

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Амелин Руслан Николаевич
**Исследование вращений небесных тел
под действием притяжения Солнца и Юпитера**
Специальность: 01.02.01 – «Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
проф., д.ф.-м.н.
Красильников П.С.

Москва – 2016

Содержание

Введение.....	3
Исследование вращения Сатурна относительно центра масс под действием гравитационных моментов Солнца и Юпитера.....	9
1.1 Канонические переменные Депри-Андуайе.....	10
1.2 Уравнения вращательных движений Сатурна в переменных Депри-Андуайе.....	13
1.3 Орбита Сатурна в барицентрических координатах Солнца и Юпитера.....	17
1.4 Переменные действие-угол в случае Эйлера-Пуансо.....	22
1.5 Возмущенное вращение Сатурна.....	27
1.6 След конца вектора кинетического момента Сатурна на единичной сфере.....	32
О прецессии Сатурна под действием притяжения Юпитера и спутников.....	36
2.1 Функция Гамильтона задачи.....	36
2.2 Усредненный Гамильтониан задачи. Первые интегралы.....	40
2.3 Прецессия планеты.....	44
2.4 Влияние Юпитера и спутников на вращение Сатурна.....	46
О вращении Марса вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли.....	57
3.1 Уравнения вращательных движений Марса в переменных Депри-Андуайе.....	57
3.2 Орбита Земли и Марса в барицентрических координатах Солнца и Юпитера.....	61
3.3 Возмущенное вращение Марса.....	67
3.4 След конца вектора кинетического момента Марса на единичной сфере.....	70
О вращении Нептуна вокруг центра масс под действием гравитационных моментов Тритона, Солнца и Юпитера.....	74
4.1 Уравнения вращательных движений Нептуна в переменных Депри-Андуайе.....	75
4.2 Орбита Нептуна и Тритона в барицентрических координатах Солнца и Юпитера.....	77
4.3 Возмущенное вращение Нептуна.....	83
4.4 След вектора кинетического момента Нептуна на единичной сфере.....	87
Заключение.....	91
Список литературы.....	93

Введение

Классическая теория вращения небесных тел учитывает только силы притяжения Солнца и не учитывает гравитационные возмущения со стороны больших планет. Из работ классиков механики таких как Тиссеран[85], Лаплас[71], Раус[80], Пуансо[79] и других известно, что под действием притяжения Солнца динамически-симметричная планета (Земля) совершает регулярную прецессию вокруг нормали к плоскости орбиты. А Грeю[66] принадлежит формула для частоты прецессии оси планеты применительно к Земле:

$$\omega_e = \frac{3n^2}{2\omega_r} H \frac{C-A}{C} \cos\theta_0 \quad (1)$$

Здесь ω_e - угловая скорость прецессии оси планеты, ω_r - угловая скорость собственного вращения планеты, n - угловая скорость орбитального движения планеты вокруг Солнца, θ_0 - угол нутации (угол между векторами ω_e и ω_r). Осреднение силовой функции задачи двух тел по истинной аномалии ν с последующим разложением по степеням эксцентриситета e до членов порядка малости e^2 даёт уточненное значение постоянной $H = 1 + \frac{3}{2}e^2$. Такой же эффект влияния гравитационных моментов на вращение трехосного спутника – вековая прецессия вектора кинетического момента (в пределе – ось вращения) вокруг нормали к плоскости орбиты, обнаружил В.В. Белецкий[5,8,9]. Необходимо отметить, что указанные исследования проводились в предположении отсутствия целочисленной соизмеримости частот орбитального и вращательного движения небесного тела, другими словами – резонанса.

Кроме того исследования резонансных и нерезонансных вращательных движений небесного тела в предположении, что его характерные размеры много меньше расстояния до центра притяжения находят отражение в работах Дубошина[19], Белецкого[5,8,9,10,11,12,55,15], Маркеева[33,36,35], Торжевского[49,50], Черноусько[52,46], Галиуллина[18], Голдрайха[64,65], и др. ученых. Динамика твердого тела (спутника) в центральном гравитационном поле с учетом возмущающих сил различной природы (магнитных, аэродинамических, сил светового давления) также исследовалась в работах В.С. Асланова[6,5], В.В. Сазонова[39,83,40], В.А. Сарычева[41,42,82,81], М.Ю. Овчинникова[45,44,43], А.А. Тихонова[47,48,46,37].

Продолжая обзор литературы необходимо упомянуть работы Жака Ласкара,

исследующего вращение планет солнечной системы: резонансные вращения Меркурия[59] и Венеры[60], вращение Земли[74], вращение Марса[72,75,73]. Также вращением планет занимались и другие исследователи. Вращению Земли посвящены работы Бретагнона[57], Киношиты[67,68,69], Суше[76,77,78]. Вращение Марса исследовалось также в работах Суше[56,76]. Необходимо отметить работы Голдрайха по вращению планет солнечной системы[64,65], работы американских ученых(Ворд и др.), сделавших попытку учесть влияние спутников на вращение планет вокруг их центра масс[63,86,87,88].

Помимо влияния гравитационных моментов исследовано влияние магнитных моментов на вращение и ориентацию спутника в [14,41,13].

В задачах трех и более тел, когда орбита исследуемого тела уже не является кеплеровой и следовательно неизвестна удобно представлять орбиту в виде квазипериодической функции времени с конечным набором базисных частот $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$. Такая техника исследований резонансных и нерезонансных вращательных движений твердого спутника развита в работах [32,34,25,26,27] - в задаче трех тел, в работах [31,30] - в задаче N тел. В данных работах рассматривалось влияние только гравитационных моментов.

Влияние магнитных моментов на вращение спутника, используя представление его орбиты в виде условно-периодической функции времени в задаче трех тел исследовано в работе[70].

Диссертация посвящена исследованию вращения небесных тел под действием притяжения больших планет таких как Юпитер, Земля, Нептун. В данной работе используется подход, когда орбита исследуемого тела является условно-периодической функцией времени в некоторой системе координат. Такой подход позволяет учитывать гравитационное возмущение со стороны N тел в отличие от классических исследований задачи двух тел, когда в качестве кёниговой системы координат берется система координат, связанная с орбитой исследуемого тела, например орбитальная [5,8].

Исследование вращения планет проводилось методом усреднения [16], когда уравнения движения содержали один или несколько малых параметров[24,23]. Из недостатков этого метода можно отметить громоздкость и сложность вычислений, особенно, когда в модели учитывается притяжение большого числа тел. В качестве основных переменных при исследовании вращательного движения планет выбирались переменные Андуайе-Депри[54,61], которые наиболее употребительны в теории возмущений.

Перейдем к более подробному рассмотрению диссертации по главам.

В главе 1 исследуется вращение Сатурна под действием сил притяжения Солнца и Юпитера. Орбита Сатурна является квазипериодической функцией времени в системе координат, связанной с центром масс Солнца и Юпитера. Малым параметром задачи является частота орбитального движения Юпитера. Были получены усредненные уравнения вращения, которые описывают эволюцию медленных переменных (частоту прецессии и угла нутации). Отметим, что в отличие от классических исследований частота прецессии и угол нутации являются медленно эволюционирующими функциями времени. Также были получены первые интегралы осредненных уравнений вращения, в том числе был получен интеграл, описывающий поведение вектора кинетического момента Сатурна на единичной сфере. При исследовании этого интеграла были выявлены новые интересные эффекты: появление новых положений равновесия вектора кинетического момента Сатурна, а также появление зон либраций в окрестности плоскости орбиты Сатурна и нормали к ней. Зоны либраций отделяют от движений типа прецессии гомоклинические и гетероклинические траектории, стремящиеся к соответствующим положениям равновесия вектора кинетического момента Сатурна при $t \rightarrow \pm\infty$.

В главе 2 исследуется прецессия-нутация Сатурна под действием притяжения Солнца, Юпитера и спутников планеты. Орбита Юпитера является квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат Солнца и Сатурна. Малыми параметрами задачи являются среднее движение Сатурна и Юпитера, разность осевого и экваториального моментов инерции (Сатурн считается осесимметричным твердым телом), массы Сатурна и Юпитера (в сравнении с массой Солнца). Показано, что вся совокупность малых параметров приводится к двум независимым параметрам. Получена, без учета влияния спутников, осредненная функция Гамильтона задачи и интегралы эволюционных уравнений, в том числе, – интеграл, описывающий эволюцию вектора кинетического момента планеты. С помощью метода малого параметра получены, с точностью до членов второго и третьего порядков малости по малому параметру, выражения для частоты прецессии и угла нутации оси вращения планеты соответственно, вызванные притяжением только Юпитера. Влияние спутников учитывается через поправки к осевому моменту инерции и второй зональной гармонике Сатурна на основе работ американских ученых [64,63,86,87], в которых показано, что планета с экваториальными спутниками прецессирует вокруг

нормали к неподвижной плоскости орбиты Сатурна как “единое целое”. Построены графики зависимости угла нутации оси Сатурна от времени на основе численного интегрирования усредненных уравнений вращения Сатурна, а также решения этих уравнений, полученных по методу малого параметра с точностью до членов порядка ε^2 .

В главе 3 исследуется вращение Марса под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли. Орбиты Марса и Земли являются квазипериодическими функциями времени в системе координат, связанной с центром масс Солнца и Юпитера. Малыми параметрами задачи являются частота орбитального движения Юпитера и частота орбитального движения Земли. Были получены усредненные уравнения вращения, которые описывают эволюцию медленных переменных (частоту прецессии и угла нутации). Частота прецессии и угол нутации являются медленно эволюционирующими функциями времени. Описывающие эти параметры уравнения учитывают вклад гравитационных моментов Юпитера и Земли. Также были получены первые интегралы осредненных уравнений вращения, в том числе был получен интеграл, описывающий поведение вектора кинетического момента Марса на единичной сфере. При исследовании этого интеграла были выявлены новые интересные эффекты: появление новых положений равновесия вектора кинетического момента Марса, а также появление зон либраций в окрестности плоскости орбиты Марса и её нормали. Зоны либраций отделяют от движений типа вращения сепаратрисы, стремящиеся к соответствующим положениям равновесия вектора кинетического момента Марса при $t \rightarrow \pm\infty$. Было показано, что топология вращений Марса в задаче четырех совпадает с топологией вращения Марса в задаче трех тел (когда третьим притягивающим телом является Юпитер или Земля).

