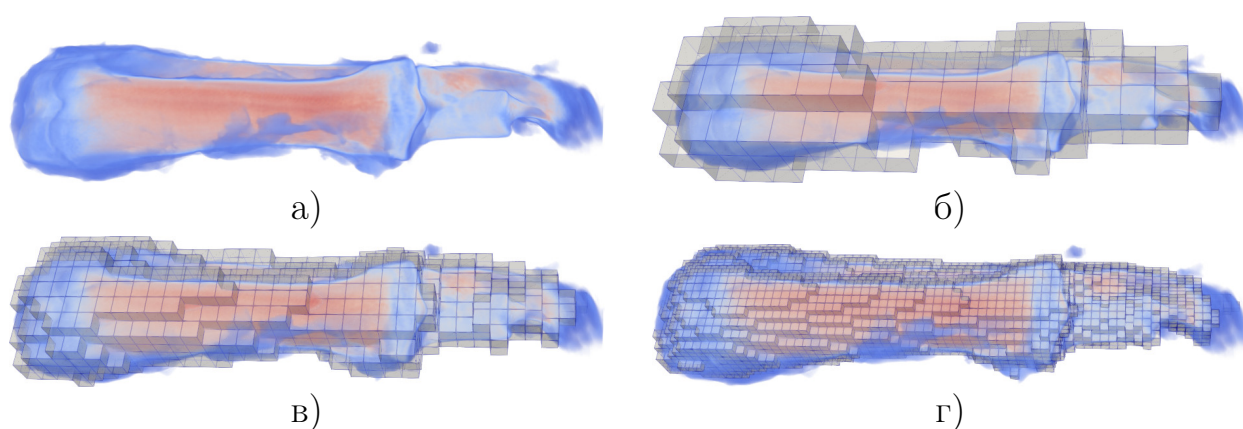


Рисунок 3.42 — Моделирование кости передней конечности минипига (предплечье): а) — визуализация обработанных данных компьютерной томографии; б), в) и г) — конечно-элементные сетки с различной степенью дискретизации (20, 40 и 80 конечных элементов в направлении каждой координатной оси, соответственно).

В соответствии с постановкой задачи, рассматриваемой в пункте 3.4.2, экспериментальный образец подвергался разрушению на разрывной установке в условиях действия поперечного изгиба (рис. 3.43). Численное моделирование проводилось на расчётных сетках с использованием 20, 40 и 80 конечных элементов в направлении каждой координатной оси компьютерной томографии: далее будем называть их в качестве первой, второй и третьей модели, соответственно. Фильтрация макрообъёмов с низким содержанием костного материала определялась пороговым значением, равным 5 % (рис. 3.42б — 3.42г). Характер приложения кинематических граничных условий соответствовал постановке задачи в пункте 3.4.2. Исходное значение модуля упругости Юнга соответствовало



1 ГПа, коэффициент Пуассона принимался равным 0.3. Исследование результатов, полученных по данным численного моделирования и на основе проведения физического эксперимента, выполнялось в точках, соответствующих перемещениям 1, 2 и 3 мм. Время вычислений для конечно-элементной сетки наибольшего размера составило 14 минут.

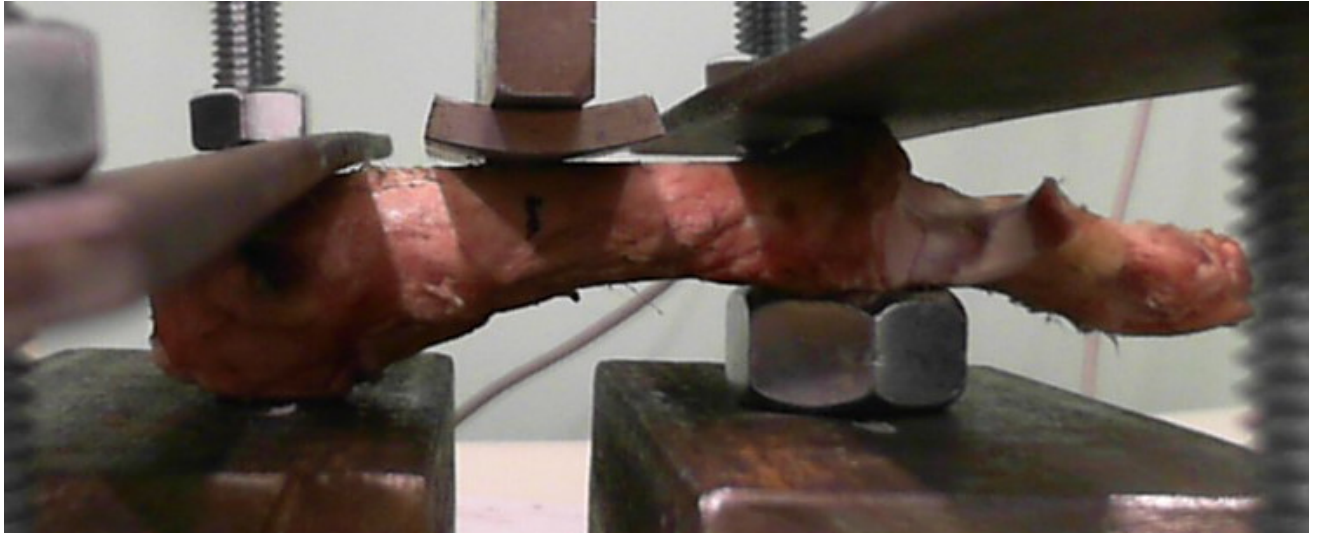


Рисунок 3.43 — Проведение натурального эксперимента, соответствующего поперечному изгибу.

На основе выводов, представленных в пункте 3.3.3, решение, полученное методом взвешенного интегрирования, сходится к результатам прямого моделирования при стремлении размера каждого конечного элемента сетки к величине вокселя. Таким образом, сопоставление данных, полученных для сеток различной степени дискретизации, требовало построения аналогичных численных моделей для фиктивного массива компьютерной томографии, соответствующего сплошному изотропному материалу. В этом случае результаты, полученные при расчёте образцов постоянной структуры, позволяли провести оценку сходимости предложенной методики прямого учёта свойств неомогенной среды с двух сторон (оценка сверху и снизу). На рисунке 3.44 представлены диаграммы нагружения для физического образца (жёлтый цвет), а также для численных моделей взвешенного (оранжевый цвет) и невзвешенного (синий цвет) интегрирования методом средних прямоугольников, полученные на основе расчётов с использованием первой модели.

Диаграммы, построенные на основе второй и третьей численных моделей имеют аналогичный характер и представлены на рисунках Д.1 и Д.2. Полученные графики показывают, что решение методом моделирования сплошного

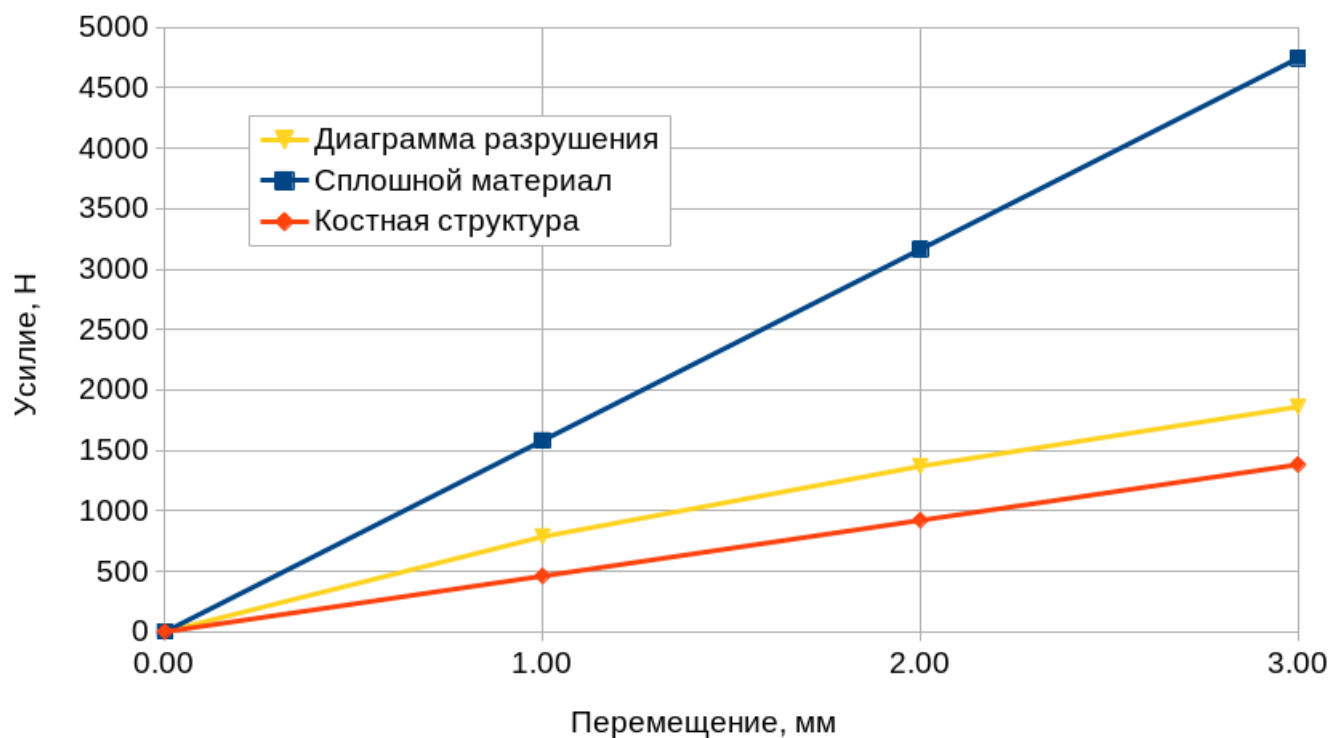


Рисунок 3.44 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне перемещений  $[0; 3]$  мм: первая модель.

образца на каждом шаге увеличения количества конечных элементов расчётной сетки приближается к результатам взвешенного интегрирования. Последние носят постоянный характер относительно угла наклона касательной, таким образом сохраняя соотношение, определяемое формулой (2.50).

Рассмотрим полную диаграмму нагружения образца с выделением соответствующих линейных участков для первой модели. На рисунке 3.45 представлен график (отмечен жёлтым цветом), соответствующий перемещениям индентора до механического разрушения костного органа. Синим и оранжевым цветом отображены первый и второй линейные участки, в диапазоне которых может быть проведено исследование упругих механических параметров образца: каждый из них имеет аппроксимацию полиномом первой степени (на графиках коэффициент детерминации отмечен символом  $R^2$ ). Зелёным и коричневым цветом выделены решения, полученные на основе взвешенного и невзвешенного интегрирования: вычисления представлены в диапазоне перемещений  $[0; 1]$  мм для возможности определения угла наклона образованной линии.

Аналогичные диаграммы полного разрушения образца для второй и третьей модели представлены на рисунках Д.3 и Д.4. Полученные графики

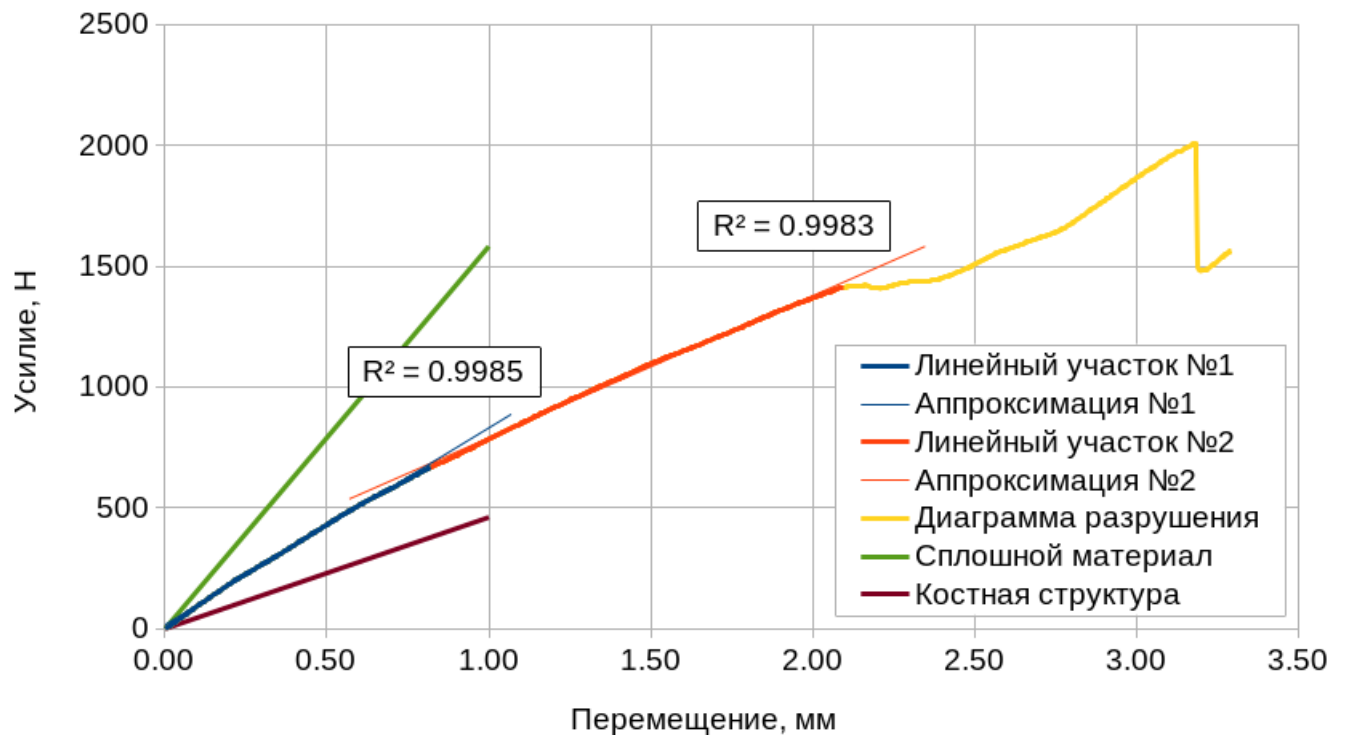


Рисунок 3.45 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне, предшествующем образованию трещины: первая модель.

демонстрируют наличие нескольких участков линейной зависимости усилия от перемещений. Выделение подобных диапазонов и аппроксимация соответствующих значений могут быть реализованы автоматически [2; 63].

На рисунке 3.46 представлено сопоставительное отображение графиков, полученных по данным физического испытания образца и на основе численного моделирования двумя методами интегрирования. Первый и второй линейные участки диаграммы нагружения (отмечены синим и зелёным цветом) перенесены в начало системы координат.

Графики зависимости усилия от перемещений в линейном диапазоне для второй и третьей модели представлены на рисунках Д.5 и Д.6. Аналогично результатам, построенным на диаграммах 3.44, Д.1 и Д.2, полученное методом интегрирования по сплошному материалу решение приближается к соответствующему углу наклона касательной для линейных диапазонов, определяющих результаты моделирования по данным компьютерной томографии.