В главе 4 исследуется вращение Нептуна под действием притяжения его массивного спутника – Тритона, Солнца и Юпитера в рамках модели спутникового приближения. Малыми параметрами задачи являются частота орбитального движения Юпитера и частота орбитального движения Тритона вокруг Нептуна, а также отношение характерных размеров Нептуна к расстоянию до Тритона (спутниково приближение). Орбиты Нептуна и Тритона являются квазипериодическими функциями времени в системе координат, связанной с центром масс Солнца и Юпитера. Были получены усредненные уравнения вращения, которые описывают эволюцию медленных переменных (частоту прецессии и угла нутации). Частота прецессии и угол нутации являются медленно

эволюционирующими функциями времени. Описывающие эти параметры уравнения учитывают вклад гравитационных моментов Нептуна и Тритона. Также были получены первые интегралы осредненных уравнений вращения, в том числе был получен интеграл, описывающий поведение вектора кинетического момента Нептуна на единичной сфере. При исследовании этого интеграла показано, что вектор кинетического момента совершает вращения вокруг нормали к плоскости орбиты Тритона, что не отвечает действительности: реальному вращению Нептуна соответствует замкнутая фазовая траектория на единичной сфере с углом нутации $\delta_1^* = 29.56^\circ$, отсчитанным от нормали к плоскости орбиты Нептуна. Полученный результат объясняется грубостью модели: силовая функция Тритона приближается первым членом разложения силовой функции в ряд (спутниковое приближение), однако точность такой аппроксимации плохая, так как параметр ρ не является достаточно малым. Поэтому для решения задачи о вращении Нептуна с учетом притяжения Тритона нужны иные подходы.

Приведем основные результаты, представленные в диссертации:

- Разработана небесно-механическая модель, описывающая вращения небесных тел (Сатурна и Марса) с учетом притяжения Солнца, Юпитера, Земли
- Получены с помощью метода малого параметра, с точностью до членов второго и третьего порядков малости по малому параметру, выражения для частоты прецессии и угла нутации оси вращения планеты соответственно, вызванные притяжением только Юпитера.
- Получено числовое значение амплитуды колебаний угла нутации оси Сатурна на промежутке времени 6×10^6 лет, а также значения поправок к частоте прецессии, вызванных притяжением спутников и Юпитера.
- Разработаны методы исследования вращений небесных тел, находящихся под действием притяжения n тел ($n \geq 2$).
- Описано вращение Сатурна под действием притяжения Юпитера и Солнца, в том числе описаны новые эффекты во вращении Сатурна: появление дополнительных равновесий вектора кинетического момента, либраций в окрестности полюса и экватора, и асимптотических движений этого вектора.
- Описано вращение Марса под действием притяжения Юпитера, Солнца и Земли, описаны новые эффекты во вращении Марса: появление дополнительных равновесий вектора кинетического момента, либраций в окрестности полюса и экватора, асимптотических движений вектора кинетического момента.

•

**Основные результаты, представленные в диссертации,
опубликованы в следующих работах**

Статьи

- 1 П.С. Красильников, Р.Н. Амелин. О вращении Сатурна относительно центра масс под действием гравитационных моментов Солнца и Юпитера. Космические исследования, том 54, №2
- 2 П.С. Красильников, Р.Н. Амелин. О вращении Марса вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли. Нелинейная динамика, том 11, №2, 2015 г.
- 3 П.С. Красильников, Р.Н. Амелин. О прецессии Сатурна под действием притяжения Юпитера и спутников. Астрономический вестник, 2017 г. (принята к печати).

Конференции

- 1 АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ РОССИЙСКОЙ КОСМОНАВТИКИ. Труды XXXIX академических чтений по космонавтике, посвященных памяти академика С.П. Королева и других выдающихся отечественных ученых-пионеров освоения космического пространства. Москва, 27 – 30 января 2015 г., с. 81.
- 2 Международная научная конференция по механике. СЕДЬМЫЕ ПОЛЯХОВСКИЕ ЧТЕНИЯ. 2 - 6 февраля 2015 г. Санкт-Петербург, Россия. с. 51
- 3 Научный семинар «Динамические системы и механика» Московского Авиационного института (национального исследовательского университета).
- 4 Семинар по небесной механике ГАИШ при МГУ им. М.В. Ломоносова (координационный совет по небесной механике ГАИШ). Протокол № 2601.
- 5 VII Всероссийское совещание- семинар заведующих кафедрами и преподавателей теоретической механики, робототехники, мехатроники вузов Российской Федерации. 26-30 сентября 2016 года, Махачкала

Глава 1

Исследование вращения Сатурна относительно центра масс под действием гравитационных моментов Солнца и Юпитера.

В первой главе рассматриваются вращения Сатурна относительно центра масс в рамках эллиптической ограниченной задачи трёх тел. Предполагается, что Сатурн является твердым телом, находящимся под действием притяжения Солнца и Юпитера, имея массу, пренебрежимо малую по сравнению с массами притягивающих тел. Движения Сатурна и Юпитера считаются эллиптическими эксцентриситетами e_C и e_J соответственно. Малым параметром задачи является среднее движение Юпитера n_J .

Получена осредненная функция Гамильтона для произвольных значений e_J, e_C , когда малым параметром является $\varepsilon = n_J$, получены интегралы эволюционных уравнений, построена качественная картина движения вектора кинетического момента Сатурна на единичной сфере с учетом малости эксцентриситета Юпитера.

Описаны основные эффекты влияния Юпитера на вращения Сатурна: (α) эволюция постоянных параметров регулярной прецессии вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 (угла нутации и угловой скорости прецессии); (β) появление новых либрационных зон колебаний \mathbf{I}_2 вблизи плоскости небесного экватора, параллельного плоскости орбиты Сатурна, что является следствием разрушения структурно неустойчивого континуума относительных равновесий \mathbf{I}_2 , существующих при регулярной прецессии Сатурна под действием притяжения одного лишь Солнца; (γ) появление дополнительных неустойчивых равновесий вектора \mathbf{I}_2 в точках северного и южного полюса небесной сферы и, как следствие, наличие гомоклинических траекторий, стремящихся при $t \rightarrow \pm\infty$ к этим равновесиям; (δ) существование периодических траекторий со сколь угодно большими периодами вблизи гомоклинической траектории.

1.1 Канонические переменные Депри-Андуайе

Переменные Андуайе-Депри [54,61] наиболее употребительны в теории возмущений и имеют динамическое происхождение, иллюстрируемое на Рис.1.1

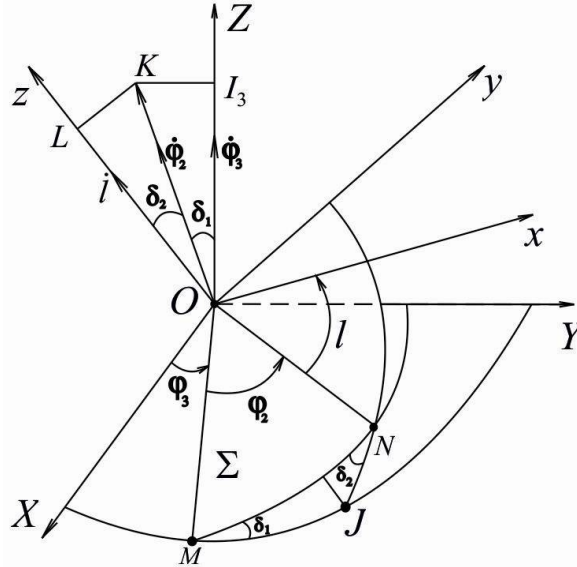


Рис.1.1

Здесь через $OXYZ$ обозначен неподвижный трехгранник с началом в точке подвеса, $Oxyz$ - подвижная система координат, жестко связанная с телом, оси которой направлены по главным осям инерции тела, Σ - плоскость, проходящая через точку закрепления и перпендикулярная вектору кинетического момента волчка \mathbf{K} .

Здесь введены следующие обозначения:

L – проекция вектора кинетического момента на подвижную ось Oz ;

I_2 – модуль вектора кинетического момента;

I_3 - проекция вектора кинетического момента на неподвижную ось OZ ;

l - угол между осью Ox и линией пересечения плоскости Σ с плоскостями Oxy и OXY ;

φ_2 - угол между линиями пересечения плоскости Σ с плоскостями Oxy и OXY ;

φ_3 - угол между осью Ox и линией пересечения плоскости Σ с плоскостью OXY ;

Из Рис.1.1 легко получить, что

$$I_3 = I_2 \cos \delta_1, \quad L = I_2 \cos \delta_2 \quad (1.1)$$

Отметим, что если оси OX и OZ неподвижной системы координат направить по прямым OM и вектору \mathbf{K} , то углы δ_2 , φ_2 и l будут эйлеровыми углами нутации - θ , прецессии - ψ и собственного вращения - φ , а соответствующие этим углам импульсы p_θ , p_ψ и p_φ связаны с импульсами L , I_2 , I_3 по формулам:

$$p_\psi = I_3, p_\varphi = L, p_\theta = I_2 \sin \delta_2 \sin(l - \varphi) \quad (1.2)$$

Выражения для компонент вектора кинетического момента через переменные $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ имеют вид:

$$K_x = \sqrt{I_2^2 - L^2} \sin l, K_y = \sqrt{I_2^2 - L^2} \cos l, K_z = L$$

Откуда легко получить кинетическую энергию твердого тела в переменных Андуайе-Депри:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{K_x^2}{A} + \frac{K_y^2}{B} + \frac{K_z^2}{C} \right)$$

После подстановки выражений для K_x , K_y , K_z окончательно получим:

$$T = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C}$$

Покажем теперь, что переменные Депри-Андуайе есть канонические переменные. Более того, покажем, что существует однородное каноническое преобразование, которое переводит фазовое пространство Эйлера $(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi)$ в фазовое пространство Депри $(l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3)$, используя соображения, указанные в [4].

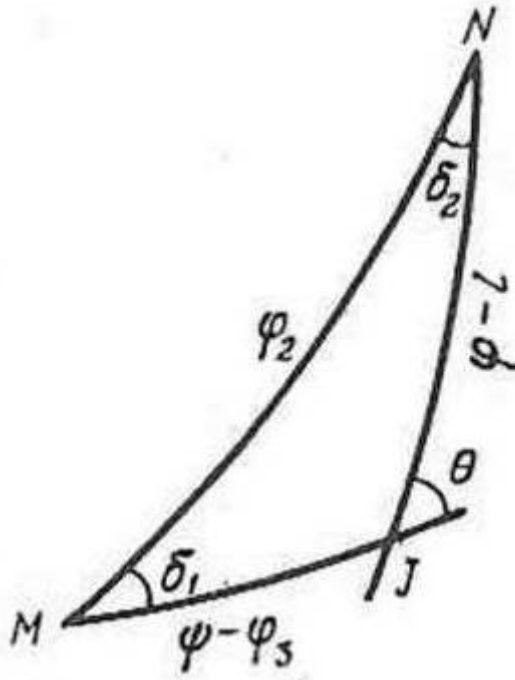


Рис.1.2

Рассмотрим сферический треугольник MNJ , изображенный на Рис.1.2. Из формул сферической тригонометрии несложно получить следующее дифференциальное соотношение:

$$d\varphi_2 = \cos \delta_2 d(\varphi - l) + \cos \delta_1 d(\psi - \varphi_3) - \sin(\varphi - l) \sin \delta_2 d\theta \quad (1.3)$$

Умножив соотношение (1.3) на величину I_2 и на основании формул (1.1) и (1.2) получим

$$Ldl + I_2 d\varphi_2 + I_3 d\varphi_3 = p_\theta d\theta + p_\varphi d\varphi + p_\psi d\psi$$

Из этого соотношения следует вывод о том, что существует каноническое преобразование $(\theta, \varphi, \psi, p_\theta, p_\varphi, p_\psi) \rightarrow (l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3)$, переводящее фазовое пространство Эйлера в пространство Дебри.