Результаты, представленные на рисунках 3.46, Д.5 и Д.6, позволяют определить угол наклона касательных и вычислить на основе соотношения (2.50) соответствующие коэффициенты пропорциональности для значений модуля упругости Юнга и касательного модуля: в таблицах 3.4 и 3.5 представлены



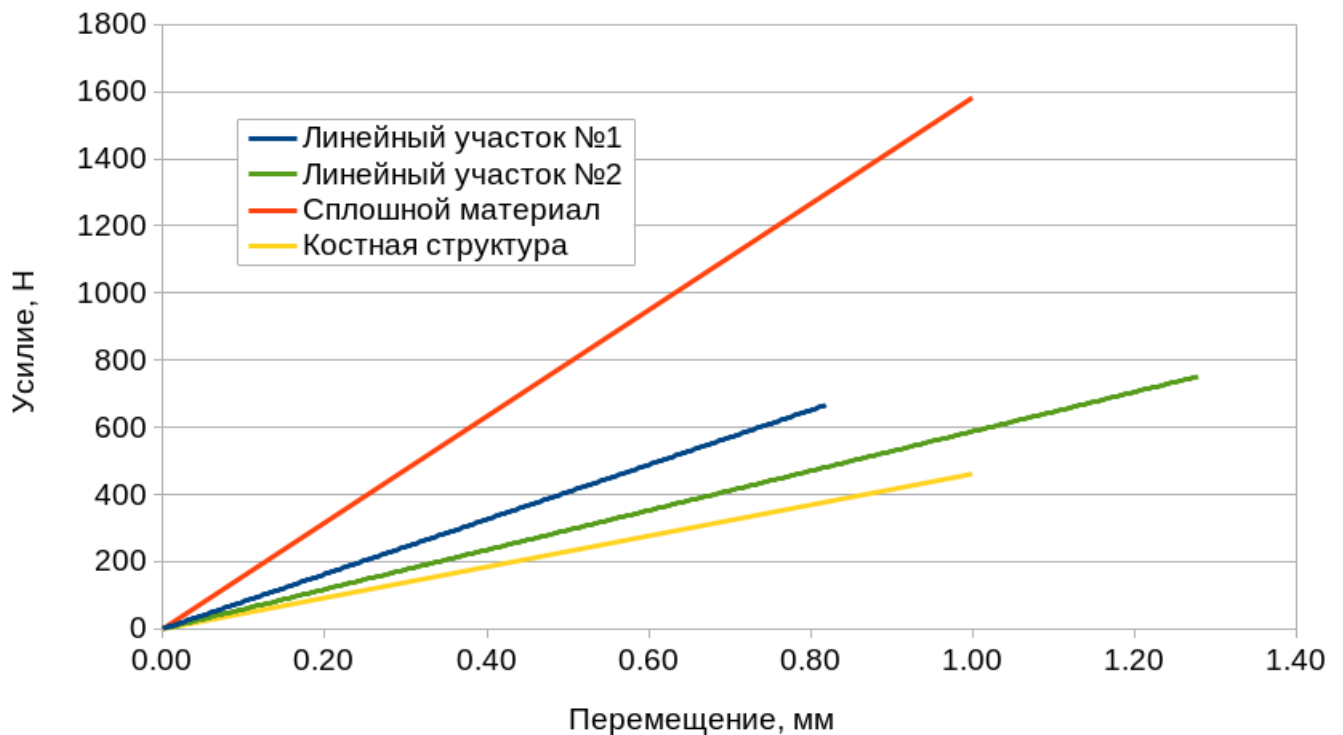


Рисунок 3.46 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне, соответствующем линейным участкам: первая модель.

величины, полученные на основе вычислений согласно первому и второму линейным участкам диаграммы нагружения натурального эксперимента.

Таблица 3.4 — Значения модуля упругости Юнга, соответствующие первому линейному участку.

Количество конечных элементов	Сплошной материал, (ГПа)	Костная структура, (ГПа)
20	0.51	1.77
40	0.77	1.78
80	1.09	1.75

На рисунке 3.47 представлена зависимость отношения значений модуля упругости Юнга и касательного модуля, соответствующих сплошному материалу, к величинам, определяющим костную структуру. Результаты показывают, что коэффициент пропорциональности стремится к единице, что определяет сходимость решения при увеличении количества конечных элементов к методу взвешенного интегрирования. Следует также отметить, что полученное соотношение остаётся постоянным для обоих линейных участков нагружения образца,

Таблица 3.5 — Значения касательного модуля, соответствующие второму линейному участку.

Количество конечных элементов	Сплошной материал, (ГПа)	Костная структура, (ГПа)
20	0.37	1.27
40	0.56	1.29
80	0.79	1.26

что подтверждает независимость сходимости численного решения относительно выбора соответствующего диапазона данных.

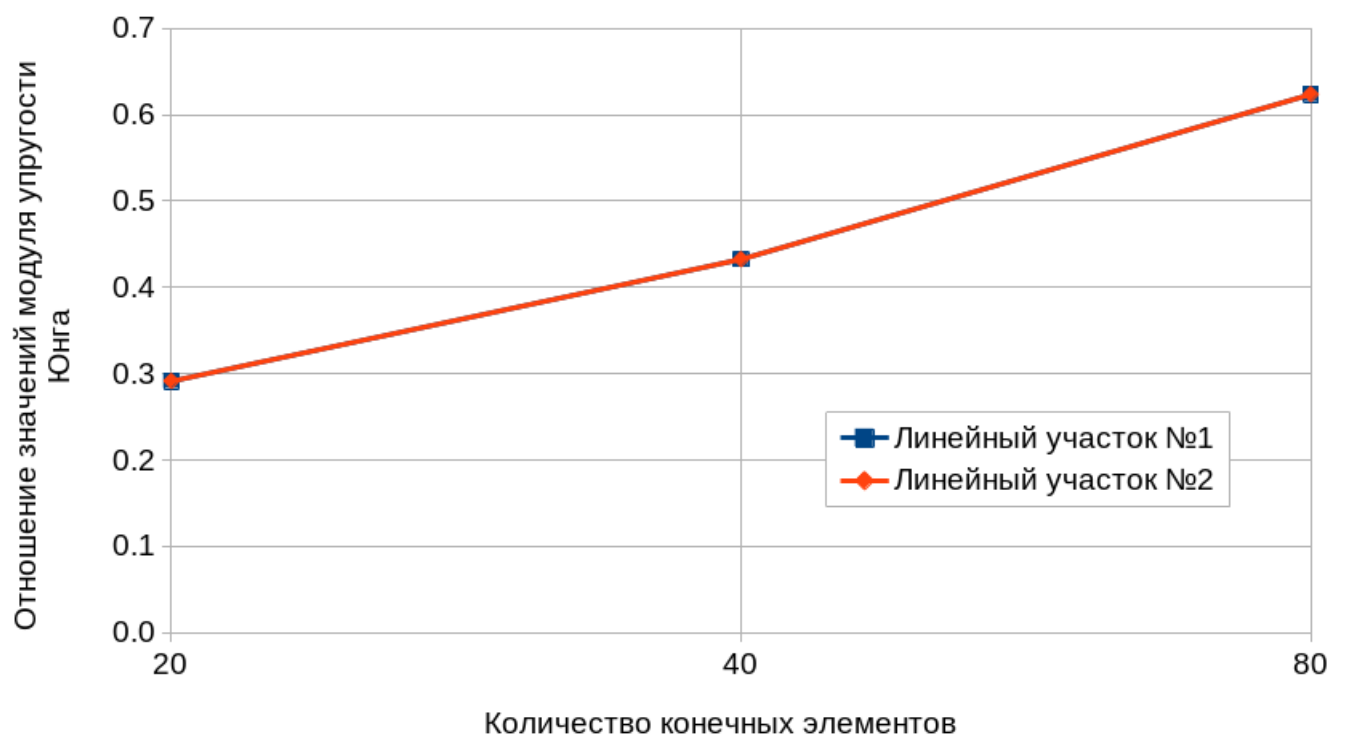


Рисунок 3.47 — Пропорциональная зависимость модуля упругости Юнга (линейный участок №1) и касательного модуля (линейный участок №2) относительно моделирования расчётными сетками различной степени дискретизации.

Результирующие значения механических параметров, полученные на основе данных для первого и второго линейных участков, представлены на рисунках 3.48 и 3.49. Сравнительный анализ графиков показывает, что соответствующие величины механического параметра для сплошного материала стремятся к результатам моделирования по данным сканирования при увеличении размера расчётной сетки. Полученные характеристики, представленные

для вычислений на основе материала костной структуры, варьируются в пределах 2 % и соответствуют истинным значениям модуля упругости Юнга [255] и касательного модуля. Наличие погрешности в результатах может быть объяснено неточностью приложения граничных условий, а также влиянием сходимости сеточного метода.

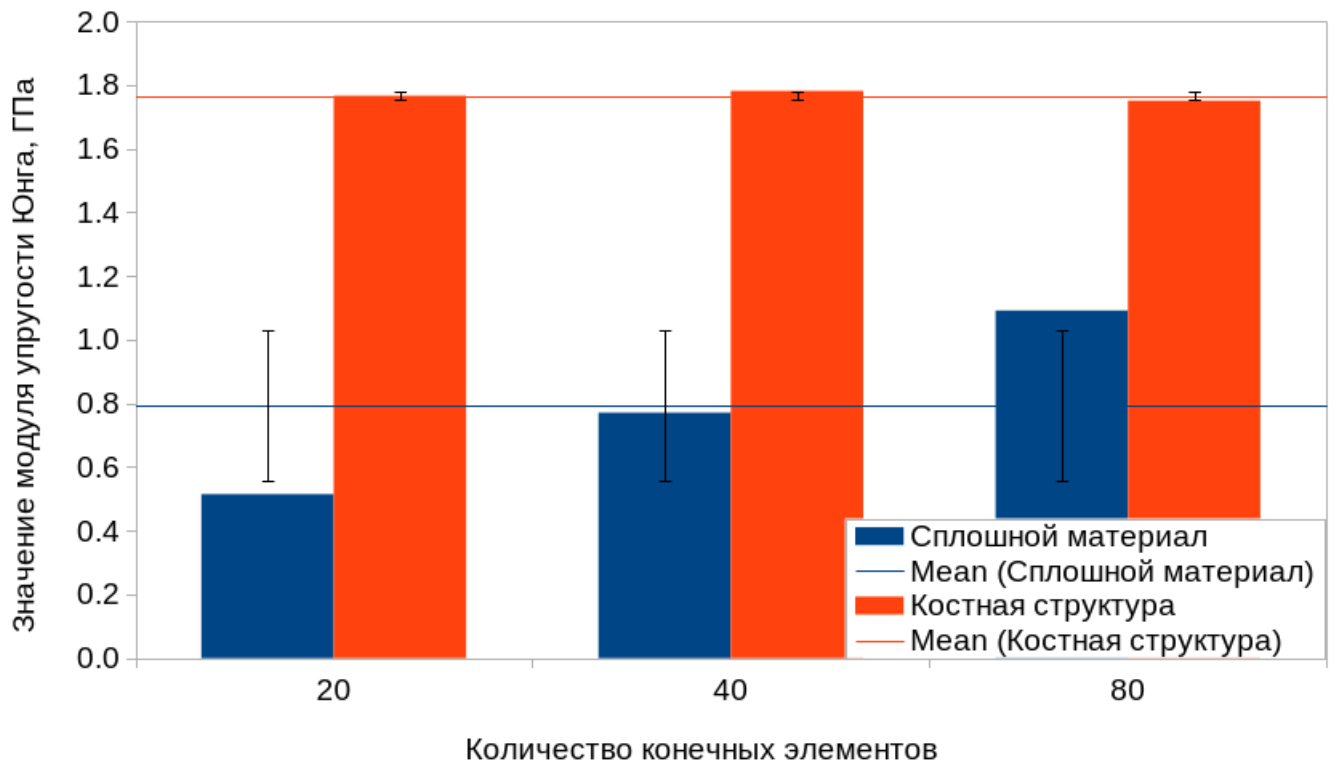


Рисунок 3.48 — Влияние размера расчётной сетки на значения модуля упругости Юнга, соответствующие первому линейному участку.

Достоверность полученного решения также устанавливалась на основе моделирования аналогичных образцов костных органов, принадлежащих другим экземплярам животных. В этом случае сохранялся тип нагружения: приложение кинематических граничных условий по возможности выполнялось идентично для каждого экспериментального образца. Выбор возраста животных, их физических показателей, характера медицинского вмешательства (период реадaptации и вид испытания – контузионная травма позвоночника) и способа извлечения образцов и их последующего хранения выполнялся в строгом соответствии с параметрами моделируемой группы. В таблице 3.6 представлены результирующие значения модуля упругости Юнга костной ткани трубчатых костей конечностей вьетнамской свиньи, соответствующие первому линейному участку: аналогично третьей модели (рис. 3.42г), в расчётах

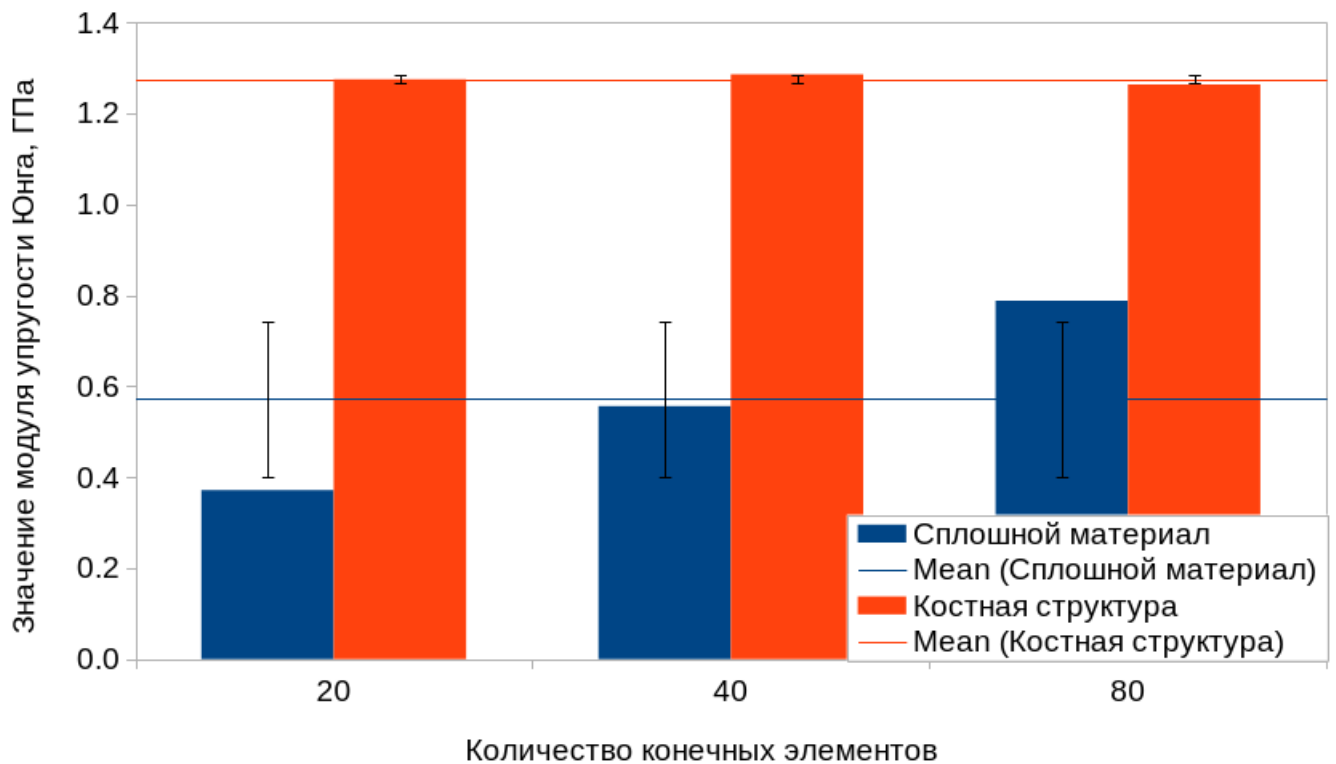


Рисунок 3.49 — Влияние размера расчётной сетки на значения касательного модуля, соответствующие второму линейному участку.

использовались сетки с 80 конечными элементами в направлении каждой координатной оси.

Таблица 3.6 — Значения модуля упругости Юнга костной ткани, соответствующие первому линейному участку нагружения образцов экспериментальной группы: степень дискретизации расчётной сетки соответствовала третьей модели, (ГПа).

Плечо	Предплечье	Бедро	Голень
2.67	2.48	1.23	1.01

На рисунке 3.50 представлено стандартное отклонение результатов вычислений для костей экспериментальной группы, распределённой на две выборки: образцы передних и задних конечностей. Графики показывают небольшой разброс данных относительно среднего арифметического значения в каждой подгруппе: 5.22 % для передних костных органов и 13.89 % – для задних. Сравнивая результаты, полученные для обеих выборок, можно сделать вывод о значительной разнице полученных значений модуля упругости Юнга относительно передних и задних образцов и о небольшом разбросе величин внутри

каждой подгруппы, соответственно. Данное заключение также подтверждается в работах [47; 69; 81; 255]. Таким образом, представленный метод позволяет с достаточной степенью достоверности восстанавливать эффективные свойства материала для различных образцов экспериментальной группы. Более того, полученные данные отображают слабую зависимость решения относительно геометрии образцов и точности восстановления расчётной сетки, что определяет применимость представленной методики к объектам уникальной структуры.

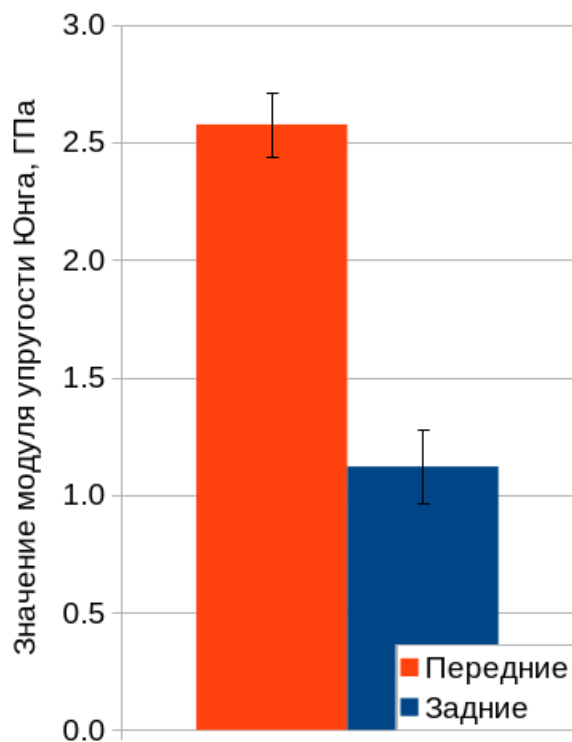


Рисунок 3.50 — Стандартное отклонение значений модуля упругости Юнга костной ткани, соответствующих первому линейному участку нагружения экспериментальных образцов: группы передних и задних конечностей.

Представленный метод определения упругих характеристик материала позволяет на основе результатов проведения натурального эксперимента осуществлять численную оценку значений модуля упругости Юнга и касательных модулей исходя из линейных участков диаграммы нагружения образца. Сравнительный анализ полученных данных позволяет сделать вывод о слабом влиянии (менее 2 %) размера конечно-элементной сетки на расчётные значения, соответствующие методу моделирования по данным компьютерной томографии. Результаты показывают, что моделирование сплошного образца при увеличении степени дискретизации геометрии стремится к решению методом взвешенного

интегрирования, что подтверждает сходимость численного решения к алгоритмам прямого моделирования образцов по данным сканирования. В силу незначительного влияния размера расчётной сетки метод взвешенного интегрирования предоставляет возможность расчёта параметров материала на основе меньшего количества конечных элементов, что приводит к оптимальным значениям времени вычислений относительно размера образованной системы уравнений. Таким образом, к преимуществам метода моделирования по данным компьютерной томографии можно отнести как возможность построения сетки на основе фильтрации, исключая необходимость в топологически нетривиальной процедуре восстановления геометрии, так и применение меньшего числа конечных элементов, что позволяет использовать расчётную сетку более низкой степени дискретизации для проведения численных расчётов по определению механических параметров материала. Возникающая при этом погрешность в большей степени может быть обусловлена точностью приложения кинематических и статических граничных условий.

### Выводы по главе 3

1. Механическая постановка задачи соответствует основным соотношениям линейной теории упругости: уравнения равновесия, уравнения совместности деформаций и обобщённый закон Гука. В расчётной области определены поверхности кинематического и статического нагружения, установлен вид соответствующих граничных условий, представлена формула для вычисления вектора реакции на эквивалентную силу. Определена форма записи математических объектов согласно Нотации Фойгта, введён тензор упругости изотропного материала. Установлена зависимость механических параметров среды от вектора пространственных координат. Описана двухфазная модель материала.
2. Численное моделирование методом конечных элементов, основанное на интегрировании локальной матрицы жёсткости методом средних прямоугольников, требует высокой производительности программного кода. В этом случае реализация алгоритма может быть проведена на основе компилируемого, статически типизированного языка программирования общего назначения *C++*. Сопутствующие математические вычисления могут быть реализованы на основе библиотеки линейной алгебры *Eigen*. Построение сглаженных расчётных сеток может быть проведено в системах *Ansys* и/или *Siemens NX*. Визуализация полученных данных представима на основе открытого пакета *ParaView*.
3. Исследована сходимость метода конечных элементов, основанного на взвешенном интегрировании локальной матрицы жёсткости по данным компьютерной томографии. Определено влияние разрешающей способности сканирующего устройства на точность усреднения свойств по объёму конечного элемента сетки, получена оценка времени соответствующих вычислений. Изучено влияние поворота локальной системы координат относительно пространства данных компьютерной томографии. Проведена оценка точности численного моделирования в зависимости от размера конечно-элементной сетки при постоянном размере исходного изображения объекта. Исследовано влияние неоднородности материала и структурной анизотропии, выполнен

сравнительный анализ расчётов образцов заданной структуры с результатами прямого моделирования. Проведены вычисления на сетках сглаженного и ступенчатого вида, соответствующие данным компьютерной томографии различных частей натуральных образцов костных органов. Поставлен физический эксперимент, соответствующий испытанию на поперечный изгиб, проведена валидация предложенного метода. Решена задача определения механических параметров на основе совокупного применения данных натурального испытания и результатов численного моделирования.



## Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Предложен и реализован новый подход к прямому учёту механических свойств образцов из негомогенных материалов на основе данных с изображений исследуемой области. Построена математическая модель, предполагающая применение значений весовой функции в качестве показателей жёсткости материала в текущем микроэлементе объёма. Введено в рассмотрение три моделируемых пространства, соответствующих сплошному материалу, данным компьютерной томографии и конечно-элементной сетке. Установлена связь между значениями весовой функции и обработанными данными с изображений области. Реализован алгоритм построения конечного элемента на основе взвешенного интегрирования локальной матрицы жёсткости. Исследовано влияние как структурного распределения материала в объёме, так и пространственного изменения его механических свойств.
2. Предложен и реализован алгоритм сегментации расчётной области на основе фильтрации регулярной ортогональной конечно-элементной сетки. Методика предполагает удаление из исходной области конечных элементов, соответствующих низкому содержанию упругого вещества, определяющего жёсткость моделируемого объекта. Исследована оптимальность соотношения между размером физического образца и разрешающей способностью сканирующего устройства. Изучены методы обработки данных исходных изображений с целью выделения различных фаз материала, применён метод Оцу.
3. Представлено обоснование применимости метода взвешенного интегрирования к образцам пористой структуры. Введены предположения о равенстве работ внутренних напряжений макрообъёма и соответствующих ему микрообъёмов и об отсутствии сопротивляемости внешним воздействиям конечных элементов с нулевым содержанием упругого материала. Проведена верификация метода взвешенного интегрирования на основе бинаризованного массива данных с изображений.
4. Рассмотрена сходимость сеточного метода на примере решения показательных задач. Полученные результаты подвергались сравни-

- тельному анализу на основе заданных механических характеристик и существующих аналогичных методик численного моделирования. Постпроцессорная обработка данных показала быструю сходимость метода взвешенного интегрирования локальной матрицы жёсткости к решению, полученному методом Гаусса. Сходимость конечно-элементного метода проверялась на основе данных компьютерной томографии фиксированного размера. Представленные результаты аналогично показали быструю сходимость данных численного моделирования относительно решения, полученного аналитическим способом. Оценка применимости метода к расчёту двухфазных областей неоднородной структуры проводилась на основе двух численных экспериментов, предполагающих исследование влияния как многофазной неоднородности материала, так и структурного распределения упругого вещества. Постпроцессорный анализ показал достоверность полученных результатов на основе сопоставительного анализа с данными решения, полученного как аналитическим способом, так и методом прямого моделирования.
5. Проведены расчёты по данным компьютерной томографии биологических образцов костных органов животных. Получены результаты, соответствующие различной степени и разным способам дискретизации расчётного объёма как для обособленных участков костного органа, так и его объёма целиком. Осуществлена оценка влияния способа приложения граничных условий и количества степеней свободы численной модели на точность получаемых результатов. Выполнена валидация предложенного метода на основе проведения натурального эксперимента костного органа на поперечный изгиб. Полученные результаты показали достоверное соответствие данных численного испытания с разрушением физического образца, а анализ напряжённо-деформированного состояния выявил области с наименьшим значением показателя ошибки вычислений.
  6. Предложена и реализована методика восстановления механических свойств образцов из неомогенных материалов на основе совокупного применения методов численного моделирования и натурального эксперимента. Описанный метод восстановления усреднённых механических свойств не требует точного описания геометрии исходной области и позволяет проводить расчёты на основе конечно-элементных сеток

различного размера. Разработанный алгоритм показал соответствие результатов литературным данным и может быть применён для определения приближенного значения модуля упругости Юнга и касательных модулей негетомогенного материала среды.

В заключение автор благодарит структурные подразделения Казанского (Приволжского) федерального университета за предоставленные Институтом фундаментальной медицины и биологии материалы исследований в виде костных органов животных и за возможность проведения рентгеновской компьютерной томографии на базе Института геологии и нефтегазовых технологий.

Работа выполнена при поддержке стипендии Президента Российской Федерации молодым учёным и аспирантам (СП-4182.2022.4).

Исследования проводились при финансовой поддержке: Государственное задание, выделенное Казанскому федеральному университету в сфере научной деятельности, проект № FZSM-2023-0009.

## Список литературы

1. *Абалухев Р.Н.* Перспективы использования аддитивных технологий в агропромышленном комплексе / Абалуев Р.Н., Чиркин С.О. // Наука и Образование. — 2019. — Т. 2, № 2. — С. 311.
2. Автоматическое определение механических свойств костной ткани по экспериментальным данным / Яикова В.В. [и др.] // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2021). — 2021. — Т. 3. — С. 034353. — (Искусственный интеллект и науки о данных).
3. *Адлуцкий В.Я.* Конечноэлементное моделирование процесса распространения трещин при изгибе пластин с повреждениями / Адлуцкий В.Я. // Методы решения прикладных задач механики деформируемого твердого тела. — 2010. — С. 3—10.
4. *Акулич А.Ю.* Экспериментальное определение разрушающих касательных напряжений трабекулярной костной ткани головки бедра человека / Акулич А.Ю., Акулич Ю.В., Денисов А.С. // Российский журнал биомеханики. — 2010. — Т. 14, № 4. — С. 7—16.
5. *Акулич Ю.В.* Влияние количества и размеров резьбовых фиксаторов на адаптационные изменения механических свойств губчатой костной ткани и усилие сжатия отломков после контролируемого остеосинтеза / Акулич Ю.В., Акулич А.Ю., Денисов А.С. // Российский журнал биомеханики. — 2012. — Т. 16, № 2. — С. 21—29.
6. Анализ напряжённо-деформированного состояния кости по данным компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXVII Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2021. — С. 76—78.
7. Анализ регенеративного процесса в области перелома большеберцовой кости / Ахтямов И.Ф. [и др.] // Травматология и ортопедия России. — 2016. — Т. 1, № 79. — С. 100—108.
8. Асептический некроз головки бедренной кости у детей / Белецкий А.В. [и др.]. — Скрипта, 2010. — ISBN 978-5-905-13-702-0.

9. *Банецкий М.В.* Биомеханическое обоснование использования вертлужного компонента при эндопротезировании тазобедренного сустава : дис. . . . канд. мед. наук. / Банецкий М.В. — 2008.
10. *Бережной Д.В.* Расчет взаимодействия деформируемых конструкций с учетом трения в зоне контакта на основе метода конечных элементов / Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Султанов Л.У. // Вестник Казанского технологического университета. — 2014. — Т. 17, № 14. — С. 478—481.
11. Биомеханическое моделирование методом конечных элементов по данным компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXIX Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2023. — С. 86—87.
12. Биомеханическое моделирование трабекулярной костной ткани в состоянии равновесия / Чикова Т.Н. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2018. — Т. 22, № 3. — С. 282—291.
13. *Герасимов О.В.* Конечно-элементное моделирование костных органов на основе данных компьютерной томографии / Герасимов О.В. // XXV Туполевские чтения (школа молодых ученых) (Международная молодёжная научная конференция, посвященная 60-летию со дня осуществления Первого полета человека в космическое пространство и 90-летию Казанского национального исследовательского технического университета им. А.Н. Туполева-КАИ). — Казань, 2021. — С. 417—419.
14. *Герасимов О.В.* Моделирование элемента пористой среды на основе данных компьютерной томографии / Герасимов О.В. // XXIV Туполевские чтения (школа молодых ученых) (Международная молодёжная научная конференция). — Казань, 2019. — С. 164—166.
15. *Герасимов О.В.* Моделирование напряженно-деформированного состояния по данным компьютерной томографии / Герасимов О.В., Рахматулин Р.Р., Саченков О.А. // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред (11-ая Всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского). — Москва, 2021. — С. 273—279.
16. *Голованов А.И.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твёрдых тел / Голованов А.И., Бережной Д.В. — Казань : Издательство "ДАС", 2001. — 301 с. — ISBN 5-8185-0038-1.

17. *Григорьевых, Д.П.* Математическое моделирование трещин в твердых деформируемых телах с использованием гексаэдральных сеток / Григорьевых, Д.П., Хохлов, Н.И., Петров, И.Б. // Труды МФТИ. — 2015. — Т. 7, № 4. — С. 28—37.
18. *Данилушкин, В. С.* Конечно-элементное моделирование процесса зарождения и развития трещин в пористом алюминиевом сплаве : Вып. квалификац. работа по направлению подгот. 22.04.02 "Металлургия" / Данилушкин, В. С. — Самара : Самар. нац. исслед. ун-т им. С. П. Королева (Самар. ун-т), 2021.
19. *Е.В. Брытков.* Механика композиционных материалов / Е.В. Брытков, В.А. Санников. — Учебное пособие. — СПб. : Балт. гос. техн. ун-т, 2012. — 74 с. — ISBN 978-5-85546-694-2.
20. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. — Москва : Издательство "МИР", 1975. — 542 с.
21. *Иванов Д.В.* Интрамедуллярный стержень нового типа для остеосинтеза диафизарных переломов бедра / Иванов Д.В., Барабаш А.П., Барабаш Ю.А. // Российский журнал биомеханики. — 2015. — Т. 19, № 1. — С. 52—64.
22. *Измайлова З.Т.* Предоперационная диагностика модульной трансформации при чрескостном остеосинтезе бедренной кости / Измайлова З.Т. // Российский журнал биомеханики. — 2009. — Т. 13, № 2. — С. 93—98.
23. Исследование напряженно-деформированного состояния эндопротезированного тазобедренного сустава / Акулич Ю.В. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2007. — Т. 11, № 4. — С. 9—35.
24. *Климов О.В.* Расчет и контроль биомеханической оси нижней конечности во фронтальной плоскости при ее коррекции по Илизарову / Климов О.В. // Российский журнал биомеханики. — 2014. — Т. 18, № 2. — С. 239—247.
25. Конечно-элементная оценка деформированного состояния по данным компьютерной томографии / Воробьёв О.В. [и др.] // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. — 2021. — № 2. — С. 44—54. — DOI: 10.15593/perm.mech/2021.2.05.
26. Конечно-элементное моделирование костных органов на основе данных компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // (XXII Меж-

- дународная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам). — Москва, 2021. — С. 536—538.
27. Конечно-элементное моделирование органов с учетом данных компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Биомеханика (XIV Всероссийская конференция с международным участием). — Пермь, 2020. — С. 87—91.
  28. Конечно-элементное моделирование развития трещины в образце с концентратором в условиях высокотемпературной ползучести / Горохов В.А. [и др.] // Проблемы прочности и пластичности. — 2017. — Т. 79, № 3. — С. 312—326. — DOI: 10.32326/1814-9146-2017-79-3-312-326.
  29. Конечно-элементное моделирование с учетом данных компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXVI Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2020. — С. 40—41.
  30. *Крылов О.В.* Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчётах / Крылов О.В. — Учеб. пособие для вузов. — Москва : М.: Радио и связь, 2002. — 104 с. — ISBN 5-256-01627-X.
  31. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела / Лехницкий С.Г. — М.: Наука, 1977. — 416 с.
  32. Лечение остеонекроза головки бедра / Ахтямов И.Ф. [и др.]. — Скрипта, 2013.
  33. Лечение пострадавших с переломами проксимального отдела бедренной кости в условиях Больницы скорой медицинской помощи / Ахтямов И.Ф. [и др.] // Современное искусство медицины. — 2013. — Т. 1, № 9. — С. 23—30.
  34. Математическое моделирование ротационной флексионной остеотомии / Андреев П.С. [и др.] // Научно-технический вестник Поволжья. — 2014. — Т. 5. — С. 18—21.
  35. *Менщикова Т.И.* Влияние силы мышц бедра и голени на опорные реакции стоп у больных ахондроплазией после коррекции роста / Менщикова Т.И., Долганова Т.И., Аранович А.М. // Российский журнал биомеханики. — 2014. — Т. 18, № 2. — С. 247—258.
  36. Методика построения репрезентативной модели по данным компьютерной томографии / Харин Н.В. [и др.] // Вестник ПНИПУ. Механика. — 2018. — Т. 3. — С. 95—102. — DOI: 10.15593/perm.mech/2018.3.10.