Подвижный $Oxyz$ и неподвижный $OXYZ$ трехгранники связаны матрицей S направляющих косинусов с элементами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$. Матрицу S легко получить, сделав пять последовательных поворотов на углы $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, l$ вокруг соответствующих осей. В векторно-матричной форме переход от системы координат $Oxyz$ к $OXYZ$ запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, S = S_1 S_2 S_3 S_4 S_5$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 \\ 0 & \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & -\sin \delta_2 \\ 0 & \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_5 = \begin{pmatrix} \cos l & -\sin l & 0 \\ \sin l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выпишем выражения для элементов $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ в явном виде:

$$\alpha_1 = (\cos \varphi_3 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_3 \cos \delta_1 \sin \varphi_2) \cos l +$$

$$((- \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \cos \delta_2 + \sin \varphi_3 \sin \delta_1 \sin \delta_2) \sin l$$

$$\alpha_2 = -(\cos \varphi_3 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_3 \cos \delta_1 \sin \varphi_2) \sin l +$$

$$((- \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \cos \delta_2 + \sin \varphi_3 \sin \delta_1 \sin \delta_2) \cos l$$

$$\alpha_3 = -(- \cos \varphi_3 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \sin \delta_2 + \sin \varphi_3 \sin \delta_1 \cos \delta_2$$

$$\beta_1 = (\sin \varphi_3 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 \cos \delta_1 \sin \varphi_2) \cos l +$$

$$((- \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \cos \delta_2 - \cos \varphi_3 \sin \delta_1 \sin \delta_2) \sin l$$

$$\beta_2 = -(\sin \varphi_3 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_3 \cos \delta_1 \sin \varphi_2) \sin l +$$

$$((- \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \cos \delta_2 - \cos \varphi_3 \sin \delta_1 \sin \delta_2) \cos l$$

$$\beta_3 = -(- \sin \varphi_3 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \sin \delta_2 - \cos \varphi_3 \sin \delta_1 \cos \delta_2$$

$$\gamma_1 = \sin \delta_1 \sin \varphi_2 \cos l + (\sin \delta_1 \cos \varphi_2 \cos \delta_2 + \cos \delta_1 \sin \delta_2) \sin l$$

$$\gamma_2 = -\sin \delta_1 \sin \varphi_2 \sin l + (\sin \delta_1 \cos \varphi_2 \cos \delta_2 + \cos \delta_1 \sin \delta_2) \cos l$$

$$\gamma_3 = -\sin \delta_1 \cos \varphi_2 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2.$$

1.2 Уравнения вращательных движений Сатурна в переменных Депри-Андуайе.

Рассмотрим обобщённую ограниченную эллиптическую задачу трёх тел, два из которых - Солнце и Юпитер - представляют собой суть материальные точки с массами m_S и m_J ($m_S > m_J$), движущиеся друг относительно друга по эллиптической кеплеровой орбите

$$r = \frac{a_J(1-e_J^2)}{1+e_J \cos \nu}$$

Здесь r - расстояние между Солнцем и Юпитером, a_J и e_J - большая полуось и эксцентриситет орбиты Юпитера, ν - истинная аномалия. Третье тело (Сатурн) будем считать абсолютно твёрдым с произвольным эллипсоидом инерции, масса m которого много меньше масс m_S и m_J . Пусть C, J и S -- центры масс Сатурна, Юпитера и Солнца соответственно.

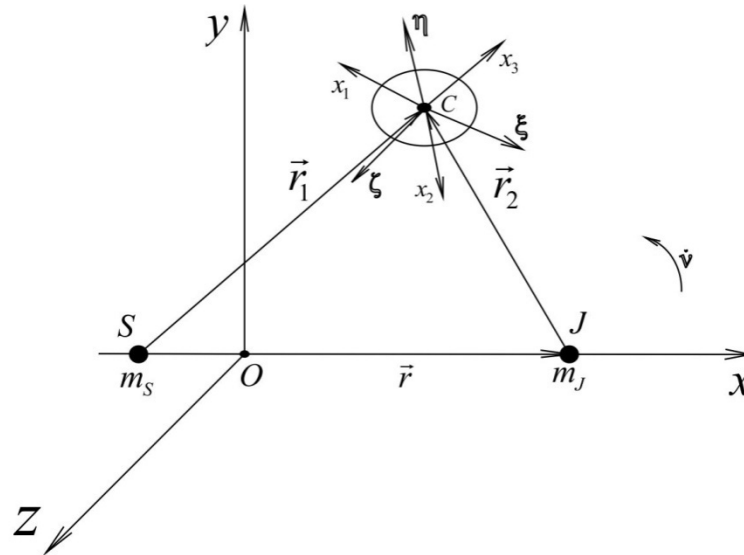


Рис.1.3 Бариецентрическая система координат с началом в центре масс Солнца и Юпитера

Введем (рис.1.3) бариецентрическую систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тел S и J . Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты тела J относительно S . Ось Ox направим по прямой, соединяющей тела S и J в сторону тела J . Кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела J относительно тела S . Ось Oz дополняет оси Ox и Oy до правой системы координат. С центром масс C свяжем поступательно движущуюся систему координат $C\xi\eta\zeta$, ось $C\zeta$ которой коллинеарна Oz , ось $C\xi$ параллельна линии апсид эллиптического движения тел S и J относительно общего центра масс, а $C\eta$ дополняет систему координат до правой. Введём систему координат $Cx_1x_2x_3$, жёстко связанную с телом, оси которой направлены по главным центральным осям инерции. Ориентация подвижного трёхгранника $Cx_1x_2x_3$ относительно неподвижного $C\xi\eta\zeta$ задаётся с помощью канонических переменных Депри-Андуайе $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ [54,61] (рис.1.4), которые подробно описаны в разделе 1.1.

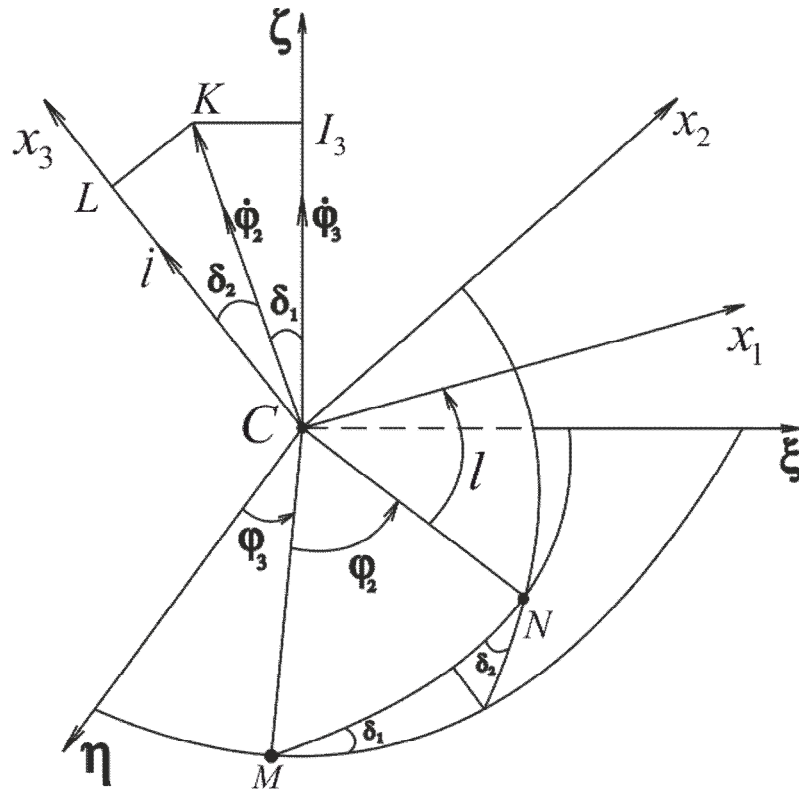


Рис. 1.4 Переменные Делри-Андуайе

На Рис. 1.4 \mathbf{K} – вектор кинетического момента Сатурна относительно центра тяжести. Смысл угловых переменных l, φ_2, φ_3 ясен из Рис.1.4, а соответствующие им импульсы таковы

$$L = K \cos \delta_2, \quad I_2 = K, \quad I_3 = K \cos \delta_1$$

Дифференциальные уравнения вращения имеют гамильтонов вид. Выражение для функции Гамильтона известно [4,8]:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C} - U$$

$$U = -\frac{3}{2}(1-\mu)n_J^2 \frac{a_J^3}{r_1^3} [(B-A)\gamma_{12}^2 + (C-A)\gamma_{13}^2] - \frac{3}{2}\mu n_J^2 \frac{a_J^3}{r_2^3} [(B-A)\gamma_{22}^2 + (C-A)\gamma_{23}^2], \quad (1.4)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{r_i} [(\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu)(x - x_i) + (\beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu)y + \gamma_j z]$$

Здесь введены следующие обозначения: $\mu = \frac{m_J}{m_S + m_J} = 0.0009533888249$, f -

гравитационная постоянная, $x_1 = -\mu r$, $x_2 = (1-\mu)r$ - координаты центров масс Солнца и

Юпитера, $n_J = \sqrt{f(m_S + m_J)/a_J^3}$ - среднее движение Юпитера, $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + y^2 + z^2}$, γ_{ij} -

направляющие косинусы радиуса-вектора $r_i = m_i C$ с главными центральными осями инерции Cx_j . Иначе $\gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Здесь $\mathbf{e}_i = \left(\frac{x-x_i}{r_i}, \frac{y}{r_i}, \frac{z}{r_i} \right)$, $\mathbf{e}_j = (\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu, \beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu, \gamma_j)$. Ось Cx_j главных центральных осей инерции в барицентрической системы координат $Oxyz$ стоят в столбцах матрицы перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к $Oxyz$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos \nu + \beta_1 \sin \nu & \alpha_2 \cos \nu + \beta_2 \sin \nu & \alpha_3 \cos \nu + \beta_3 \sin \nu \\ \beta_1 \cos \nu - \alpha_1 \sin \nu & \beta_2 \cos \nu - \alpha_2 \sin \nu & \beta_3 \cos \nu - \alpha_3 \sin \nu \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A, B, C - главные центральные моменты инерции Сатурна относительно осей Cx_1, Cx_2, Cx_3 соответственно, $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ - элементы матрицы направляющих косинусов между неподвижным $C\xi\eta\zeta$ и подвижным трёхгранником соответственно, выражения для которых приведены, например, в [17].