37. Моделирование влияния функциональных нагрузок на изменение свойств кортикальной кости бедра после операции / А.В. Сотин [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 1999. — Т. 2.
38. Моделирование повреждений костных структур в экспериментах на животных / Ананьева А.Ш. [и др.] // Инновационная медицина Кубани. — 2021. — Т. 1. — С. 47—55. — DOI: 10.35401/2500-0268-2021-21-1-47-55.
39. Моделирование распределения механических свойств костной ткани под действием внешней нагрузки / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXIV Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2018. — С. 34—35.
40. *Надеждин К.Д.* Визуальные методы определения деформаций и напряжений на поверхности испытываемых конструкций / Надеждин К.Д., Шарнин Л.М., Кирпичников А.П. // Вестник Казанского технологического университета. — 2016. — Т. 19, № 12. — С. 143—146.
41. *Нехожин А.В.* Разработка метода и программного обеспечения для моделирования реологического деформирования армированного биокomпозиционного материала : Диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук / Нехожин А.В. — 2016.
42. *О.А. Саченков.* Автоматизированное моделирование и расчёт конструкций в ANSYS: одномерные модели / О.А. Саченков, П.В. Большаков, О.В. Герасимов. — Казань : Казан. ун-т, 2019. — 140 с. — учеб. пособие.
43. Определение механических свойств костной ткани численно-цифровым методом на основе данных компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2023. — Т. 27, № 3. — С. 53—66. — DOI: 10.15593/RZhBiomech/2023.3.04.
44. Определение напряженно-деформированного состояния тела с учетом внутренних дефектов, определяемых компьютерной томографией / Герасимов О.В. [и др.] // Машиностроение: инновационные аспекты развития (II Международная научно-практическая конференция). — 2019. — С. 170—173.
45. Определение напряженно-деформированного состояния костей по данным компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2023. — Т. 8 (761). — С. 3—15. — DOI: 10.18698/0536-1044-2023-8-3-15.



46. Определение распределения механических свойств органа из костной ткани по данным томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Механика, ресурс и диагностика материалов и конструкций (XII Международная конференция). — 2018. — С. 338.
47. Опыт исследования механических свойств трубчатых костей собак / Н.Ю. Анисимова [и др.] // Vet Pharma. — 2012. — № 4. — (Экспериментальная онкология).
48. Оценка деформированного состояния методом конечных элементов на основе изображений / Воробьев О. [и др.] // Математическое моделирование в естественных науках (XXIX Всероссийская школа-конференция). — 2020. — С. 25.
49. *П.Ф. Лесгафт*. Анатомия человека / П.Ф. Лесгафт. — 1895. — Выпуски I и II (Лейпциг, 1892).
50. *П.Ф. Лесгафт*. О причинах, влияющих на форму костей / П.Ф. Лесгафт.
51. *П.Ф. Лесгафт*. Основы теоретической анатомии. Т. 1 / П.Ф. Лесгафт. — 2-е изд. — 1896.
52. Постановка начально-краевой задачи о перестройке трабекулярной костной ткани / Киченко А.А. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2012. — Т. 16, 4(58). — С. 36—52.
53. Построение конечно элементной модели по данным компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXVIII Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2022. — С. 68—69.
54. Построение конечно элементной модели по данным компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXV Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2019. — С. 66—67.
55. Построение механической модели элементов гетерогенной среды на основе численно-цифрового алгоритма обработки данных компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2019. — Т. 23, № 1. — С. 87—97. — DOI: 10.15593/RJBiomech/2019.1.10.
56. Построение модели органа из костной ткани по данным компьютерной томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические

- проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXIV Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2018. — С. 35—36.
57. Построение неоднородной конечно-элементной модели по данным компьютерной томографии / Саченков О.А. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2018. — Т. 22, № 3. — С. 290—302. — DOI: 10.15593/RJBiomeh/2018.3.05.
58. Построение репрезентативной конечно элементной модели по данным томографии / Герасимов О.В. [и др.] // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред (XXIV Международный симпозиум им. А.Г. Горшкова). — Москва, 2018. — С. 32—33.
59. *Преображенский А.П.* Применение аддитивных технологий в порошковой металлургии / Преображенский А.П., Токарева Н.М. // Вестник Воронежского института высоких технологий. — 2018. — Т. 1(24). — С. 81—84.
60. Программа автоматизированной оценки прочности элементов неомогенных сред по данным их компьютерной томографии : пат. 2022668571 / Саченков О.А., Рахматулин Р.Р., Герасимов О.В. ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"(ФГАОУ ВО КФУ). — Заявл. 10.10.2022.
61. Программа анализа изображений биологических объектов : пат. 2017662477 / Саченков О.А., Балтина Т.В., Герасимов О.В. ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"(ФГАОУ ВО КФУ). — Заявл. 11.09.2017.
62. Программа анализа трёхмерных изображений биологических объектов : пат. 2018661542 / Саченков О.А. [и др.] ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"(ФГАОУ ВО КФУ). — Заявл. 09.07.2018.
63. Программа для автоматического определения механических свойств костной ткани по экспериментальным данным : пат. 2020615249 Федеральная служба по интеллектуальной собственности / Саченков О.А., Яикова В.В., Харин Н.В. ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"(ФГАОУ ВО КФУ). — Заявл. 2020.

64. Программа для построения конечно-элементного ансамбля по данным компьютерной томографии : пат. 2019664273 / Саченков О.А. [и др.] ; Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"(ФГАОУ ВО КФУ). — Заявл. 11.01.2019.
65. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела / Работнов Ю.Н. — М.: Наука, 1988. — 712 с. — (Учеб. пособие для вузов).
66. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 1 / Седов Л.И. — М.: Наука, 1970. — 492 с.
67. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды : в 2 т. Т. 2 / Седов Л.И. — М.: Наука, 1970. — 568 с.
68. Становление и развитие классической теории описания структуры костной ткани / Киченко А.А. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2008. — Т. 12, № 1. — С. 69—89.
69. *Стеценко И.И.* Активность роста и прочность костей скелета свиней при введении в рацион минеральных добавок / Стеценко И.И., Любин Н.А., Шлёнкина Т.М. // Вестник Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии. — 2011. — № 2. — С. 41—46.
70. *Т.В. Колмакова.* Метод моделирования структуры компактной костной ткани / Т.В. Колмакова // Компьютерные исследования и моделирование. — 2011. — Т. 3, № 4. — С. 413—420. — DOI: 10.20537/2076-7633-2011-3-4-413-420.
71. *Ташкинов А.А.* Упругость анизотропных материалов / Ташкинов А.А. — Пермь: ПНИПУ, 2010. — 49 с. — (Конспект лекций).
72. *Тверье В.М.* Задача коррекции прикуса в зубочелюстной системе человека / Тверье В.М., Никитин В.Н. // Российский журнал биомеханики. — 2015. — Т. 19, № 4. — С. 344—358.
73. *Тверье В.М.* Биомеханическая модель определения усилий мышц и связок в зубочелюстной системе человека / Тверье В.М., Няшин Ю.И., Никитин В.Н. // Российский журнал биомеханики. — 2013. — Т. 17, № 2. — С. 8—20.
74. Теоретическая оценка параметров ультразвуковых импульсов, возбуждаемых в геоматериалах лазерным излучением / Карабутов А.А. [и др.] // ФТПР11И. — 2003. — Т. 4. — С. 11—18.

75. Уточнение индивидуальной зависимости модуля упругости трабекулярной костной ткани от объемного содержания матрикса / Акулич Ю.В. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2014. — Т. 18, № 2. — С. 158—167.
76. *Фандеев В.П.* Методы исследования пористых структур / Фандеев В.П., Самохина К.С. // Интернет-журнал "Науковедение". — 2015. — Т. 7, № 4. — 34TVN415. — DOI: 10.15862/34TVN415.
77. Численное исследование напряженно-деформированного состояния тазобедренного сустава при ротационной остеотомии проксимального участка бедренной кости / Саченков О.А. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2016. — Т. 20, № 3. — С. 257—271.
78. Численное моделирование поведения гетерогенной среды под действием внешних нагрузок / Герасимов О.В. [и др.] // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред (8-ая Всероссийская научная конференция с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского). — 2018. — С. 25.
79. *Шигаев Е.С.* Особенности стационарного этапа лечения переломов проксимального отдела бедренной кости / Шигаев Е.С., Ахтямов И.Ф., Анисимов О.Г. — Казань : ТаГраф, 2017.
80. *Шилько С.В.* Метод определения in vivo вязкоупругих характеристик скелетных мышц / Шилько С.В., Черноус Д.А., Бондаренко К.К. // Российский журнал биомеханики. — 2007. — Т. 11, № 1. — С. 45—54.
81. *Шлёнкина Т.М.* Возрастные особенности механико-прочностных свойств костей свиней / Шлёнкина Т.М. // Вестник Ульяновской государственной сельскохозяйственной академии. — 2021. — С. 216—219.
82. Экспериментальное определение тензора структуры трабекулярной костной ткани / Киченко А.А. [и др.] // Российский журнал биомеханики. — 2011. — Т. 15, 4(54). — С. 78—93.
83. *Ю.В. Скворцов.* Механика композиционных материалов / Ю.В. Скворцов. — Конспект лекций по дисциплине. — Самара : СГАУ им. акад. С.П. Королёва (НИУ), 2013. — 94 с.
84. *Ю.И. Афанасьев.* Гистология / Ю.И. Афанасьев, Н.А. Юрина, Е.Ф. Котовский. — 5-е изд. — Москва : Медицина, 2002. — ISBN 5-225-04523-5.
85. *Ю.И. Няшин.* Экспериментальные методы в биомеханике / Ю.И. Няшин, Р.М. Подгайц. — Пермь : Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2008.

86. 3D printing of layered mesoporous bioactive glass/sodium alginate-sodium alginate scaffolds with controllable dual-drug release behaviors / S. Fu [et al.] // *Biomedical Materials*. — 2019. — Vol. 14, no. 6. — P. 065011. — DOI: 10.1088/1748-605X/ab4166.
87. A comparative study on different methods of automatic mesh generation of human femurs / M. Viceconti [et al.] // *Medical Engineering & Physics*. — 1998. — Vol. 20(1). — P. 1—10.
88. A computational approach to handle complex microstructure geometries / N. Moes [et al.] // *Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg.* — 2003. — Vol. 192. — P. 3163—3177.
89. A computational framework for canonical holistic morphometric analysis of trabecular bone / S. Bachmann [et al.] // *Scientific Reports*. — 2022. — Vol. 12, no. 1. — P. 5187. — DOI: 10.1038/s41598-022-09063-6.
90. A framework for automated analysis and simulation of 3d polycrystalline microstructures. Part 1: Statistical characterization / M. Groeber [et al.] // *Acta Materialia*. — 2008. — Vol. 56(6). — P. 1257—1273.
91. A framework for automated analysis and simulation of 3d polycrystalline microstructures. Part 2: Synthetic structure generation / M. Groeber [et al.] // *Acta Materialia*. — 2008. — Vol. 56(6). — P. 1274—1287.
92. A new method to determine trabecular bone elastic properties and loading using micromechanical finite-element models / B. van Rietbergen [et al.] // *Journal of Biomechanics*. — 1995. — Vol. 28, no. 1. — P. 69—81. — DOI: 10.1016/0021-9290(95)80008-5.
93. A scalable multilevel preconditioner for matrix-free  $\mu$ -finite element analysis of human bone structures / P. Arbenz [et al.] // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 2008. — Vol. 73(7). — P. 927—947.
94. *A. Fedorov*. Tetrahedral mesh generation for non-rigid registration of brain mri: Analysis of the requirements and evaluation of solutions / A. Fedorov, N. Chrisochoides // In *17th International Meshing Roundtable*. Springer Verlag. — 2008.
95. *A.C. Lewis*. Image-based modeling of the response of experimental 3d microstructures to mechanical loading / A.C. Lewis, A.B. Geltmacher // *Scripta Materialia*. — 2006. — Vol. 55(1). — P. 81—85.

96. Acoustical Imaging. Vol. 26 / ed. by R. G. Maev. — Boston, MA : Springer US, 2002. — (Acoustical Imaging). — ISBN 9781461346449 9781441986061. — DOI: 10.1007/978-1-4419-8606-1;pp.493-501.
97. An aerospace bracket designed by thermo-elastic topology optimization and manufactured by additive manufacturing / G. Shi [et al.] // Chinese Journal of Aeronautics. — 2020. — Vol. 33, no. 4. — P. 1252—1259. — DOI: 10.1016/j.cja.2019.09.006.
98. An efficient approach to converting three-dimensional image data into highly accurate computational models / P.G Young [et al.] // Philosophical Transactions of the Royal Society A Mathematical, Physical and Engineering Sciences. — 2008. — Vol. 366(1878). — P. 3155—3173.
99. An improved method for finite element mesh generation of geometrically complex structures with application to the skullbase / D.L. A. Camacho [et al.] // Journal of Biomechanics. — 1997. — Vol. 30(10). — P. 1067—1070.
100. An X-FEM and level set computational approach for image-based modelling: Application to homogenization / G. Legrain [et al.] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2011. — Vol. 86, no. 7. — P. 915—934. — DOI: 10.1002/nme.3085.
101. *Antolin, P.* Robust numerical integration on curved polyhedra based on folded decompositions / P. Antolin, X. Wei, A. Buffa // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2022. — Vol. 395. — P. 114948. — DOI: 10.1016/j.cma.2022.114948.
102. Application of a digital prototype for CT-based bone strength analysis / Gerasimov, Oleg [et al.] // 2022 VIII International Conference on Information Technology and Nanotechnology. — 2022. — P. 1—6. — DOI: 10.1109/ITNT55410.2022.9848693.
103. Arbitrary branched and intersecting cracks with the eXtended Finite Element Method / C. Daux [et al.] // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2000. — Vol. 48. — P. 1741—1760.
104. Are CT-Based Finite Element Model Predictions of Femoral Bone Strengthening Clinically Useful? / M. Viceconti [et al.] // Current Osteoporosis Reports. — 2018. — Vol. 16, no. 3. — P. 216—223. — DOI: 10.1007/s11914-018-0438-8.

105. *Athanasou, N.* Pathology of bone injury / Athanasou, N. // Diagnostic Histopathology. — 2009. — Vol. 15, no. 9. — P. 437—443. — DOI: 10.1016/j.mpdhp.2009.06.001.
106. Automated threedimensional finite element modelling of bone: a new method / J.H. Keyak [et al.] // Journal of Biomedical Engineering. — 1990. — Vol. 12(5). — P. 389—397.
107. Automatic Processing and Analysis of the Quality Healing of Derma Injury / E. Semenova [et al.] // Biomechanics in Medicine and Biology. Vol. 831. — Cham : Springer International Publishing, 2019. — P. 107—113. — ISBN 9783319972855 9783319972862. — DOI: 10.1007/978-3-319-97286-2\_10.
108. Automatically Gradient Threshold Estimation of Anisotropic Diffusion for Meyer’s Watershed Algorithm Based Optimal Segmentation / Dept. of Computer Science & Engineering, Mawlana Bhashani Science and Technology University, Tangail-1902, Dhaka, Bangladesh [et al.] // International Journal of Image, Graphics and Signal Processing. — 2014. — Vol. 6, no. 12. — P. 26—31. — DOI: 10.5815/ijigsp.2014.12.04.
109. *Balk, L. J.* Scanning acoustic microscopy / L. J. Balk // Surface and Interface Analysis. — 1986. — Vol. 9, no. 1. — P. 47—54. — DOI: 10.1002/sia.740090109.
110. *Black, J.* Bone structure: from cortical to calcium / Black, J., Tadros, J. // Orthopaedics and Trauma. — 2020. — Vol. 34. — DOI: 10.1016/j.mporth.2020.03.002.
111. Bone Histology / Stout, S. [et al.] // Oxford Bibliographies. — 2016. — DOI: 10.1093/OBO/9780199766567-0148.
112. Bone Stress-Strain State Evaluation Using CT Based FEM / Gerasimov, Oleg V. [et al.] // Frontiers in Mechanical Engineering. — 2021. — Vol. 7. — P. 688474. — DOI: 10.3389/fmech.2021.688474.
113. Bone Structure / Paul, R. [et al.] // Encyclopedia of Endocrine Diseases. — 2004. — Vol. 2. — P. 392—400. — DOI: 10.1016/B0-12-475570-4/00217-1.
114. Bone Volume Fraction and Fabric Anisotropy Are Better Determinants of Trabecular Bone Stiffness Than Other Morphological Variables / G. Maquer [et al.] // Journal of Bone and Mineral Research. — 2015. — Vol. 30, no. 6. — P. 1000—1008. — DOI: 10.1002/jbmr.2437.

115. *Burr, D.* Bone structure and function / Burr, D., Bellido, T., White, K. // *Rheumatology*. — 2015. — Vol. 1. — P. 42—55. — DOI: 10.1016/B978-0-323-09138-1.00006-1.
116. *C. Duarte.* An hp meshless Method / C. Duarte, J. Oden // *Numerical methods for partial differential equations*. — 1996. — Vol. 12. — P. 673—705.
117. *C.A. Duarte.* Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions / C.A. Duarte, D.J. Kim // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2008. — Vol. 197. — P. 487—504.
118. *C.A. Duarte.* An h-p adaptive method using clouds / C.A. Duarte, J.T. Oden // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1996. — Vol. 139(1—4). — P. 237—262.
119. *Carniel, T. A.* On multiscale boundary conditions in the computational homogenization of an RVE of tendon fascicles / T. A. Carniel, B. Klahr, E. A. Fancello // *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*. — 2019. — Vol. 91. — P. 131—138. — DOI: 10.1016/j.jmbbm.2018.12.003.
120. Characterization of porosity and hollow defects in ceramic objects built by extrusion additive manufacturing / L. Čelko [et al.] // *Additive Manufacturing*. — 2021. — Vol. 47. — P. 102272. — DOI: 10.1016/j.addma.2021.102272.
121. *Choobbasti, A. J.* Microstructure characteristics of cement-stabilized sandy soil using nanosilica / A. J. Choobbasti, S. S. Kutanaei // *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. — 2017. — Vol. 9, no. 5. — P. 981—988. — DOI: 10.1016/j.jrmge.2017.03.015.
122. *Cole, M.* Assessing intraskeletal and regional variation in pore type morphometry: A pilot of the Pore Extractor 2D ImageJ toolkit / Cole, M., Stout, S., Agnew, A. // *American Journal of Biological Anthropology*. — 2022. — Vol. 177, S73.
123. Composite finite elements for 3D image based computing / F. Liehr [et al.] // *Computing and Visualization in Science*. — 2009. — Vol. 12(4). — P. 171—188.



124. Computational biomechanical modelling of the lumbar spine using marching-cubes surface smoothed finite element voxel meshing / Z.L. Wang [et al.] // *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. — 2005. — Vol. 80(1). — P. 25—35.
125. Computer simulations of realistic microstructures of discontinuously reinforced aluminum alloy (dra) composites / H. Singh [et al.] // *Acta Materialia*. — 2006. — Vol. 54(8). — P. 2131—2143.
126. Computer simulations of realistic partially anisotropic microstructures statistically similar to real microstructures / H. Singh [et al.] // *Computational Materials Science*. — 2009. — Vol. 44(4). — P. 1050—1055.
127. Cortical bone structure of the proximal femur and incident fractures / Nissen, F. [et al.] // *Bone*. — 2021. — Vol. 155, 31(1). — P. 116284. — DOI: 10.1016/j.bone.2021.116284.
128. *Cowin S.C.* Fabric dependence of an anisotropic strength criterion / Cowin S.C. // *J. Mech. Materials*. — 1986. — Vol. 5. — P. 251—260.
129. *Cowin S.C.* The relationship between the elasticity tensor and the fabric tensor / Cowin S.C. // *J. Mech. Materials*. — 1985. — Vol. 4. — P. 137—147.
130. *Cowin S.C.* An evolution Wolff's law for trabecular architecture / Cowin S.C. // *J. Biomech. Engng.* — 1992. — Vol. 114. — P. 129—136.
131. *D. Cremers.* A review of statistical approaches to level set segmentation: integrating color, texture, motion and shape / D. Cremers, M. Rousson, R. Deriche // *Int. J. of Computer Vision*. — 2007. — Vol. 72, no. 2. — P. 195—215.
132. *D. Marr.* Theory of edge detection / D. Marr, E. Hildreth // *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*. — 1980. — Vol. 207. — P. 187—217.
133. *D.L. Phan.* A survey of current methods in medical image segmentation / D.L. Phan, C. Xu, J. Price // *Annual Review of Biomedical Engineering*. — 1998.
134. *Davydov R.L.* Numerical algorithm for investigating large elasto-plastic deformations / Davydov R.L., Sultanov L.U. // *Journal of engineering physics and thermophysics*. — 2015. — Vol. 88, no. 5. — P. 1280—1288. — DOI: 10.1007/s10891-015-1310-7.

135. *Denisova, Y.* Additive technology in construction / Y. Denisova // *Construction Materials and Products*. — 2020. — P. 33—42. — DOI: 10.34031/2618-7183-2018-1-3-33-42.
136. Design and 3D-printing of titanium bone implants: brief review of approach and clinical cases / V. V. Popov [et al.] // *Biomedical Engineering Letters*. — 2018. — Vol. 8, no. 4. — P. 337—344. — DOI: 10.1007/s13534-018-0080-5.
137. Determination of anisotropic elastic parameters from morphological parameters of cancellous bone for osteoporotic lumbar spine / C. Oefner [et al.] // *Medical & Biological Engineering & Computing*. — 2022. — Vol. 60, no. 1. — P. 263—278. — DOI: 10.1007/s11517-021-02465-0.
138. Determination of muscle effort at the proximal femur rotation osteotomy / Sachenkov O. [et al.] // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* — 2016. — Vol. 158, no. 1. — P. 012079.
139. Determination of rocks porosity by means of nondestructive techniques that use ultrasound generated by laser / Pumarega, I. [et al.] // *e-Journal of Nondestructive Testing*. — 2000. — Vol. 5(11). — P. 1435—4934. — 15th World Conference on NDT; Rome (Italy).
140. Determination of the orthotropic parameters of a representative sample by computed tomography / Kharin N. [et al.] // *J. Phys. Conf. Ser.* — 2019. — Vol. 1158, no. 3. — P. 032012.
141. Determining Effective Elasticity Parameters of Microstructured Materials / Schwen, L.O. [et al.] // *15th Workshop on the Finite Element Method in Biomedical Engineering*. — 2008. — P. 41—62.
142. Diffusion-weighted magnetic resonance imaging of femoral head osteonecrosis in two groups of patients: Legg-Perthes-Calve and Avascular necrosis / Ozel B.D. [et al.] // *Radiologia Medica*. — 2016. — Vol. 121, no. 3. — P. 206—213.
143. Direct image-based micro finite element modelling of bone tissue / Gerasimov, Oleg [et al.] // *MATEC Web of Conferences*. — 2020. — Vol. 329. — P. 03072. — DOI: 10.1051/mateconf/202032903072.
144. Direct Mechanics assessment of elastic symmetries and properties of trabecular bone architecture / R. Huiskes [et al.] // *J. Biomech.* — 1996. — Vol. 29(12). — P. 1653—1657.

145. Estimation of orthotropic mechanical properties of human alveolar bone / Marcián P. [et al.] // 22nd International Conference Engineering Mechanics. — 2016.
146. Evaluation of the bone tissue mechanical parameters after induced alimentary Cu-deficiency followed by supplementary injection of Cu nanoparticles in rats / O. Sachenkov [et al.] // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — 2015. — Vol. 98. — P. 012015. — DOI: 10.1088/1757-899X/98/1/012015.
147. Evaluation of external fixation device stiffness for rotary osteotomy / Galiullin R.R. [et al.] // International Journal of Applied Engineering Research. — 2015. — Vol. 10, no. 24. — P. 44855—44860.
148. Experimental characterization of granite damage using nonlinear ultrasonic techniques / J. Chen [et al.] // NDT & E International. — 2014. — Vol. 67. — P. 10—16. — DOI: 10.1016/j.ndteint.2014.06.005.
149. Experimental determination of the fabric tensor for cancellous bone tissue / Kichenko A.A. [et al.] // J. Biomech. — 2011. — Vol. 15, no. 4. — P. 66—81.
150. Fabric-elasticity relationships of tibial trabecular bone are similar in osteogenesis imperfecta and healthy individuals / M. Simon [et al.] // Bone. — 2022. — Vol. 155. — P. 116282. — DOI: 10.1016/j.bone.2021.116282.
151. *Fedotov, A.* Prediction of effective elasticity moduli of porous composite materials / A. Fedotov // Proceedings of Higher Schools. Powder Metallurgy and Functional Coatings. — 2015. — No. 1. — P. 32. — DOI: 10.17073/1997-308X-2015-1-32-37.
152. Finite Element Analysis of Customized Acetabular Implant and Bone after Pelvic Tumour Resection throughout the Gait Cycle / L. Maslov [et al.] // Materials. — 2021. — Vol. 14, no. 22. — P. 7066. — DOI: 10.3390/ma14227066.
153. Finite element analysis of trabecular bone structure: a comparison of image-based meshing techniques / D. Ulrich [et al.] // Journal of Biomechanics. — 1998. — Vol. 31(12). — P. 1187—1192.
154. Finite element simulations of the deformation of fused-cast refractories based on x-ray computed tomography / K. Madi [et al.] // Computational Materials Science. — 2007. — Vol. 39(1). — P. 224—229.

155. *G. Legrain*. Stability of incompressible formulations enriched with X-FEM / G. Legrain, N. Moes, A. Huerta // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2008. — Vol. 197(21—24). — P. 1835—1849.
156. *G.T. Charras*. Improving the local solution accuracy of large-scale digital image-based finite element analyses / G.T. Charras, R.E. Guldberg // Journal of Biomechanics. — 2000. — Vol. 33(2). — P. 255—259.
157. *Galati, M.* A finite element approach for the prediction of the mechanical behaviour of layered composites produced by Continuous Filament Fabrication (CFF) / M. Galati, M. Viccica, P. Minetola // Polymer Testing. — 2021. — Vol. 98. — P. 107181. — DOI: 10.1016/j.polymertesting.2021.107181.
158. *Gholizadeh, S.* A review of non-destructive testing methods of composite materials / S. Gholizadeh // Procedia Structural Integrity. — 2016. — Vol. 1. — P. 50—57. — DOI: 10.1016/j.prostr.2016.02.008.
159. *Gocha, T.* Histomorphometry of human cortical bone / Gocha, T., Robling, A., Stout, S. // In book: Biological Anthropology of the Human Skeleton. — 2018. — DOI: 10.1002/9781119151647.ch5.
160. Gradient flows and geometric active contour models / S. Kichenassamy [et al.] // In IEEE Int. Conf. on Computer Vision. — 1995. — P. 810—815.
161. *Grassie, K.* Bone tissue engineering / K. Grassie, Y. Khan // Musculoskeletal Tissue Engineering. — Elsevier, 2022. — P. 1—40. — ISBN 9780128238936. — DOI: 10.1016/B978-0-12-823893-6.00002-4.
162. *Gueguen, Y.* Upscaling: Effective Medium Theory, Numerical Methods and the Fractal Dream / Y. Gueguen, M. L. Ravalec, L. Ricard // Pure and Applied Geophysics. — 2006. — Vol. 163, no. 5/6. — P. 1175—1192. — DOI: 10.1007/s00024-006-0053-y.
163. *Gupta S.* Bone geometry and mechanical properties of the human scapula using computed tomography data / Gupta S., Dan P. // Trends Biomater. Artif. Organs. — 2004. — Vol. 17(2). — P. 61—70.
164. *Gusev V. E.* Laser optoacoustics / Gusev V. E., Karabutov A.A. — Moscow : Nauka, 1991. — 304 p.

165. *H. Moulinec*. A numerical method for computing the overall response of non-linear composites with complex microstructure / H. Moulinec, P. Suquet // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 1998. — Vol. 157(1—2). — P. 69—94.
166. *H. Moulinec*. Comparison of FFT-based methods for computing the response of composites with highly contrasted mechanical properties / H. Moulinec, P. Suquet // Physica B: Condensed Matter. — 2003. — Vol. 338(1—4). — P. 58—60.
167. *H.J. Kim*. Voxel-based meshing and unit-cell analysis of textile composites / H.J. Kim, C.C. Swan // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2003. — Vol. 56(7). — P. 977—1006.
168. *Hall, S. A*. Characterization of fluid flow in a shear band in porous rock using neutron radiography / S. A. Hall // Geophysical Research Letters. — 2013. — Vol. 40, no. 11. — P. 2613—2618. — DOI: 10.1002/grl.50528.
169. *Hollister, S. J*. A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites / S. J. Hollister, N. Kikuchi // Computational Mechanics. — 1992. — Vol. 10, no. 2. — P. 73—95. — DOI: 10.1007/BF00369853.
170. *Horii, H*. Is the Fabric Tensor Sufficient? / H. Horii, K. Sahasakmontri // Studies in Applied Mechanics. Vol. 20. — Elsevier, 1988. — P. 91—94. — ISBN 9780444705235. — DOI: 10.1016/B978-0-444-70523-5.50018-7.
171. *I. Babuska*. The partition of unity finite element method / I. Babuska, J.Y. Melenk // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1997. — Vol. 40(4). — P. 727—758.
172. *Imai, K*. Computed tomography-based finite element analysis to assess fracture risk and osteoporosis treatment / K. Imai // World Journal of Experimental Medicine. — 2015. — Vol. 5, no. 3. — P. 182. — DOI: 10.5493/wjem.v5.i3.182.
173. Infinite-contrast periodic composites with strongly nonlinear behavior: Effective-medium theory versus full-field simulations / M.I. Idiart [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2009. — Vol. 46(18—19). — P. 3365—3382.