Матрицу \mathbf{S} направляющих косинусов с элементами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ легко получить, сделав пять последовательных поворотов на углы $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, l$ вокруг соответствующих осей. В векторно-матричной форме переход от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к $C\xi\eta\zeta$ запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_5$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 \\ 0 & \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & -\sin \delta_2 \\ 0 & \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_5 = \begin{pmatrix} \cos l & -\sin l & 0 \\ \sin l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что расстояния от C до S и J много больше характерных размеров Сатурна, поэтому пренебрегаем влиянием его вращательного движения на движение центра масс C . Как следствие, орбиту точки C считаем известной квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат $Oxyz$:

$$x(t) = \sum_{\|\mathbf{p}\| \geq 0} C_{\mathbf{p}}^{(1)} e^{i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})t}, \quad y(t) = \sum_{\|\mathbf{p}\| \geq 0} C_{\mathbf{p}}^{(2)} e^{i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})t}, \quad z(t) = \sum_{\|\mathbf{p}\| \geq 0} C_{\mathbf{p}}^{(3)} e^{i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})t} \quad (1.5)$$

орбиты Юпитера, ось Sy' дополняет систему координат до правой. Барицентрическая система координат $Oxuz$ была описана выше. Отметим, что на Рис.1.5 сечения сферы плоскостями эклиптики, орбиты Сатурна и Юпитера представлены дугами больших кругов.

Средние кеплеровские элементы орбиты Сатурна и Юпитера, рассчитанные на эпоху J2000, представлены в таблице 1.1

Таблица 1.1

Элемент	Юпитер	Сатурн
Эксцентриситет	$e_J = 0.04839266$	$e_C = 0.05415060$
Наклонение орбиты	$i_J = 1.30530^\circ$	$i_C = 2.48446^\circ$
Долгота восходящего узла	$\Omega_J = 100.55615^\circ$	$\Omega_C = 113.71504^\circ$
Аргумент перигелия	$\omega_J = 275,066^\circ$	$\omega_C = 336.013862^\circ$
Большая полуось	$a_J = 5.20336301$ а.е.	$a_C = 9.53707032$ а.е.
Среднее движение	$n_J = 1.6784899 \cdot 10^{-8}$ рад/с	$n_C = 6.7590569 \cdot 10^{-9}$ рад/с

Для вычисления констант орбитального движения рассмотрим сферический треугольник ABF , считая A, B, F соответствующими углами треугольника. Очевидно $\widehat{AF} = \Omega_C - \Omega_J$, $A = i_J$, $F = 180^\circ - i_C$. Используя формулы сферической тригонометрии получим:

$$B \equiv \beta = \arccos(-\cos A \cos F + \sin A \sin F \cos \widehat{AF}) = 1.249266667^\circ$$

$$\widehat{AB} = \arcsin\left(\frac{\sin \widehat{AF} \sin F}{\sin B}\right) = 26.9128^\circ, \quad \widehat{BF} = \arcsin\left(\frac{\sin \widehat{AF} \sin A}{\sin B}\right) = 13.76035278^\circ. \quad (1.6)$$

Представим координаты центра масс C Сатурна в осях $Sx'y'z'$:

$$x' = r_1 \cos(r_1, x'), \quad y' = r_1 \cos(r_1, y'), \quad z' = r_1 \cos(r_1, z')$$

$$r_1 = \frac{a_C(1 - e_C^2)}{1 + e_C \cos v_1} \quad (1.7)$$

r_1 - расстояние между телами S и C .

Из сферических треугольников ABC , BCD , BEC имеем

$$\cos(r_1, x') = \cos \widehat{AB} \cos \widehat{BC} + \sin \widehat{AB} \sin \widehat{BC} \cos B',$$

$$\cos(r_1, y') = \cos \widehat{BC} \cos \widehat{BD} + \sin \widehat{BC} \sin \widehat{BD} \cos B'', \quad (1.8)$$

$$\cos(r_1, z') = \cos \widehat{BE} \cos \widehat{BC} + \sin \widehat{BE} \sin \widehat{BC} \cos B''',$$

где $B' = \pi - \beta$, $\widehat{BC} = \omega_c + \nu_1 - \widehat{BF}$, $B'' = \beta$, $\widehat{BD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AB}$, $B''' = \frac{\pi}{2} - \beta$, $\widehat{BE} = \frac{\pi}{2}$.

В барицентрической системе координат $Oxyz$ координаты центра масс Сатурна имеют вид

$$\begin{aligned} x &= x' \cos(\omega_j + \nu) + y' \sin(\omega_j + \nu) - \mu r \\ y &= -x' \sin(\omega_j + \nu) + y' \cos(\omega_j + \nu) \\ z &= z' \end{aligned} \quad (1.9)$$

Используя формулы (1.6)-(1.9) и значения средних элементов орбиты, получим координаты x, y, z как функций ν, ν_1 :

$$x = \frac{1}{1+0.0541506 \cos \nu_1} [2.6037729 \cos \nu_1 \cos \nu + 9.1447983 \cos \nu_1 \sin \nu - 9.1436543 \sin \nu_1 \cos \nu + 2.6057222 \sin \nu_1 \sin \nu] - \frac{0.0049492}{1+0.0484603 \cos \nu},$$

$$y = \frac{1}{1+0.0541506 \cos \nu_1} [9.1447983 \cos \nu_1 \cos \nu - 2.6057222 \cos \nu_1 \sin \nu + 2.6057222 \sin \nu_1 \cos \nu + 9.1436543 \sin \nu_1 \sin \nu],$$

$$z = \frac{1}{1+0.0541506 \cos \nu_1} [0.1639322 \sin \nu_1 - 0.1269138 \cos \nu_1]$$

Для того, чтобы записать координаты Сатурна в виде ряда (1.5), воспользуемся разложением тригонометрических функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии [1]:

$$\cos \nu = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \quad \sin \nu = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM \quad (1.10)$$

Подставляя ряды (1.10) в x, y, z , раскладывая полученные выражения в ряды по e_j, e_c с точностью до членов пятого порядка малости (члены четвертого порядка малости содержат $\cos 5M, \sin 5M$, которые необходимы для вычисления резонансных коэффициентов $C_{(2,5)}^{(j)}$ ряда Фурье), получим координаты Сатурна в осях $Oxyz$:

$$x(M, M_1) = \frac{2.6037729 \cos M_1 \cos M}{1 + 0.0541506 \cos M_1} - \frac{9.1436543 \cos M \sin M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} +$$

$$+ \frac{9.1447983 \sin M \cos M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} + \frac{2.6057222 \sin M \sin M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} -$$

$$- \frac{0.0049492}{1 + 0.0483927 \cos M} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_C^n x_{mn}(M, M_1),$$

$$y(M, M_1) = \frac{9.1447983 \cos M_1 \cos M}{1 + 0.0541506 \cos M_1} + \frac{2.6057222 \cos M \sin M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} -$$

$$- \frac{2.6037729 \sin M \cos M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} + \frac{9.1436543 \sin M \sin M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_C^n y_{mn}(M, M_1),$$

$$z(M, M_1) = -\frac{0.1269138 \cos M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} + \frac{0.1639322 \sin M_1}{1 + 0.0541506 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_C^n z_{mn}(M, M_1)$$

Здесь M, M_1 - средние аномалии Юпитера и Сатурна, функции x_{mn}, y_{mn}, z_{mn} имеют громоздкий вид, поэтому их опускаем. Численные значения некоторых коэффициентов $C_{(p_0, p_1)}^{(j)}$ ряда Фурье для функций $x(M, M_1), y(M, M_1), z(M, M_1)$ приведены в Таблице 1.2

Таблица 1.2

j	(p ₀ , p ₁)	(0,0)	(1,0)	(1,1)	(-1,1)	(-2,5)
1		0.005298209	-0.10565861 +0.37172638·I	-0.00039045446- -0.0033040702·I	1.3012348+ +4.5681160·I	1.7723934·10 ⁻⁷ + +6.2222109·10 ⁻⁷ ·I
2		0.036051513	-0.37150839- -0.10584061·I	0.00062438476+ +0.00037285812·I	4.5681149- -1.3012348·I	6.2221885·10 ⁻⁷ - -1.7723996·10 ⁻⁷ ·I
3		0.010339007	1.3513560·10 ⁻¹² - -3.0801003·10 ⁻¹⁹ ·I	-8.2912439·10 ⁻¹² - 1.0714345·10 ⁻¹¹ ·I	-8.2912360·10 ⁻¹² - 1.0714348·10 ⁻¹¹ ·I	2.3828764·10 ⁻¹⁴ - -2.7591821·10 ⁻¹⁷ ·I

На Рис.1.6 представлены орбиты Сатурна и Юпитера, изображённые на единичной сфере в инерциальной системе координат. Здесь Υ и Ω - точки весеннего и осеннего равноденствий соответственно, $\Upsilon N = 100.55615^\circ$, $\Upsilon N_1 = 113.71504^\circ$, $NII = 275.066^\circ$, $N_1 II_1 = 336.013862^\circ$, $NN_1 = 13.15889^\circ$, $NN_2 = 26.9128^\circ$, $N_1 N_2 = 13.76035278^\circ$, $i_j = 1.30530^\circ$, $i_C = 2.48446^\circ$, $\beta = 1.249266667^\circ$.