174. Inpainting micro-CT images of fibrous materials using deep learning / R. Karamov [et al.] // Computational Materials Science. — 2021. — Vol. 197. — P. 110551. — DOI: 10.1016/j.commatsci.2021.110551.
175. Interconnection of structural features and physico-mechanical properties of rocks / Mekhanobr-Tekhnika Research and Production, Saint-Petersburg, Russia [et al.] // Gornyi Zhurnal. — 2017. — P. 53—58. — DOI: 10.17580/gzh.2017.09.10.
176. *J. Parvizian*. Finite cell method / J. Parvizian, A. Duster, E. Rank // Computational Mechanics. — 2007. — Vol. 41(1). — P. 121—133.
177. *J.R. Cebral*. From medical images to anatomically accurate finite element grids / J.R. Cebral, R. Löhner // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2001. — Vol. 51(8). — P. 985—1008.
178. *Jia, L.* 3D imaging of fractures in carbonate rocks using X-ray computed tomography technology / L. Jia, M. Chen, Y. Jin // Carbonates and Evaporites. — 2014. — Vol. 29, no. 2. — P. 147—153. — DOI: 10.1007/s13146-013-0179-9.
179. *K. Terada*. Finite cover method for linear and non-linear analyses of heterogeneous solids / K. Terada, M. Asai, M. Yamagishi // International journal for numerical methods in engineering. — 2003. — Vol. 58(9). — P. 1321—1346.
180. *K. Terada*. An integrated procedure for three-dimensional structural analysis with the finite cover method / K. Terada, M. Kurumatani // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2005. — Vol. 63. — P. 2102—2123.
181. *Kasiviswanathan V.* Analytical, numerical and experimental studies on effective properties of layered (2-2) multiferroiccomposites / Kasiviswanathan V., Arockiarajan A. // Sensors and Actuators. — 2015. — Vol. 236. — P. 380—393.
182. *Kayumov R.A.* Structure of nonlinear elastic relationships for the highly anisotropic layer of a nonthin shell / Kayumov R.A. // Mech. Compos. Mater. — 1999. — Vol. 35, no. 5. — P. 409—418. — DOI: 10.1007/BF02329327.

183. *Kristell Dreau*. Studied X-FEM enrichment to handle material interfaces with higher order finite element / Kristell Dreau, Nicolas Chevaugeon, Nicolas Moes // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2010. — Vol. 199(29—32). — P. 1922—1936.
184. *Kurra, S. H.* Flowchart for Basic Non-destructive Testing Technologies in Biomaterials / S. H. Kurra, J. M. Zhang, A. Pennathur // 25th Southern Biomedical Engineering Conference 2009, 15 – 17 May 2009, Miami, Florida, USA. T. 24. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. — C. 35—38. — ISBN 9783642016967 9783642016974. — DOI: 10.1007/978-3-642-01697-4\_15.
185. *Kusec, V.* Histology of bone tissue and histomorphology – report on standardized terminology / Kusec, V., Marusic, A., Stavljenic-Rukavina, A. // Lijecnicki vjesnik. — 1993. — Vol. 115, no. 3/4. — P. 115—8.
186. *L. L. Mishnaevsky Jr.* Automatic voxel-based generation of 3d microstructural fe models and its application to the damage analysis of composites / L. L. Mishnaevsky Jr. // Materials Science and Engineering: A. — 2005. — Vol. 407(1—2). — P. 11—23.
187. Laser Additive Manufacturing on Metal Matrix Composites: A Review / N. Li [et al.] // Chinese Journal of Mechanical Engineering. — 2021. — Vol. 34, no. 1. — P. 38. — DOI: 10.1186/s10033-021-00554-7.
188. *M. Kurumatani*. Finite cover method with multi-cover layers for the analysis of evolving discontinuities in heterogeneous media / M. Kurumatani, K. Terada // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2009. — Vol. 79(1). — P. 1—24.
189. *MacDonald, D.* Computed tomography / D. MacDonald // Oral and Maxillofacial Radiology. — 1st ed. — Wiley, 2019. — P. 73—88. — ISBN 9781119218708 9781119218739. — DOI: 10.1002/9781119218739.ch4.
190. *Maslov, L. B.* Mathematical Model of Bone Regeneration in a Porous Implant / L. B. Maslov // Mechanics of Composite Materials. — 2017. — Vol. 53, no. 3. — P. 399—414. — DOI: 10.1007/s11029-017-9671-y.
191. Mechanical properties of bread crumbs from tomography based Finite Element simulations / P. Babin [et al.] // Journal of Materials Science. — 2005. — Vol. 40(22). — P. 5867—5873.

192. Method for quantitative assessment of acetabular bone defects / G. Hettich [et al.] // Journal of Orthopaedic Research. — 2019. — Vol. 37, no. 1. — P. 181—189. — DOI: 10.1002/jor.24165.
193. Methods of studying the structure and properties of mountain breeds on samples (quick review) / A. A. Karabutov [et al.] // Mining science and technology. — 2018. — No. 4. — P. 10—20. — DOI: 10.17073/2500-0632-2018-4-10-20.
194. Micro finite element analysis of dental implants under different loading conditions / P. Marcián [et al.] // Computers in Biology and Medicine. — 2018. — Vol. 96. — P. 157—165. — DOI: 10.1016/j.combiomed.2018.03.012.
195. Micro-computed tomography assessment of bone structure in aging mice / Shim, J. [et al.] // Scientific Reports. — 2022. — Vol. 12, no. 1. — P. 8117. — DOI: 10.1038/s41598-022-11965-4.
196. Microstructural Finite-Element Analysis of Influence of Bone Density and Histomorphometric Parameters on Mechanical Behavior of Mandibular Cancellous Bone Structure / P. Marcián [et al.] // Solid State Phenomena. — 2016. — Vol. 258. — P. 362—365. — DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.258.362.
197. Microstructure-based stress analysis and evaluation for porous ceramics by homogenization method with digital image-based modeling / N. Takano [et al.] // International Journal of Solids and Structures. — 2003. — Vol. 40(5). — P. 1225—1242.
198. *Mirkhalaf, S.* Determination of the size of the Representative Volume Element (RVE) for the simulation of heterogeneous polymers at finite strains / S. Mirkhalaf, F. Andrade Pires, R. Simoes // Finite Elements in Analysis and Design. — 2016. — Vol. 119. — P. 30—44. — DOI: 10.1016/j.finel.2016.05.004.
199. Modeling Holes and Inclusions by Level Sets in the Extended Finite Element Method / N. Sukumar [et al.] // Comp. Meth. in Applied Mech. and Engrg. — 2001. — Vol. 190. — P. 6183—6200.



200. *Moreno, R.* Techniques for Computing Fabric Tensors: A Review / R. Moreno, M. Borga, Ö. Smedby // Visualization and Processing of Tensors and Higher Order Descriptors for Multi-Valued Data. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2014. — P. 271—292. — ISBN 9783642543005 9783642543012. — DOI: 10.1007/978-3-642-54301-2\_12.
201. *Moreno, R.* On the Efficiency of the Mean Intercept Length Tensor / Moreno, R., Smedby, Ö., Borga, M. // SSBA Symposium. — 2011. — DOI: 10.1.1.428.7510.
202. *N. Chawla.* Three-dimensional visualization and microstructure-based modeling of deformation in particle-reinforced composites / N. Chawla, R.S. Sidhu, V.V. Ganesh // Acta Materialia. — 2006. — Vol. 54(6). — P. 1541—1548.
203. *N. Moes.* Imposing dirichlet boundary conditions in the extended finite element method / N. Moes, E. Bechet, M. Tourbier // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2006. — Vol. 67(12). — P. 1641—1669.
204. *N. Moes.* A finite element method for crack growth without remeshing / N. Moes, J. Dolbow, T. Belytschko // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 46. — P. 131—150.
205. *Naboni, R.* Multi-scale design and fabrication of the Trabeculae Pavilion / R. Naboni, L. Breseghello, A. Kunic // Additive Manufacturing. — 2019. — Vol. 27. — P. 305—317. — DOI: 10.1016/j.addma.2019.03.005.
206. *Natali A.N.* Evaluation of stress induced in peri-implant bone tissue by misfit in multi-implant prosthesis / Natali A.N., Pavan P.G., Ruggero A.L. // Dent. Mater. Off. Publ. Acad. Dent. Mater. — 2006. — Vol. 22, no. 4. — P. 388—395. — DOI: 10.1016/j.dental.2005.08.001.
207. Neutron imaging and neutron tomography as non-destructive tools to study bulk-rock samples / B. Winkler [et al.] // European Journal of Mineralogy. — 2002. — Vol. 14, no. 2. — P. 349—354. — DOI: 10.1127/0935-1221/2002/0014-0349.

208. New features in cold neutron radiography and tomography Part II: applied energy-selective neutron radiography and tomography / N. Kardjilov [et al.] // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. — 2003. — Vol. 501, no. 2. — P. 536—546. — DOI: 10.1016/S0168-9002(03)00423-6.
209. *Nitz, A.* Bone Injury and Repair / Nitz, A., Kitzman, P. // Orthopaedic Physical Therapy Secrets. — 2006. — P. 30—37. — DOI: 10.1016/B978-156053708-3.50006-4.
210. Non-destructive testing and evaluation of composite materials/structures: A state-of-the-art review / B. Wang [et al.] // Advances in Mechanical Engineering. — 2020. — Vol. 12, no. 4. — P. 168781402091376. — DOI: 10.1177/1687814020913761.
211. Nondestructive micro-computed tomography for biological imaging and quantification of scaffold–bone interaction in vivo / G. Vanlenthe [et al.] // Biomaterials. — 2007. — Vol. 28, no. 15. — P. 2479—2490. — DOI: 10.1016/j.biomaterials.2007.01.017.
212. Numerical study of stress-strain state of pelvis at the proximal femur rotation osteotomy / Sachenkov O.A. [et al.] // J. Biomech. — 2016. — Vol. 20, no. 3. — P. 220—232. — DOI: 10.15593/RJBiomech/2016.3.06.
213. *Oliver, Nina.* A recursive Otsu thresholding method for scanned document binarization / Oliver, Nina, Morse, Bryan, Barrett, William //. — 2011. — P. 307—314. — DOI: 10.1109/WACV.2011.5711519.
214. On predicting the effective elastic properties of polymer nanocomposites by novel numerical implementation of asymptotic homogenization method / Zhao J. [et al.] // Composite Structures. — 2016. — Vol. 135. — P. 297—305.
215. Osteoporosis in swine / M. P. Lorenzetti [и др.] // Pesquisa Veterinária Brasileira. — 2022. — T. 42. — e07068. — DOI: 10.1590/1678-5150-pvb-7068.
216. *Otsu, N.* A Threshold Selection Method from Gray-Level Histograms / N. Otsu // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. — 1979. — Vol. 9, no. 1. — P. 62—66. — DOI: 10.1109/TSMC.1979.4310076.

217. Overcoming the limitation of in-situ microstructural control in laser additive manufactured Ti–6Al–4V alloy to enhanced mechanical performance by integration of synchronous induction heating / W. Fan [et al.] // Journal of Materials Science & Technology. — 2021. — Vol. 94. — P. 32—46. — DOI: 10.1016/j.jmst.2021.02.069.
218. *P.J. Frey*. Generation and adaptation of computational surface meshes from discrete anatomical data / P.J. Frey // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 2004. — Vol. 60(6). — P. 1049—1074.
219. Parameter determination of hereditary models of deformation of composite materials based on identification method / Kayumov R.A. [et al.] // Journal of Physics: Conference Series. — 2018. — Vol. 973, no. 1. — P. 012006. — DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012006.
220. Patient-Specific Bone Organ Modeling Using CT Based FEM / Gerasimov, Oleg [et al.] // Mesh Methods for Boundary-Value Problems and Applications. Vol. 141. — 2022. — P. 125—139. — (Lecture Notes in Computational Science and Engineering). — DOI: 10.1007/978-3-030-87809-2\_10.
221. Periosteal Skeletal Stem Cells and Their Response to Bone Injury / N. Zhang [et al.] // Frontiers in Cell and Developmental Biology. — 2022. — Vol. 10. — P. 812094. — DOI: 10.3389/fcell.2022.812094.
222. Photobiomodulation in bone injury repair: A systematic review / Dohnert, M. [et al.] // International Journal of Development Research. — 2022. — Vol. 12, no. 01. — P. 53165—53167. — DOI: 10.37118/ijdr.23588.01.2022.
223. Porosity Estimation from High Resolution CT SCAN Images of Rock Samples by Using Housfield Unit / N. L. Q. Cuong [и др.] // Open Journal of Geology. — 2018. — T. 08, № 10. — С. 1019—1026. — DOI: 10.4236/ojg.2018.810061.
224. *Prasad, M.* Mapping impedance microstructures in rocks with acoustic microscopy / M. Prasad // The Leading Edge. — 2001. — Vol. 20, no. 2. — P. 172—179. — DOI: 10.1190/1.1438902.
225. Prediction of fracture callus mechanical properties using micro-CT images and voxel-based finite element analysis / S. J. Shefelbine [et al.] // Bone. — 2005. — Vol. 36, no. 3. — P. 480—488. — DOI: 10.1016/j.bone.2004.11.007.

226. Quantitative Acoustic Microscopy / M. Prasad [et al.] // Acoustical Imaging. Vol. 26. — Boston, MA : Springer US, 2002. — P. 493—501. — ISBN 9781461346449 9781441986061. — DOI: 10.1007/978-1-4419-8606-1\_62.
227. *R. de Borst*. Challenges in computational materials science: Multiple scales, multi-physics and evolving discontinuities / R. de Borst // Computational Materials Science. — 2008. — Vol. 43(1). — P. 1—15.
228. *R. Malladi*. A topology independent shape modeling scheme / R. Malladi, J.A. Sethian, B.C. Vemuri // In SPIE Conf. on Geometric Methods, Comp. Vision II. — 1994. — Vol. 2031. — P. 246—258.
229. *Ralston, S. H.* Bone structure and metabolism / Ralston, S. H. // Medicine. — 2021. — Vol. 49, no. 9. — P. 567—571. — DOI: 10.1016/j.mpmed.2021.06.009.
230. *Re, F.* Determination of contact areas in rock joints by X-ray computer tomography / F. Re, C. Scavia // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 1999. — Vol. 36, no. 7. — P. 883—890. — DOI: 10.1016/S0148-9062(99)00056-X.
231. Relationships between material properties and CT scan data of cortical bone with and without metastatic lesions / Kaneko T.S. [et al.] // Med. Eng. Phys. — 2003. — Vol. 25 (6). — P. 445—54.
232. *Rho J.Y.* Relations of mechanical properties to density and CT numbers in human bone / Rho J.Y., Hobatho M.C., Ashman R.B. // Med. Eng. Phys. — 1995. — Vol. 17(5). — P. 347—55.
233. *Rice, J.* On the dependence of the elasticity and strength of cancellous bone on apparent density / J. Rice, S. Cowin, J. Bowman // Journal of Biomechanics. — 1988. — Vol. 21, no. 2. — P. 155—168. — DOI: 10.1016/0021-9290(88)90008-5.
234. Rotational open-wedge osteotomy improves treatment outcomes for patients older than eight years with Legg–Calve–Perthes disease in the modified lateral pillar B/C border or C group / Nakamura N. [et al.] // International Orthopaedics. — 2015. — Vol. 39, no. 7. — P. 1359—1364.
235. *S. Beucher*. The morphological approach to segmentation: the watershed transformation / S. Beucher, F. Meyer // Mathematical Morphology in Image Processing. — 1993. — C. 433—481.

236. *S. Youssef*. Finite element modelling of the actual structure of cellular materials determined by x-ray tomography / S. Youssef, E. Maire, R. Gaertner // *Acta Materialia*. — 2005. — Vol. 53(3). — P. 719—730.
237. *S.J. Hollister*. Homogenization theory and digital imaging: a basis for studying the mechanics and design principles of bone tissue / S.J. Hollister, N. Kikuchi // *Biotechnology and Bioengineering*. — 1994. — Vol. 43(7). — P. 586—596.
238. *S.K. Boyd*. Smooth surface meshing for automated finite element model generation from 3d image data / S.K. Boyd, R.Muller // *Journal of Biomechanics*. — 2006. — Vol. 39(7). — P. 1287—1295.
239. *Sagdatullin M.K.* Statement of the problem of numerical modelling of finite deformations / Sagdatullin M.K., Berezhnoi D.V. // *Applied Mathematical Sciences*. — 2014. — Vol. 8, no. 35. — P. 1731—1738. — DOI: 12988/ams.2014.4283.
240. *Sas, A.* Experimental validation of a voxel-based finite element model simulating femoroplasty of lytic lesions in the proximal femur / A. Sas, A. Sermon, G. H. van Lenthe // *Scientific Reports*. — 2022. — Vol. 12, no. 1. — P. 7602. — DOI: 10.1038/s41598-022-11667-x.
241. *Sause, M. G. R.* Computed Tomography / M. G. R. Sause // *In Situ Monitoring of Fiber-Reinforced Composites*. T. 242. — Cham : Springer International Publishing, 2016. — C. 457—532. — ISBN 9783319309538 9783319309545. — DOI: 10.1007/978-3-319-30954-5\_6.
242. *Scottish School of Non-Destructive Testing*. Non-Destructive Testing / Scottish School of Non-Destructive Testing // *Instrumentation Reference Book*. — Elsevier, 2010. — P. 567—592. — ISBN 9780750683081. — DOI: 10.1016/B978-0-7506-8308-1.00031-0.
243. *Scruby, C. B.* Laser Ultrasonics: Techniques and Applications / C. B. Scruby, L. E. Drain. — 1st ed. — Routledge, 2019. — ISBN 9780203749098. — DOI: 10.1201/9780203749098.
244. Selection of animal bone surrogate samples for orthopaedic screw testing based on human radius CT-derived bone morphology / J. Silva-Henao [et al.] // *Medical Engineering & Physics*. — 2022. — Vol. 103. — P. 103786. — DOI: 10.1016/j.medengphy.2022.103786.

245. *Smit*. Star length distribution: a volume-based concept for the characterization of structural anisotropy / Smit, Schneider, Odgaard // Journal of Microscopy. — 1998. — Vol. 191, no. 3. — P. 249—257. — DOI: 10.1046/j.1365-2818.1998.00394.x.
246. *Spence J.* Experimental High-Resolution Electron Microscopy / Spence J. //. — Oxford, 2013. — P. 300—302.
247. *Steiner, L.* Femoral Bone Strength Prediction Using Isotopological B-Spline-Transformed Meshes / L. Steiner, A. Synek, D. H. Pahr // Biomechanics. — 2022. — Vol. 2, no. 1. — P. 125—137. — DOI: 10.3390/biomechanics2010012.
248. Surface roughness characterization of open and closed rock joints in deep cores using X-ray computed tomography / M. Diaz [et al.] // International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences. — 2017. — Vol. 98. — P. 10—19. — DOI: 10.1016/j.ijrmms.2017.07.001.
249. *T. Belytschko*. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling / T. Belytschko, R. Gracie, G. Ventura // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. — 2009. — Vol. 17. — P. 043001.
250. *T. Belytschko*. Elastic Crack Growth in Finite Elements with Minimal Remeshing / T. Belytschko, T. Black // International Journal for Numerical Methods in Engineering. — 1999. — Vol. 45(5). — P. 601—620.
251. *T. Strouboulis*. The design and analysis of the generalized finite element method / T. Strouboulis, I. Babuška, K. Copps // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2000. — Vol. 181. — P. 43—69.
252. *T. Strouboulis*. The generalized finite element method / T. Strouboulis, K. Copps, I. Babuška // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2001. — Vol. 190(32—33). — P. 4081—4193.
253. *T. Strouboulis*. Generalized finite element method using mesh-based handbooks: application to problems in domains with many voids / T. Strouboulis, L. Zhang, I. Babuška // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2003. — Vol. 192(28—30). — P. 3109—3161.

254. *T. Strouboulis*. p-version of the generalized fem using mesh-based handbooks with applications to multiscale problems / T. Strouboulis, L. Zhang, I. Babuška // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 2004. — Vol. 60(10). — P. 1639—1672.
255. The deer femur – A morphological and biomechanical animal model of the human femur / D. C. Kieser [et al.] // *Bio-Medical Materials and Engineering*. — 2014. — Vol. 24, no. 4. — P. 1693—1703. — DOI: 10.3233/BME-140981.
256. The fabric dependence of the orthotropic elastic constants of cancellous bone / Turner, C.H. [et al.] // *J. Biomechanics*. — 1990. — Vol. 23. — P. 549—561.
257. The finite cell method for bone simulations: verification and validation / M. Ruess [et al.] // *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. — 2012. — Vol. 11, no. 3. — P. 425—437. — DOI: 10.1007/s10237-011-0322-2.
258. The finite cell method for three-dimensional problems of solid mechanics / A. Duster [et al.] // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 2008. — Vol. 197(45—48). — P. 3768—3782.
259. The Influence of Hindlimb Unloading on Bone and Muscle Tissues in Rat Model / T. Baltina [et al.] // *BioNanoScience*. — 2017. — Vol. 7, no. 1. — P. 67—69. — DOI: 10.1007/s12668-016-0288-8.
260. The long-term prognosis of Legg–Calve–Perthes disease: a historical prospective study with a median follow-up of forty one years / Heesakkers N. [et al.] // *International Orthopaedics*. — 2015. — Vol. 39, no. 5. — P. 859—863.
261. The longitudinal Young’s modulus of cortical bone in the midshaft of human femur and its correlation with ct scanning data / Cuppone M. [et al.] // *Calcified Tissue International*. — 2004. — Vol. 74 (3). — P. 302—309.
262. The study on the effect of artificial osteoporosis created by combined ovariectomy and calcium-restricted diets in a porcine model / J.-Y. Hsieh [et al.] // *Biomedical Engineering: Applications, Basis and Communications*. — 2023. — Vol. 35, no. 2. — P. 2250054. — DOI: 10.4015/S1016237222500545.
263. Thermal Infrared Radiation and Laser Ultrasound for Deformation and Water Saturation Effects Testing in Limestone / A. Kravcov [et al.] // *Remote Sensing*. — 2020. — Vol. 12, no. 24. — P. 4036. — DOI: 10.3390/rs12244036.

264. *Tigdemir, M.* Application of ultrasonic method in asphalt concrete testing for fatigue life estimation / M. Tigdemir, S. Kalyoncuoglu, U. Kalyoncuoglu // *NDT & E International*. — 2004. — Vol. 37, no. 8. — P. 597—602. — DOI: 10.1016/j.ndteint.2004.03.006.
265. Toward better understanding of the effect of fiber distribution on effective elastic properties of unidirectional composite yarns / Mohammadi Shah M. [et al.] // *Computers and Structures*. — 2016. — Vol. 163. — P. 29—40.
266. *Tözeren, A.* Does fabric tensor exist for a fabric? / A. Tözeren, R. Skalac // *Journal of Materials Science*. — 1989. — Vol. 24, no. 5. — P. 1700—1706. — DOI: 10.1007/BF01105694.
267. Triple osteotomy of the pelvis for Legg-Calve-Perthes disease: a mean fifteen year follow-up / Pailhe R. [et al.] // *International Orthopaedics*. — 2016. — Vol. 40. — P. 115—122.
268. *V. Caselles.* Geodesic active contours / V. Caselles, R. Kimmel, G. Sapiro // *In Proc. IEEE Intl. Conf. on Comp. Vis.* — 1995. — P. 649—699.
269. *V. Vinogradov.* An accelerated FFT algorithm for thermoelastic and non-linear composites / V. Vinogradov, G. W. Milton // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. — 2008. — Vol. 76(11). — P. 1678—1695.
270. *Vilchevskaya E.* Effective elastic properties of a particulate composite with transversely-isotropic matrix / Vilchevskaya E., Sevostianov I. // *International Journal of Engineering Science*. — 2015. — Vol. 94. — P. 139—149.
271. Volumetric analysis of the periodontal microstructure under antiresorptive therapy: an experimental study in rabbits / Becker, K. [et al.] // *Clinical Oral Investigations*. — 2022. — Vol. 26, no. 8. — P. 1—10. — DOI: 10.1007/s00784-022-04503-z.
272. *W. Hackbusch.* Composite finite elements for the approximation of PDEs on domains with complicated micro-structures / W. Hackbusch, S.A. Sauter // *Numerische Mathematik*. — 1997. — Vol. 75(4). — P. 447—472.
273. *Wang L.* Photo acoustic Imaging and Spectroscopy (Optical Science and Engineering) / Wang L. — CRC Press, 2009. — 499 p.



274. X-ray tomography applied to the characterization of cellular materials. related finite element modeling problems / E. Maire [et al.] // Composites Science and Technology. — 2003. — Vol. 63(16). — P. 2431—2443.
275. *Yogev, O.* Growth and development of inhomogeneous structures / Yogev, O., Antonsson, E.K. // Proceedings of ICED 2007, the 16th International Conference on Engineering Design. — 2007. — ICED'07/667.
276. *Z. Yu.* High-fidelity geometric modeling for biomedical applications / Z. Yu, M. J. Holst, J. A. McCammon // Finite Elements in Analysis and Design. — 2008. — Vol. 44(11). — P. 715—723.

## Приложение А

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2017662477

**Программа анализа изображений биологических объектов**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (ФГАОУ ВО КФУ) (RU)*

Авторы: *Саченков Оскар Александрович (RU), Балтина Татьяна Валерьевна (RU), Герасимов Олег Владимирович (RU)*




Заявка № 2017619219

Дата поступления 14 сентября 2017 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 09 ноября 2017 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев



## Приложение Б

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
**№ 2018661542**

**ПРОГРАММА АНАЛИЗА ТРЁХМЕРНЫХ  
ИЗОБРАЖЕНИЙ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет» (ФГАОУ ВО КФУ) (RU)*

Авторы: *Саченков Оскар Александрович (RU), Балтина Татьяна Валерьевна (RU), Герасимов Олег Владимирович (RU), Семёнова Елена Вячеславовна (RU)*

Заявка № **2018618619**  
Дата поступления **10 августа 2018 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **07 сентября 2018 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ившин**





## Приложение В

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



**СВИДЕТЕЛЬСТВО**  
о государственной регистрации программы для ЭВМ

**№ 2019664273**

**Программа для построения конечно-элементного ансамбля  
по данным компьютерной томографии**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования «Казанский  
(Приволжский) федеральный университет» (ФГАОУ ВО КФУ)  
(RU)*

Авторы: *Саченков Оскар Александрович (RU), Харин Никита  
Вячеславович (RU), Герасимов Олег Владимирович (RU),  
Шайхутдинова Лилия Вилевна (RU)*

Заявка № **2019662892**  
Дата поступления **17 октября 2019 г.**  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ **01 ноября 2019 г.**

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности



*Г.П. Излиев* Г.П. Излиев



## Приложение Г

## Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО  
о государственной регистрации программы для ЭВМ  
№ 2022668571

**Программа автоматизированной оценки прочности  
элементов негомогенных сред по данным их  
компьютерной томографии**

Правообладатель: *федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»  
(ФГАОУ ВО КФУ) (RU)*

Авторы: *Саченков Оскар Александрович (RU), Рахматулин  
Рамиль Русланович (RU), Герасимов Олег Владимирович (RU)*

Заявка № 2022668079  
Дата поступления 04 октября 2022 г.  
Дата государственной регистрации  
в Реестре программ для ЭВМ 10 октября 2022 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности  
*Ю.С. Зубов*

## Приложение Д

## Диаграммы нагружения образца к пункту 3.4.3

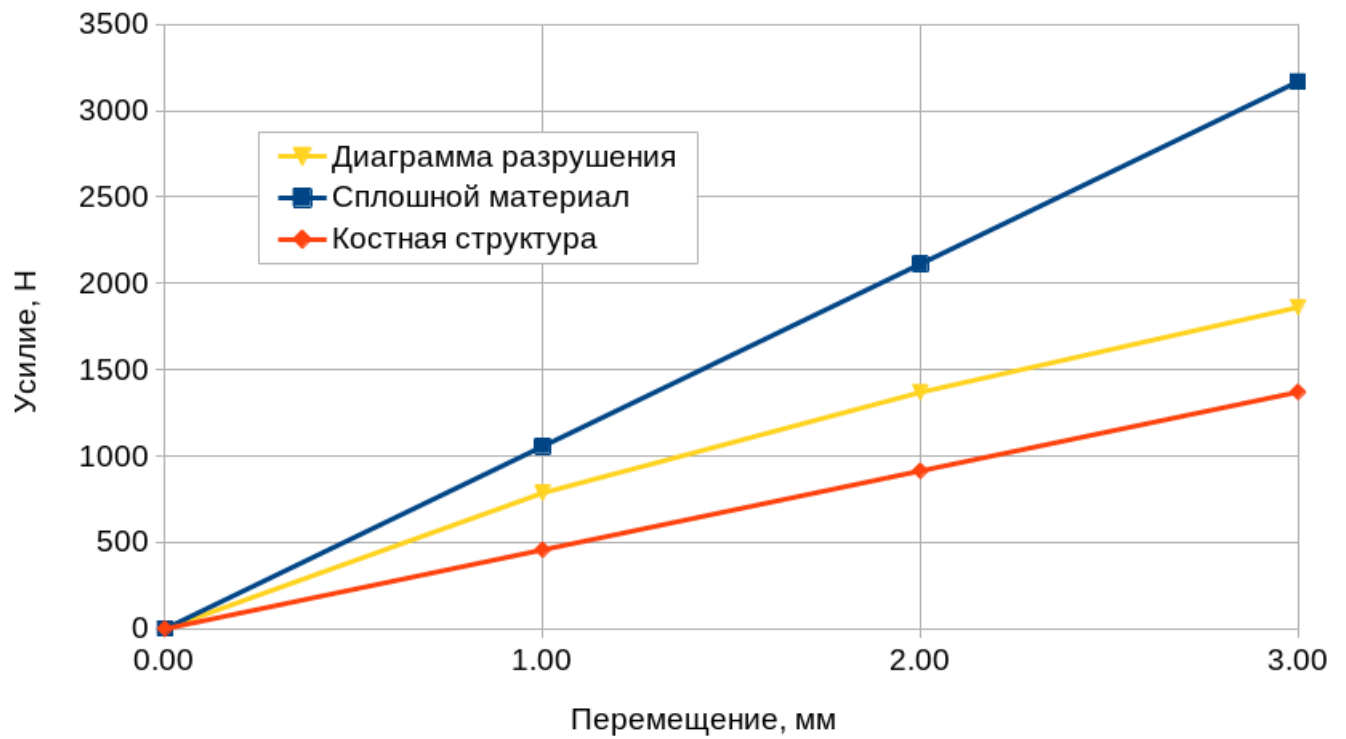


Рисунок Д.1 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне перемещений  $[0; 3]$  мм: вторая модель.