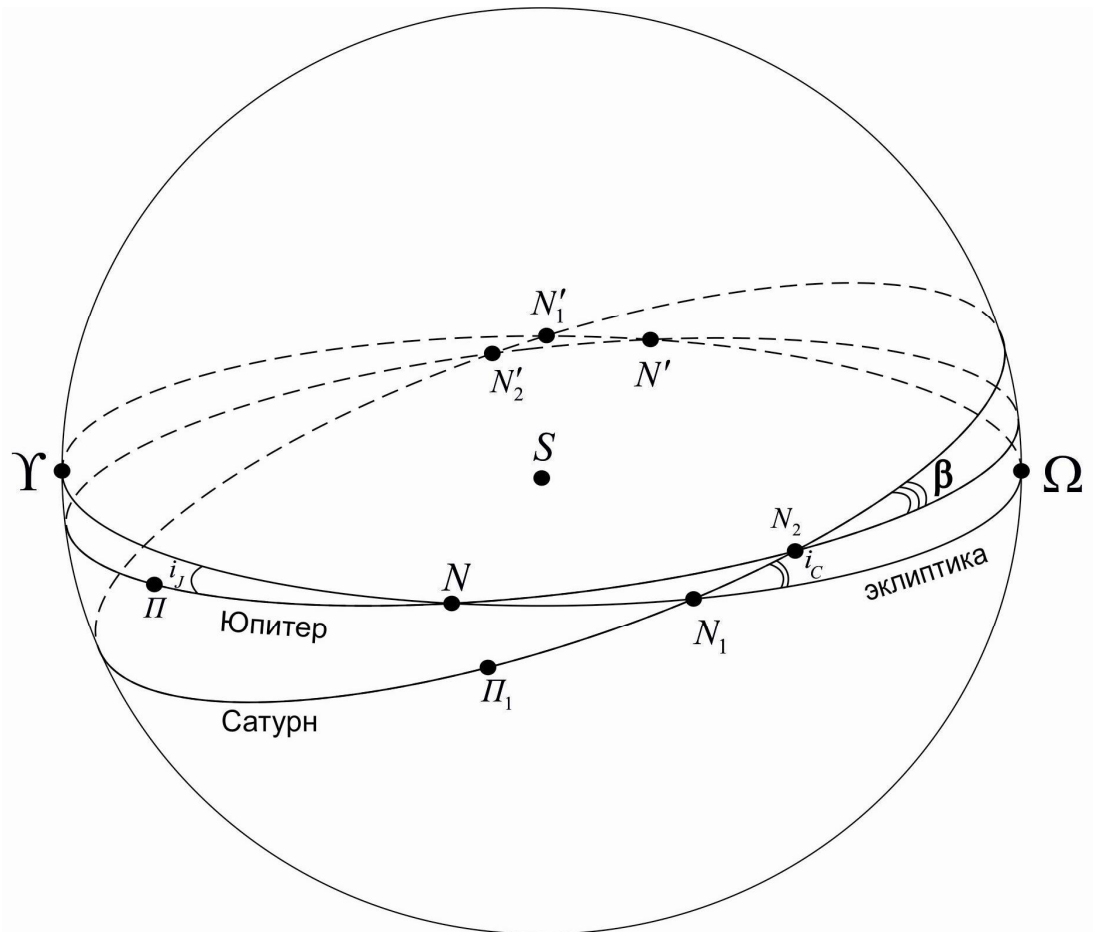


Рис.1.6 Орбиты Сатурна и Юпитера на небесной сфере

На рис. 1.7 изображена орбита Сатурна в барицентрических осях $Oxyz$. Величины x, y, z указаны в астрономических единицах.

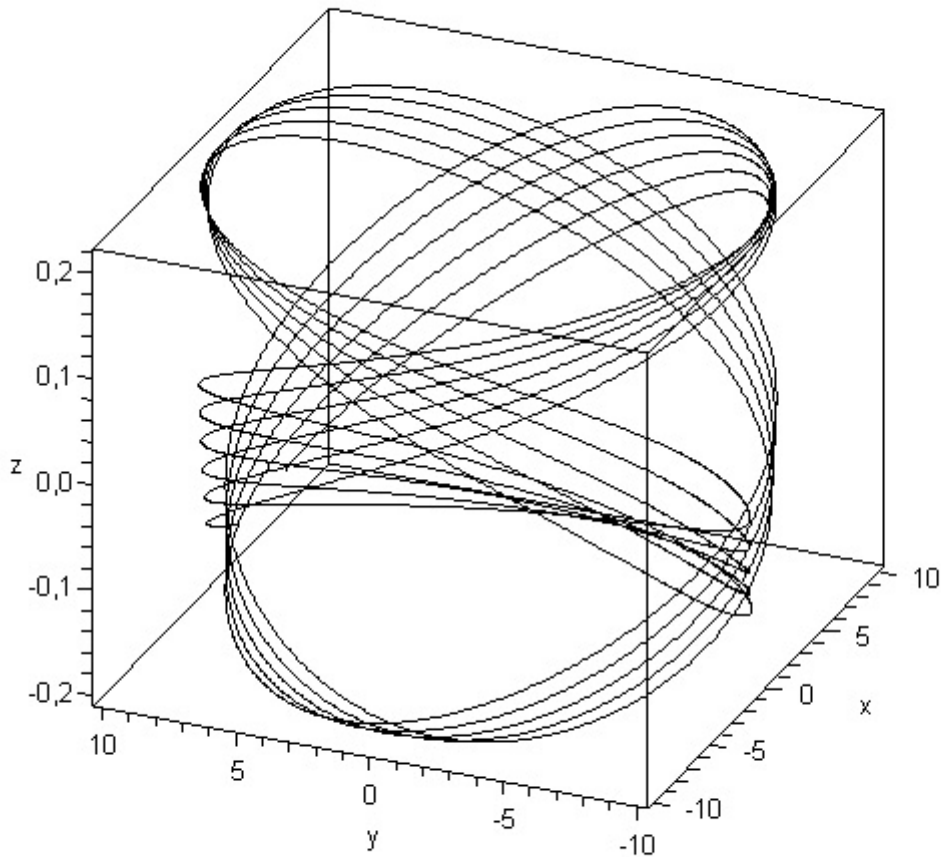


Рис. 1.7 Траектория центра масс Сатурна в барицентрической системе координат $Oxyz$.

1.4 Переменные действие-угол в случае Эйлера-Пуансо

Перейдем от переменных Андуайе-Депри $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ к переменным действие-угол $I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3$ в задаче Эйлера-Пуансо, следуя Ю.А.Садову[38]. В случае Эйлера, как известно, функция Гамильтона имеет вид:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) + \frac{L^2}{2C}$$

(1.11)

Соответствующие канонические уравнения допускают два однозначных первых интеграла $H = h$, $I_2 = C$. Таким образом движение твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Эйлера в переменных Депри-Андуайе сводится к определению движения консервативной системы с одной степенью свободы.

Разрешим уравнение (1.11) относительно L :

$$L^2 = I_2^2 \frac{\beta^{-1} - \alpha_1^{-1} \sin^2 l - \alpha_2^{-1} \cos^2 l}{1 - \alpha_1^{-1} \sin^2 l - \alpha_2^{-1} \cos^2 l} \quad (1.12)$$

Здесь $\alpha_1 = \frac{A}{C}$, $\alpha_2 = \frac{B}{C}$, $\beta = \frac{I_2^2}{2Ch}$

Полагая $\cos \delta_2 = \frac{L}{I_2}$ параметр β , зависящий от начальных условий можно вычислить по формуле:

$$\beta = \frac{1}{(\alpha_1^{-1} \sin^2 l + \alpha_2^{-1} \cos^2 l) \sin^2 \delta_2 + \cos^2 \delta_2}$$

Для величины β справедлива следующая оценка $1 \leq \beta \leq \alpha_1$. Однако вместо величин α_1 , α_2 , β удобно ввести два параметра σ^2 и λ^2 :

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1(\alpha_2 - 1)} = \frac{C(A - B)}{A(B - C)}, \quad \lambda^2 = \sigma^2 \frac{A(2Ch - I_2^2)}{C(I_2^2 - 2Ah)} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta - 1)}{(\alpha_2 - 1)(\alpha_1 - \beta)}$$

Здесь σ^2 зависит лишь от моментов инерции, а λ^2 - еще и от начальных условий.

Легко видеть, что параметр $\lambda \in [0; \infty)$. Действительно, при $\delta_2 = 0$ и любом значении угла

l $\beta = 1$ и следовательно $\lambda = 0$. При $\delta_2 = \frac{\pi}{2}$, $l = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ величина $\beta = \alpha_1$ и $\lambda = \infty$.

Зависимость (1.12), выраженная через параметры σ^2 и λ^2 будет иметь вид:

$$L^2 = I_2^2 \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda^2} \frac{1 - \lambda^2 + (\sigma^2 + \lambda^2) \sin^2 l}{1 + \sigma^2 \sin^2 l} \quad (1.13)$$

Зависимость $L(l)$ изображена на Рис.1.8

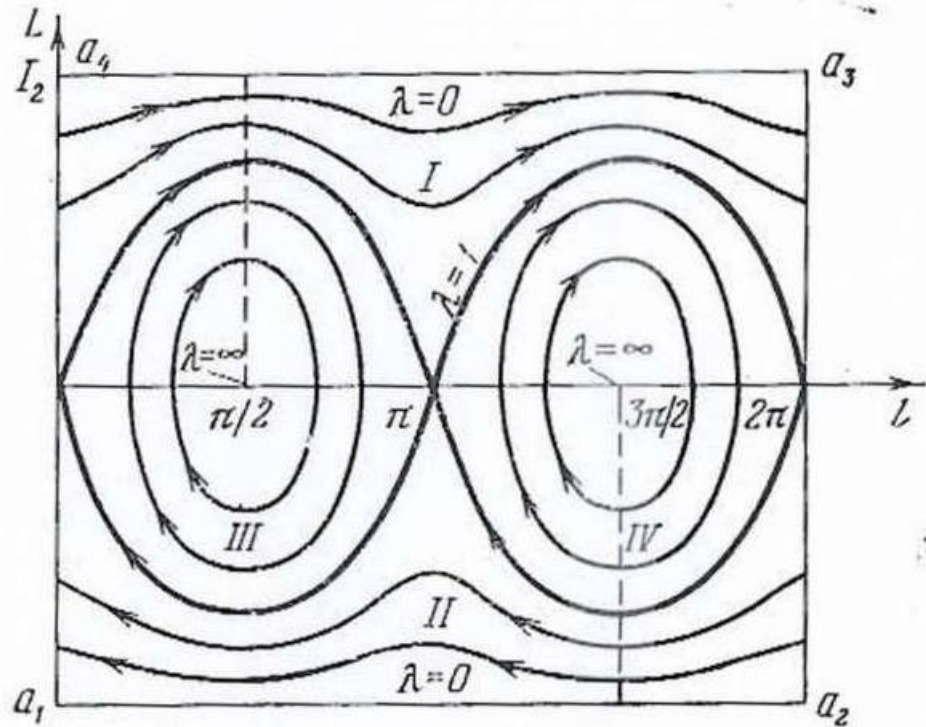


Рис. 1.8. График зависимости $L(l)$

Из формулы (1.13) следует, что функция $L(l)$ периодична по l с периодом π . Кроме того при $\lambda = 0$ $L = \pm I_2$ ось Ox_3 подвижной системы координат совпадает с вектором кинетического момента \mathbf{I}_2 и мы имеем дело с перманентным вращением тела около большей оси эллипсоида инерции. В этом случае прямые $L = \pm I_2$ стягиваются в точку и фазовый портрет, изображенный на Рис.1.8 представляет развертку сферы с полюсами $L = \pm I_2$. Эта сфера (l, L) сепаратрисой $\lambda = 1$ разделяется на четыре инвариантные области: I, II, III, IV (Рис. 1.8). В областях I, II параметр λ меняется в пределах $0 \leq \lambda < 1$, тогда как в областях III, IV параметр λ меняется в пределах $1 < \lambda \leq \infty$.

В каждой из этих областей вместо переменных l, L можно ввести переменные действие-угол I_1, w_1 , где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \oint L dl$$

При этом интегрирование ведется по замкнутым контурам на указанной сфере (l, L) .

Отметим, что $I_1 \geq 0$. Действительно I_1 пропорционально площади, ограниченной кривой $L(l)$ и осью Ol в областях I и II или замкнутым контуром в областях III и IV. Принимая во внимание, что площадь положительна если контур обходится по часовой стрелке получаем $I_1 \geq 0$ и

$$L = I_2 \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 + (\sigma^2 + \lambda^2) \sin^2 l}{1 + \sigma^2 \sin^2 l}},$$

$$I_1 = \frac{I_2}{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} \oint \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 + (\sigma^2 + \lambda^2) \sin^2 l}{1 + \sigma^2 \sin^2 l}} dl, \quad (1.14)$$

а сопряженный с ней угол w_1 в зависимости от области будет вычисляться по разному.

В силу периодичности кривых $L(l)$, изображенных на Рис. 1.8 формулу (1.14) можно переписать следующим образом:

$$I_1 = \frac{I_2}{2\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}} \int_{l_0}^{l_0+l_1} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2 + (\sigma^2 + \lambda^2) \sin^2 l}{1 + \sigma^2 \sin^2 l}} dl \quad (1.15)$$

Для областей I, II, III, VI будем иметь соответственно $l_1 = \frac{\pi}{2}$;

$l_1 = -\frac{\pi}{2}$; $l_1 = \arccos \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + \sigma^2}}$; $l_1 = -\arccos \sqrt{\frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + \sigma^2}}$. В качестве же начальной точки пути

интегрирования (l_0, L_0) выберем $l_0 = \frac{\pi}{2}$ и $L_0 > 0$ в областях I и III и $l_0 = \frac{3\pi}{2}$ и $L_0 < 0$ в

областях II и IV.

В областях I и II интеграл (1.15) может быть вычислен с помощью подстановки

$$ctgl = -\sqrt{1 + \sigma^2} tg\xi, \quad dl = \frac{\sqrt{1 + \sigma^2}}{1 + \sigma^2 \sin^2 \xi} d\xi$$

В результате будем иметь:

$$I_1(I_2, \lambda) = \frac{2I_2\sigma}{\pi} \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \xi}}{1 + \sigma^2 \sin^2 \xi} d\xi =$$

$$= \frac{2I_2}{\pi\sigma} \sqrt{\frac{1 + \sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2}} [(\sigma^2 + \lambda^2) \Pi(\sigma^2, \lambda) - \lambda^2 K(\lambda)] \quad (1.16)$$

Здесь $\Pi(\sigma^2, \lambda)$ и $K(\lambda)$ есть полные эллиптические интегралы 3-его и 1-ого рода соответственно.

Перейдем теперь к переменным действие-угол I_1, w_1 в областях III, IV.

В этом случае интеграл (1.15) вычисляется при помощи подстановки:

$$\cos l = -\frac{\sqrt{1 + \sigma^2}}{\lambda} \frac{\sin \eta}{\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\lambda^2} \sin^2 \eta}}, \quad dl = \frac{\sqrt{1 + \sigma^2} \cos \eta \lambda}{(-\sigma^2 \sin^2 \eta - \lambda^2) \sqrt{-\frac{\sigma^2 \sin^2 \eta - \lambda^2}{\lambda^2}}} d\eta$$

$$\begin{aligned}
I_1(I_2, \lambda) &= \frac{2I_2}{\pi} \frac{\sigma}{\lambda} \sqrt{\frac{1+\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \eta}{(1+\sigma^2 \lambda^{-2} \sin^2 \eta) \sqrt{1-\lambda^{-2} \sin^2 \eta}} d\eta = \\
&= \frac{2I_2}{\pi \sigma \lambda} \sqrt{\frac{1+\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}} \left[(\sigma^2 + \lambda^2) \Pi\left(\frac{\sigma^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda^2 K\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right]
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Здесь $\Pi\left(\frac{\sigma^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right)$ и $K\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ есть полные эллиптические интегралы 3-его и 1-ого рода соответственно.

В рассматриваемых областях $0 < \lambda < 1$ и $1 < \lambda < \infty$ производная $\left(\frac{\partial I_1}{\partial \lambda}\right) < 0$, следовательно $I_1(I_2, \lambda)$ - есть монотонно убывающая функция. Следовательно, параметр λ можно однозначно разрешить относительно переменных I_1 и I_2 , т.е. $\lambda = \Phi(I_1, I_2)$.

Для описания зависимостей $L(I_2, I_1, w_1)$, $l(I_2, I_1, w_1)$, $\varphi_2(I_1, w_1, I_2, w_2)$ построим производящую функцию W канонического преобразования $(l, \varphi_2, \varphi_3, L, I_2, I_3) \rightarrow (w_1, w_2, w_3, I_1, I_2, I_3)$. Эта производящая функция должна быть полным интегралом уравнения $H = h$. В этом случае угловые переменные w_1, w_2, w_3 и импульсы L, I_2, I_3 находятся по формулам:

$$w_k = \frac{\partial W}{\partial I_k} (k=1,2,3), \quad L = \frac{\partial W}{\partial l}, \quad I_2 = \frac{\partial W}{\partial \varphi_2}, \quad I_3 = \frac{\partial W}{\partial \varphi_3}$$

Производящую функцию W можно представить в виде

$$W = I_3 \varphi_3 + I_2 \varphi_2 + V(l, I_1, I_2)$$

Функцию V можно вычислить по формуле:

$$V(l, I_1, I_2) = \pm \int_{l_0}^l L(l, I_1, I_2) dl$$

В зависимости от области I, II, III, IV функция $V(l, I_1, I_2)$, как уже было отмечено ранее, будет принимать различные значения.

В соответствии с вышесказанным для областей I, II будем иметь следующие выражения для угловых переменных w_1, w_2, w_3 через переменные $l, \varphi_2, \varphi_3, I_1, I_2, I_3$:

$$I_2 = \pm L \frac{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}}{\sigma} \frac{1}{dn\left(\frac{2K}{\pi} w_1, \lambda\right)}, \quad w_1 = \pm \frac{\pi}{2} \left[\frac{F(\xi, \lambda)}{K(\lambda)} \right], \quad \operatorname{tg} \xi = -\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}} \operatorname{ctgl}, \quad w_3 = \varphi_3,$$

$$w_2 = \varphi_2 + \frac{i}{2} \ln \frac{\theta_4(w_1 - i\alpha)}{\theta_4(w_1 + i\alpha)}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2K(\lambda)} F\left(\operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\lambda}, \lambda'\right), \quad \lambda'^2 = 1 - \lambda^2$$

Для областей III, IV запишем следующие выражения для угловых переменных w_1, w_2, w_3 через переменные $l, \varphi_2, \varphi_3, I_1, I_2, I_3$:

$$I_2 = \pm \frac{\sqrt{\sigma^2 + \lambda^2}}{\sigma} \frac{L}{\operatorname{cn}\left(\frac{2K}{\pi} w_1, \frac{1}{\lambda}\right)}, \quad w_2 = \varphi_2 + \frac{i}{2} \ln \frac{\theta_4(w_1 - i\alpha)}{\theta_4(w_1 + i\alpha)}, \quad \alpha = \frac{\pi}{2K\left(\frac{1}{\lambda}\right)} F\left(\operatorname{arctg} \sigma, \frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda}\right),$$

$$w_1 = \frac{\pi}{2K\left(\frac{1}{\lambda}\right)} F\left(\xi, \frac{1}{\lambda}\right), \quad \frac{\sin \xi}{\sqrt{\lambda^2 + \sigma^2 \sin^2 \xi}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cos l$$

Функция Гамильтона задачи в переменных действие-угол будет иметь вид:

$$H = \frac{I_2^2}{2A} \left(1 - \frac{C - A}{C} \frac{\sigma^2}{\lambda^2 + \sigma^2} \right)$$

Здесь λ есть функция $\lambda = \Phi(I_1, I_2)$, выраженная из формулы (1.16) или из формулы (1.17) в зависимости от области изменения параметра λ .

Вычислим базисные частоты твердого тела в случае Эйлера в зависимости от области изменения параметра λ . В случае, когда $0 < \lambda < 1$:

$$\Omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \left[\frac{\pi I_2}{2K(\lambda)} \frac{A - C}{AC} \frac{\sigma}{\sqrt{(1 + \sigma^2)(\lambda^2 + \sigma^2)}} \right], \quad \Omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \left[\frac{I_2}{C} \left(1 - \frac{A - C}{A} \frac{\Pi(\sigma^2, \lambda)}{K(\lambda)} \right) \right]$$

В случае же когда $1 < \lambda < \infty$ будем иметь:

$$\Omega_1 = \frac{\partial H}{\partial I_1} = \frac{A - C}{AC} \left[\frac{\pi I_2}{2K(\lambda^{-1})} \frac{\sigma \lambda}{\sqrt{(1 + \sigma^2)(\lambda^2 + \sigma^2)}} \right], \quad \Omega_2 = \frac{\partial H}{\partial I_2} = \frac{I_2}{C} \left[1 - \frac{A - C}{A} \frac{\Pi(\sigma^2 \lambda^{-2}, \lambda^{-1})}{K(\lambda^{-1})} \right]$$

1.5 Возмущенное вращение Сатурна

Для того, чтобы исследовать вращение Сатурна методами теории возмущений, введём малый параметр задачи. Учитывая, что угловая скорость вращения Сатурна $\Omega^* \approx 1.65 \cdot 10^{-4} \text{ c}^{-1}$ относительно центра масс существенно превосходит угловую скорость $n_J \approx 1.68 \cdot 10^{-8} \text{ c}^{-1}$ орбитального движения Юпитера, за единицу времени примем характерное значение $T^* = \frac{1}{\Omega^*}$. Тогда параметр $\varepsilon = n'_J$ ($n'_J = n_J / \Omega^* \sim 10^{-4}$) -- малый, при

этом средние аномалии движений Юпитера и Сатурна будут вычисляться по формулам

$$M = n'_j t, \quad M_1 = n'_c t \quad \left(n'_c = \frac{n_c}{\Omega^*} \sim 10^{-5} \right)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем $H = T$, поэтому вращение планеты происходит по Эйлеру-Пуансо так, что модуль кинетического момента I_2 , канонически сопряжённые переменные I_3, φ_3 , задающие положение этого вектора относительно кёниговой системы координат $C\xi\eta\zeta$, остаются постоянными во всё время движения.

Перейдём от переменных Депри-Андруайе $L, I_2, I_3, I, \varphi_2, \varphi_3$ к переменным действие-угол $I_1, I_2, I_3, w_1, w_2, w_3$ в невозмущённой задаче [4,38]. Указанная замена переменных подробно описана выше в разделе 1.4. Итак, получим:

$$\sigma^2 = \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \lambda^2 = \sigma^2 \frac{A(2Ch - I_2^2)}{C(I_2^2 - 2Ah)}$$

$$I_1 = \frac{2I_2}{\pi\sigma} \sqrt{\frac{1+\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}} \left[(\sigma^2 + \lambda^2) \Pi(\sigma^2, \lambda) - \lambda^2 K(\lambda) \right] \text{ при } 0 < \lambda < 1, \quad (1.18)$$

$$I_1 = \frac{2I_2}{\pi\lambda\sigma} \sqrt{\frac{1+\sigma^2}{\lambda^2+\sigma^2}} \left[(\sigma^2 + \lambda^2) \Pi\left(\frac{\sigma^2}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda}\right) - \lambda^2 K\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right] \text{ при } 1 < \lambda < \infty, \quad (1.19)$$

$$I_1 = I_{10}, \quad I_2 = I_{20}, \quad \dot{w}_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i} \quad (i = 1, 2), \quad w_3 = \varphi_3.$$

Здесь

$$H_0 = T(I_1, I_2) = \frac{I_2^2}{2A\Omega^*} \left(1 - \frac{C-A}{C} \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + k^2} \right)$$

- кинетическая энергия невозмущённого вращения тела, K, Π -- полные эллиптические интегралы 1-го и 3-го рода соответственно, $k(I_1, I_2)$ - однозначное решение относительно λ уравнения (1.18) или (1.19) в зависимости от области изменения параметра λ , h - постоянная энергии.