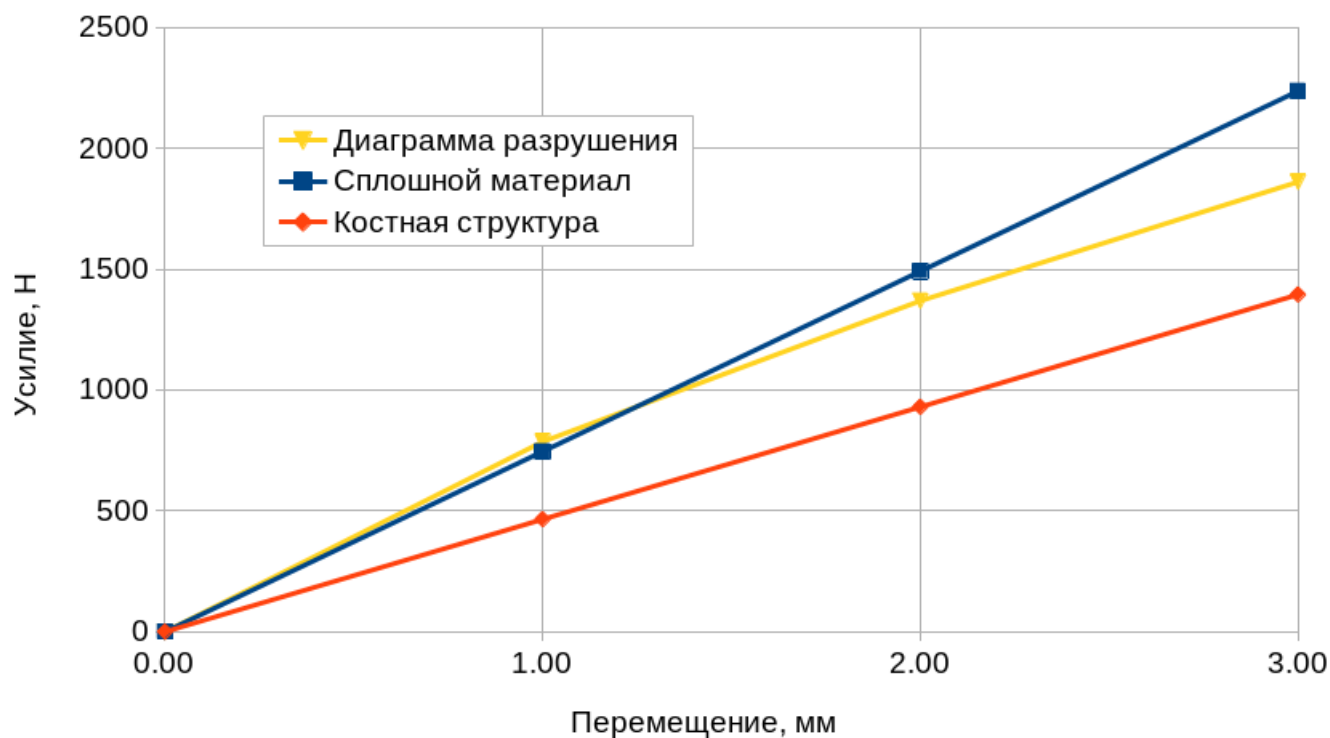


Рисунок Д.2 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне перемещений [0; 3] мм: третья модель.

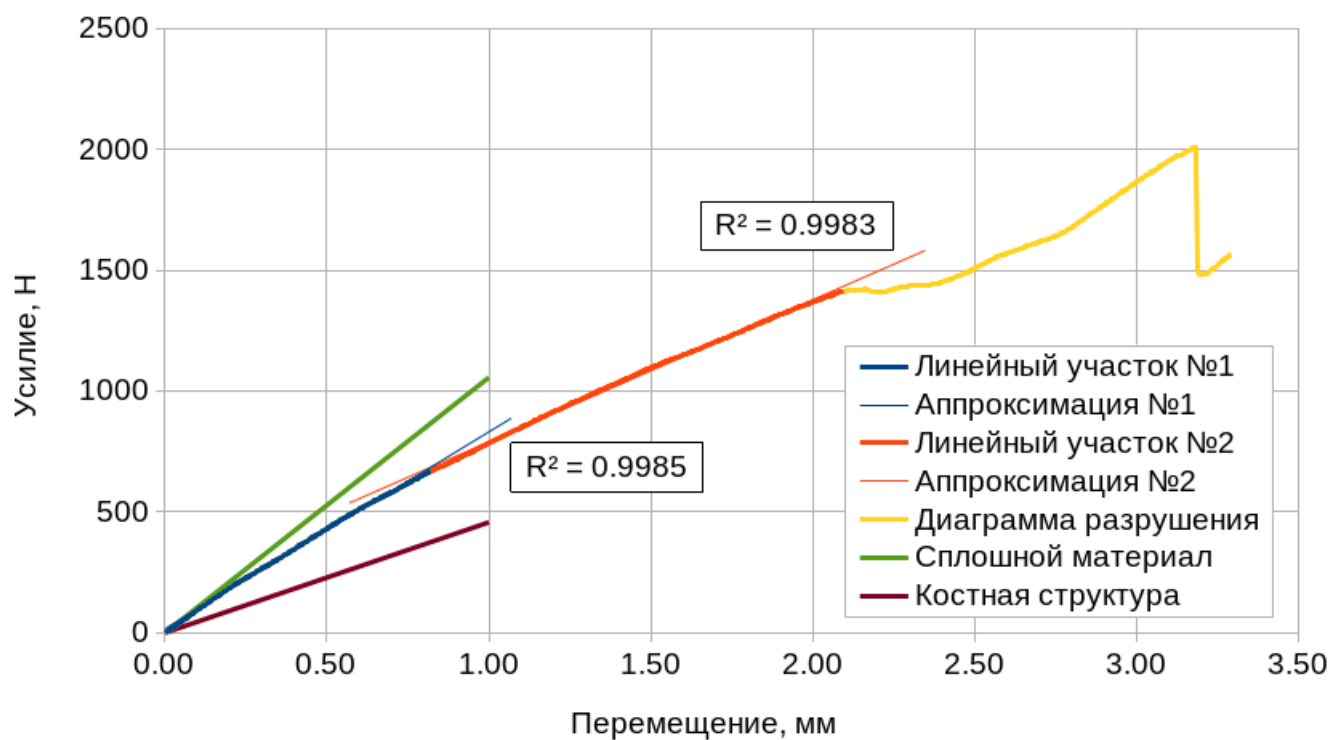


Рисунок Д.3 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне, предшествующем образованию трещины: вторая модель.

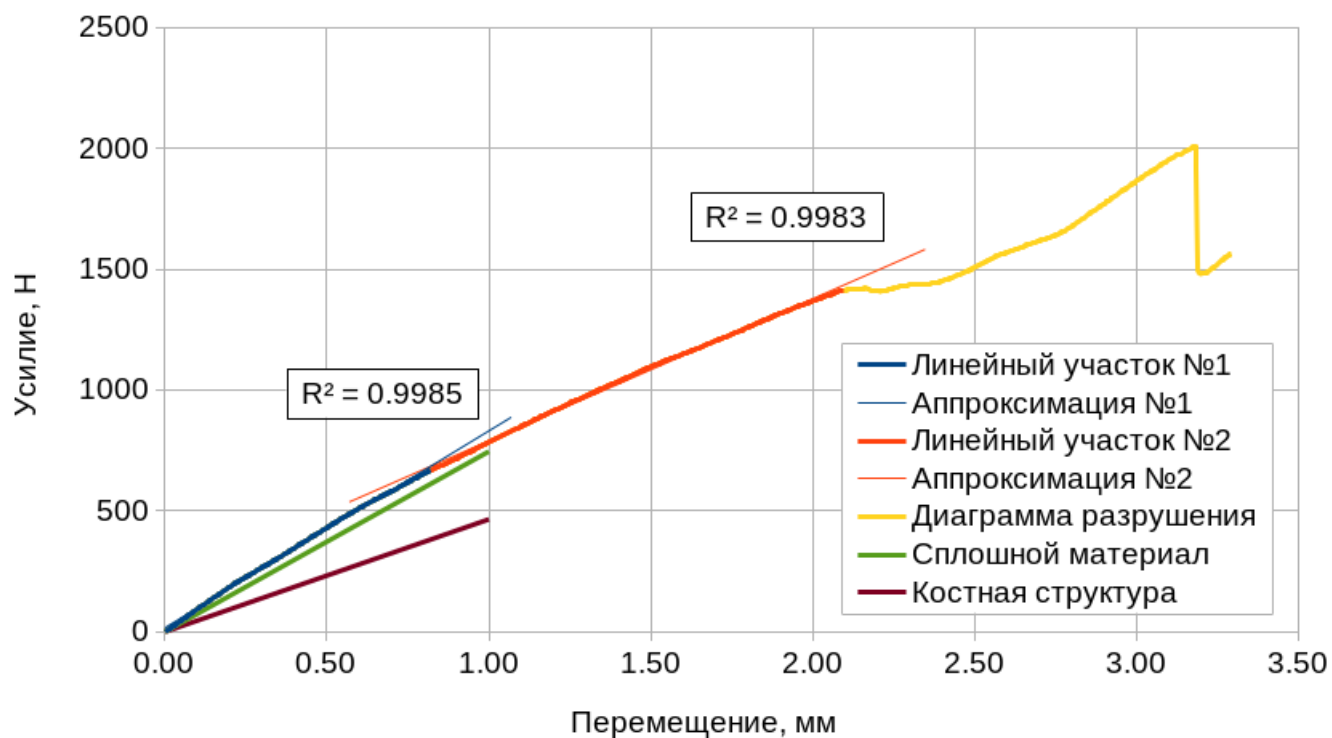


Рисунок Д.4 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне, предшествующем образованию трещины: третья модель.

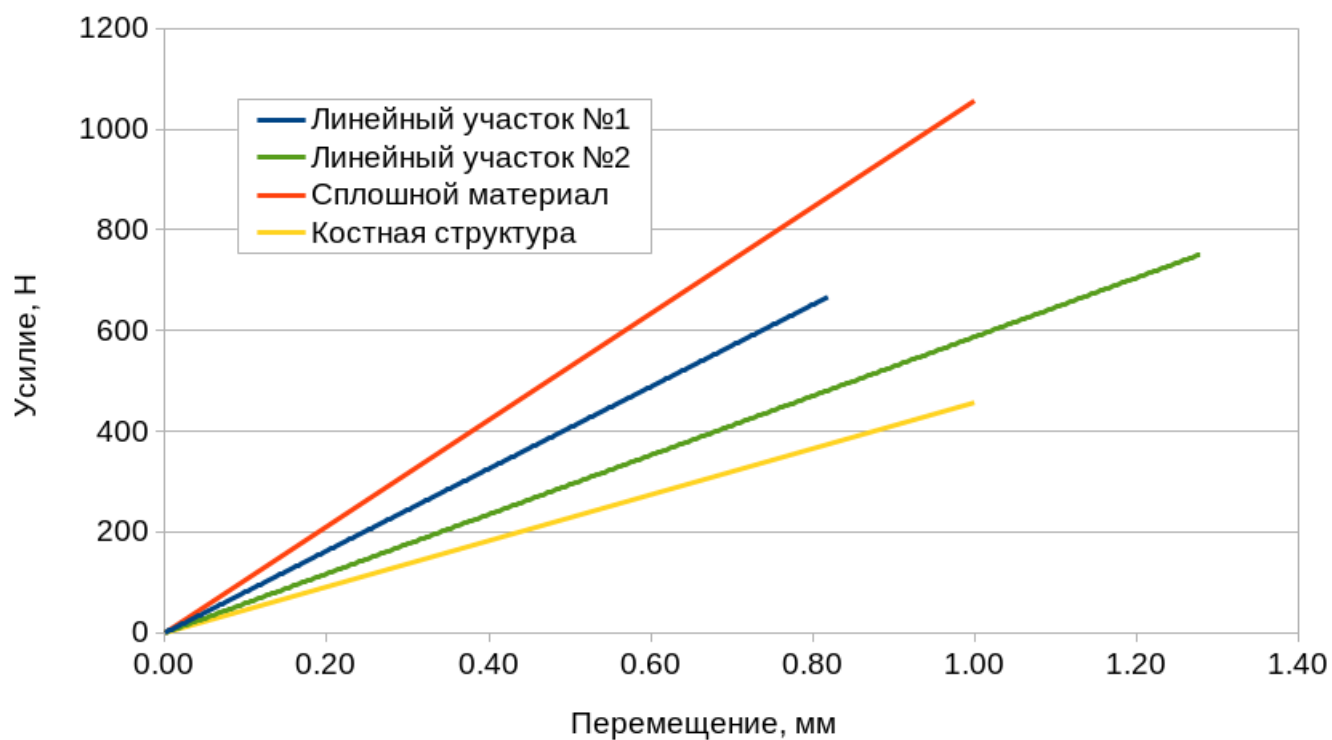


Рисунок Д.5 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне, соответствующем линейным участкам: вторая модель.



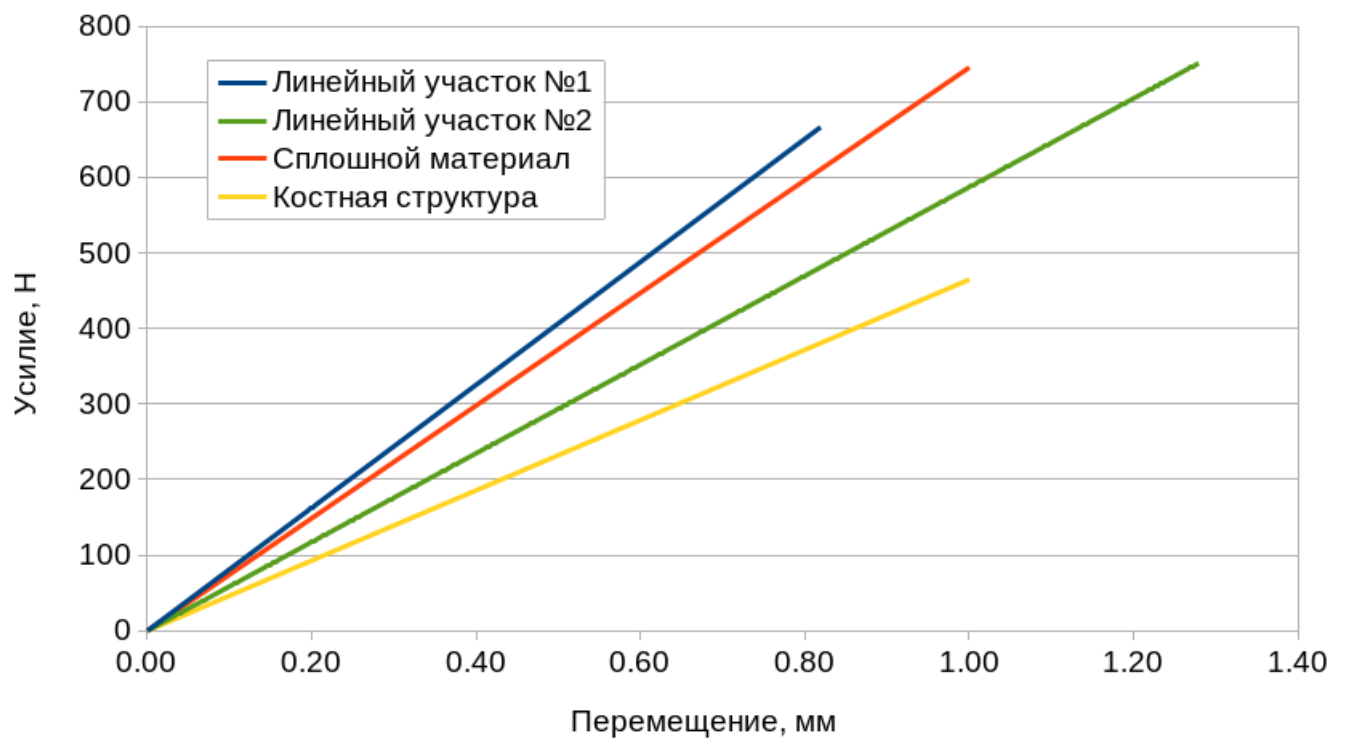


Рисунок Д.6 — Диаграмма нагружения образца, определённая в диапазоне, соответствующем линейным участкам: третья модель.