В новых переменных гамильтониан H примет вид:

$$H = H_0 + \varepsilon^2 H_1.$$

Здесь $H_1 = -U\Omega^* / (n_j)^2$ -- функция переменных I_i, w_i, ν, ν_i . Не выписывая явного выражения для H_1 , отметим только, что необходимые для получения этой функции зависимости $L(I_2, I_1, w_1), I(I_2, I_1, w_1), \varphi_2(I_1, w_1, I_2, w_2)$ приведены в разделе 1.4 [4].

Рассмотрим случай, когда частоты $\Omega_1(I_1, I_2) = \partial H_0 / \partial I_1$, $\Omega_2(I_1, I_2) = \partial H_0 / \partial I_2$ вращения Сатурна относительно собственного центра масс, частоты n'_J , n'_C орбитального движения Сатурна в барицентрических осях не удовлетворяют резонансным соотношениям

$$k_0 n'_J + k_1 n'_C + k_2 \Omega_1 + k_3 \Omega_2 = 0$$

ни при одном наборе целых чисел k_0, k_1, k_2, k_3 , если $k_2^2 + k_3^2 \neq 0$.

Перейдём к новому времени $M = \varepsilon t$ и запишем «расширенную» функцию Гамильтона

$$H^* = P_M + \frac{n'_C}{\varepsilon} P_{M_1} + \frac{1}{\varepsilon} H_0 + \varepsilon H_1.$$

Здесь M, P_M, M_1, P_{M_1} - новые обобщённые координаты и обобщённые импульсы соответственно. Легко видеть, что величины M, M_1, w_1, w_2 являются быстрыми переменными задачи, частоты изменения которых в невозмущенном движении есть $1, n'_C / \varepsilon, \Omega_1 / \varepsilon, \Omega_2 / \varepsilon$.

Исследуем уравнения возмущённого движения при помощи метода усреднения [3,16]. Для этого сделаем каноническую замену переменных так, чтобы медленные переменные отделились от быстрых в указанном приближении. Тогда функция Гамильтона преобразованной системы запишется в виде:

$$H^* = \tilde{P}_M + \frac{n'_C}{\varepsilon} \tilde{P}_{M_1} + \frac{1}{\varepsilon} H_0 + \varepsilon \bar{H}_1$$

где

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H_1 dw_1 dw_2 dM dM_1$$

Отметим, что в нерезонансном случае интегрирование функции H_1 по угловым переменным w_1, w_2 отщепляется от интегрирования по средним аномалиям движений Сатурна и Юпитера M, M_1 .

Проведем осреднение силовой функции U по угловым переменным w_1, w_2 на периоде 2π .

Имеем

$$\bar{U} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U dw_1 dw_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U \begin{vmatrix} \frac{\partial w_1}{\partial l} & \frac{\partial w_1}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial w_2}{\partial l} & \frac{\partial w_2}{\partial \varphi_2} \end{vmatrix} dld\varphi_2$$

Учитывая, что $\frac{\partial w_1}{\partial \varphi_2} = 0$, $\frac{\partial w_2}{\partial \varphi_2} = 1$ в областях $0 < \lambda < 1$ и $1 < \lambda < \infty$ будем иметь

$$\bar{U} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} U \frac{\partial w_1}{\partial l} dld\varphi_2 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} U d\varphi_2 \right] dw_1$$

Таким образом осреднение силовой функции по w_2 совпадает с осредненной силовой функции по φ_2 , полученной в работе [34].

Вычисления показывают, что функция \bar{H}_1 имеет следующий вид[32]:

$$\bar{H}_1 = -a_j^3 \Omega_* F(I_1, I_2) \left[\frac{D_1}{2} - \frac{3}{2} G(I_2, I_3, w_3) \right], \quad (1.20)$$

где

$$G(I_2, I_3, w_3) = (D_2 \sin^2 w_3 + D_3 \cos^2 w_3 + D_4 \sin 2w_3 + D_5) \sin^2 \delta_1 + (D_6 \sin w_3 + D_7 \cos w_3) \cos \delta_1 \sin \delta_1, \\ \cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, w_3 = \varphi_3$$

Вид функции $F(I_1, I_2)$ зависит от области изменения параметра λ . При $0 < \lambda < 1$

$$F(I_1, I_2) = 2C - B - A + \frac{3}{\sigma^2 + k^2} (A - C) \left(k^2 + \frac{A - B}{A} \frac{E(k) - K(k)}{K(k)} \right),$$

в области $1 < \lambda < \infty$ имеем

$$F(I_2, I_1) = 2C - B - A + \frac{3k^2}{\sigma^2 + k^2} \frac{A - C}{A} \left(B + (A - B) \frac{E(k^{-1})}{K(k^{-1})} \right),$$

Коэффициенты D_i вычисляются по формулам:

$$D_i = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i(\nu, \nu_1) dM dM_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e_j^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_j \cos \nu)^2} \frac{(1 - e_c^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_c \cos \nu_1)^2} Q_i(\nu, \nu_1) d\nu d\nu_1 \quad (1.21)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Q_1 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(x - x_i)^2 + y^2 - 2z^2}{2r_i^5}, \quad Q_2 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x - x_i) \cos \nu - y \sin \nu)^2}{2r_i^5},$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)^2}{2r_i^5},$$

$$Q_4 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(y \sin \nu - (x - x_i) \cos \nu)((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{2r_i^5},$$

$$Q_5 = -\sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z^2}{2r_i^5}, \quad Q_6 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x - x_i) \cos \nu - y \sin \nu)}{r_i^5},$$

$$Q_7 = -\sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{r_i^5}, \quad \mu_1 = 1 - \mu, \quad \mu_2 = \mu.$$

Усредненные уравнения вращений допускают три интеграла в инволюции:

$$I_1 = \text{const}, \quad I_2 = \text{const}, \quad G = \text{const}$$

Интеграл $G = \text{const}$ описывает возмущённое движение вектора кинетического момента Сатурна.

Таким образом, в рассматриваемом приближении вращение Сатурна в каждой из областей $0 < \lambda < 1$, $1 < \lambda < \infty$ складывается из вращения по Эйлеру-Пуансо вокруг вектора \mathbf{I}_2 и движения самого вектора \mathbf{I}_2 относительно осей $C\xi\eta\zeta$.

Отметим, что в окрестности сепаратрисы $\lambda = 1$ w_1 есть медленная переменная, поэтому осредненная функция Гамильтона совпадает с выражением (1.20) везде, кроме некоторой окрестности сепаратрисы.

Вычисления показывают, что при $m_s = 1.9891 \cdot 10^{30}$, $m_j = 1.8986 \cdot 10^{27}$

$$\mu_2 = \mu \approx 9.5359 \cdot 10^{-4}, \quad \mu_1 = 1 - \mu \approx 0.9990, \quad D_1 = 0.5791985815 \cdot 10^{-3},$$

$$D_2 = 0.2896870643 \cdot 10^{-3}, \quad D_3 = 0.2897883014 \cdot 10^{-3}, \quad D_4 = 4.920297019 \cdot 10^{-8},$$

$$D_5 = -1.383920657 \cdot 10^{-7}, \quad D_6 = -0.1174174249 \cdot 10^{-4}, \quad D_7 = 0.4707022248 \cdot 10^{-5}$$

Приведем формулы для вековой частоты прецессии вектора кинетического момента Сатурна \mathbf{I}_2 и угла нутации δ_1 . В возмущенном движении медленно эволюционируют канонически сопряженные переменные I_3, w_3 :

$$\dot{w}_3 = \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_3} = \frac{3}{2} \varepsilon \Omega^* a_J^3 F(I_1, I_2) \frac{\partial G(I_2, I_3, w_3)}{\partial I_3},$$

$$\dot{I}_3 = -\varepsilon \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial w_3} = -\frac{3}{2} \varepsilon \Omega^* a_J^3 F(I_1, I_2) \frac{\partial G(I_2, I_3, w_3)}{\partial w_3}$$

Причем угол нутации зависит от медленной переменной I_3 следующим образом

$$\delta_1 = \arccos \left(\frac{I_3}{I_2} \right)$$

1.6 След конца вектора кинетического момента Сатурна на единичной сфере.

Исследуем интеграл

$$G = g, \quad (1.22)$$

описывающий поведение вектора кинетического момента Сатурна в кёниговой системе координат $C\xi\eta\zeta$. Заметим, что возможная соизмеримость постоянных частот орбитального движения планеты

$$\Delta = k_0 n_J + k_1 n_C \sim \varepsilon$$

влияет на движение вектора \mathbf{I}_2 , так как усредненные уравнения вращений содержат $\theta \equiv k_0 M + k_1 M_1 = \Delta t$ как параметр, медленно меняющийся со временем. Поэтому орбитальный резонанс ведет к медленной эволюции усредненных движений.

Если резонансная расстройка удовлетворяет неравенству $\Delta \gg \varepsilon$, то воздействие резонанса незначительно. Именно по этой причине резонанс 2:5 в орбитальных движениях Сатурна и Юпитера слабо влияет на вращения Сатурна, поскольку $\Delta = 2n_J - 5n_C \sim 10^{-2}$ значительно превосходит малый параметр ε (случай, близкий к нерезонансному). Этот же вывод следует из представления орбиты Сатурна в барицентрических осях (таблица 2): резонансные коэффициенты $C_{(2,5)}^{(j)} \sim 10^{-7}$ малы, влияние их остается весьма малым и в усредненных уравнениях движения.

Положения равновесия $\delta_1 = \delta_1^*$, $w_3 = w_3^*$ вектора кинетического момента находятся из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial w_3} &\equiv [(D_2 - D_3) \sin 2w_3 + 2D_4 \cos 2w_3] \sin^2 \delta_1 + \frac{1}{2} (D_6 \cos w_3 - D_7 \sin w_3) \sin 2\delta_1 = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial \delta_1} &\equiv (D_2 \sin^2 w_3 + D_3 \cos^2 w_3 + D_4 \sin 2w_3 + D_5) \sin 2\delta_1 + (D_6 \sin w_3 + D_7 \cos w_3) \cos 2\delta_1 = 0 \end{aligned}$$

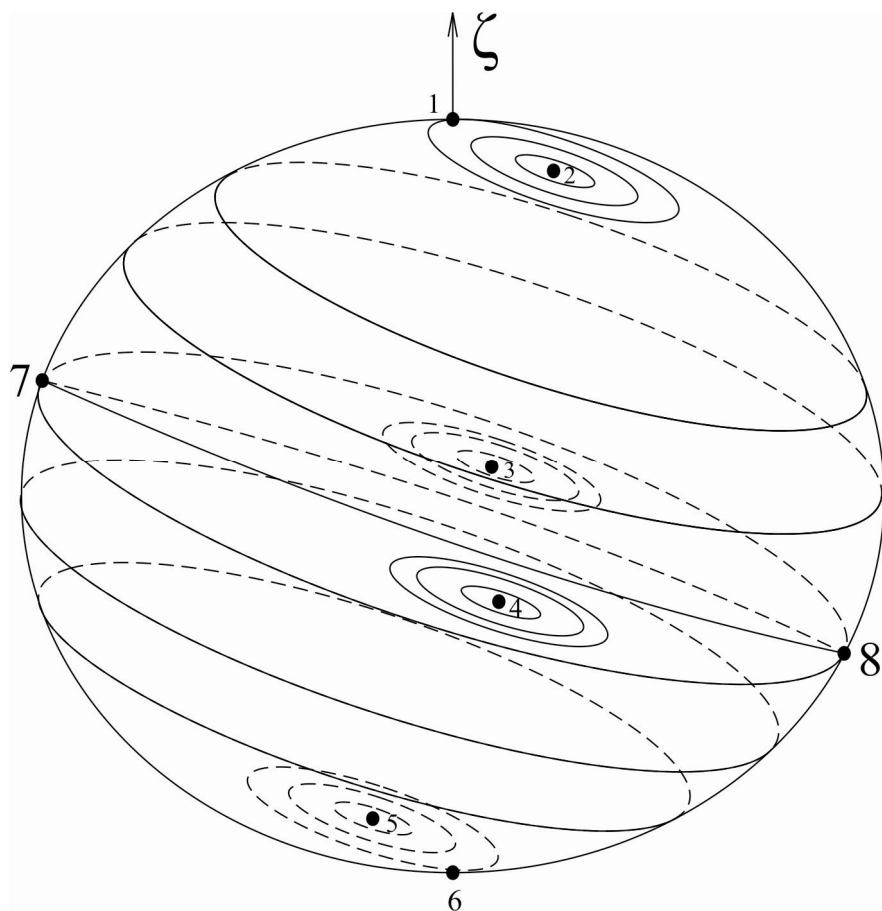


Рис.1.9 Траектории конца вектора кинетического момента Сатурна на единичной сфере.

Качественная картина траекторий вектора I_2 представлена на рис 1.9. Результаты расчетов либрационных зон вращения Сатурна на основе интеграла (1.22) представлены на рис. 1.7, 1.8, 1.9

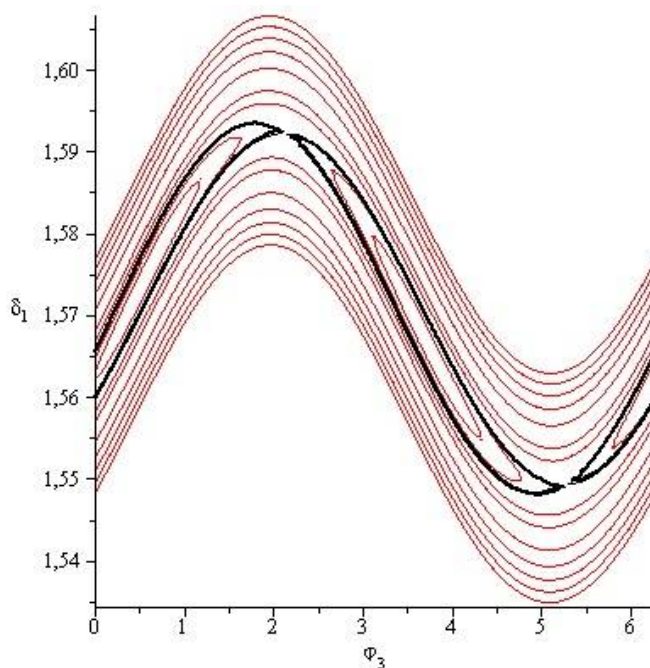


Рис.1.10 Либрационные зоны конца вектора кинетического момента Сатурна в окрестности экватора единичной сферы.

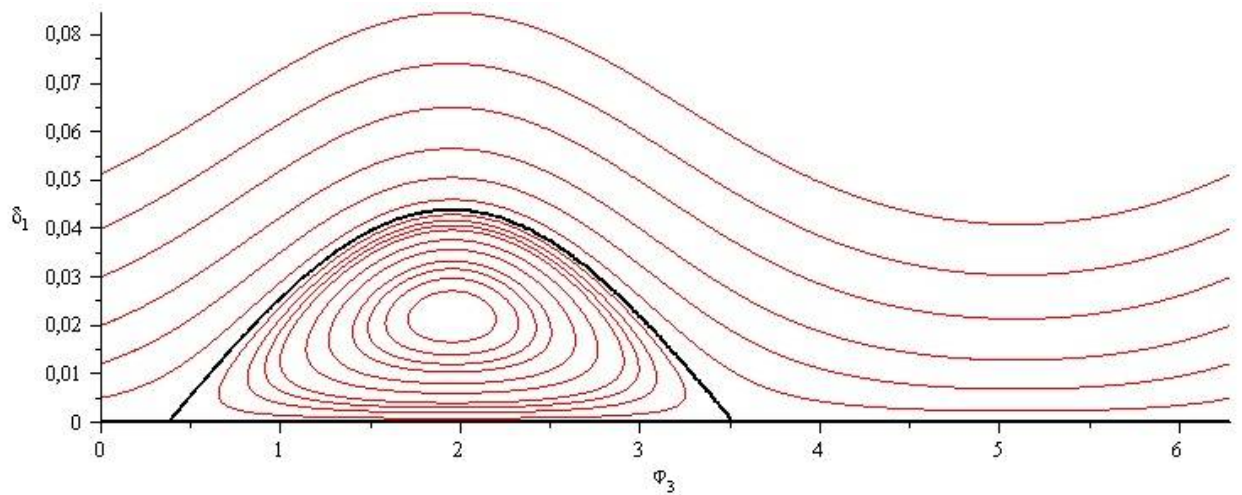


Рис. 1.11 Либрационные зоны конца вектора кинетического момента Сатурна в окрестности северного полюса.

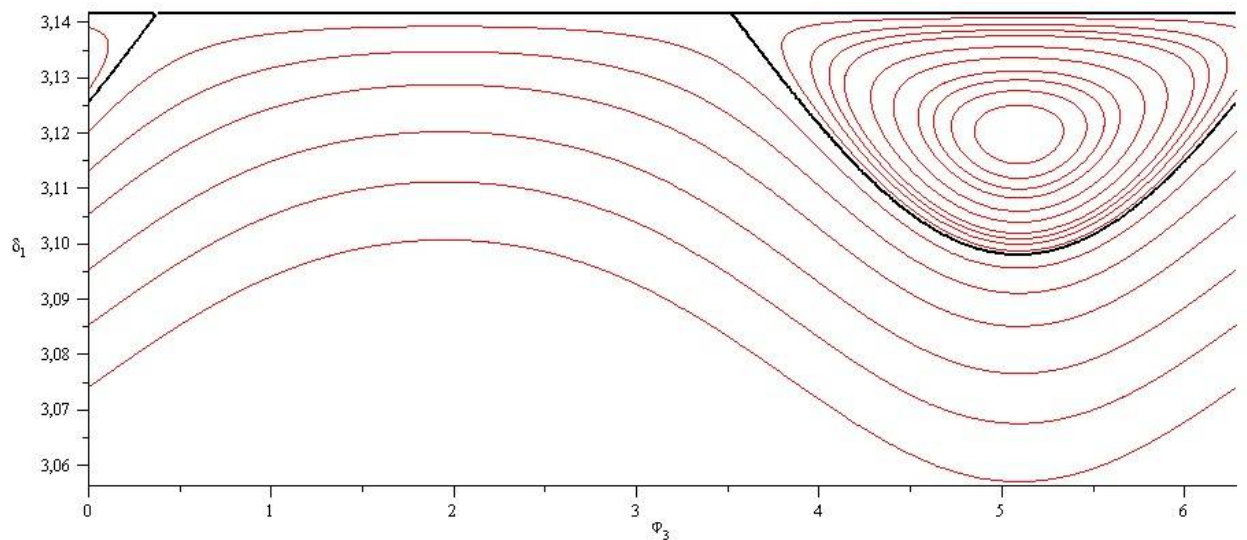


Рис. 1.12 Либрационные зоны конца вектора кинетического момента Сатурна в окрестности южного полюса.

Черным цветом на Рис. 1.10, 1.11, 1.12 изображены сепаратрисы отделяющие зоны колебаний конца вектора \mathbf{I}_2 от движений типа вращения.

Приведённых сведений достаточно, чтобы сделать выводы о влиянии Юпитера на вращение Сатурна.

Регулярная прецессия Сатурна, вызванная притяжением Солнца, «портится», так как угол нутации δ_1 медленно меняется со временем, имея разброс в значениях $\Delta\delta_1 \approx 0.04$. Медленно меняется также угловая скорость прецессии. Скорость изменения угла нутации δ_1 и угла прецессии φ_3 -- величина порядка ε .

Более существенный эффект проявляет себя в том случае, когда движения вектора кинетического момента наблюдаются вблизи южного и северного полюсов единичной

сферы, а также вблизи плоскости экватора. Вектор \mathbf{I}_2 совершает либрационные движения в окрестности неподвижных точек с координатами $\{w_3^* = 1.952062662, \delta_1^* = 0.02183210425\}$ и $\{w_3^* = 5.093655316, \delta_1^* = 3.119760547\}$.

Появление этих точек обусловлено наклоном плоскости орбиты Сатурна по отношению к плоскости орбиты Юпитера, равным β , и как следствие, -- смещением традиционных равновесий $\delta_1 = 0, \pi$ вектора \mathbf{I}_2 (для вращения Сатурна под действием притяжения одного лишь Солнца) на угол $\delta_1^* = \beta$

Кроме этого, появляются новые положения равновесия, отвечающие значениям $\delta_1 = 0, \delta_1 = \pi$. Неустойчивым стационарным точкам $\delta_1 = 0, \delta_1 = \pi$ отвечают гомоклинические траектории, вдоль которых движение имеет асимптотический характер. Эти траектории являются сепаратрисами и отделяют либрационные движения от движений типа вращения (рис. 1.11, 1.12). Либрациям в окрестности сепаратрисы отвечают движения \mathbf{I}_2 со сколь угодно большим периодом.

В окрестности экватора единичной сферы вектор \mathbf{I}_2 совершает колебания вблизи неподвижных точек с координатами $\{w_3^* = 0.5714376802, \delta_1^* = 1.574923820\}$ и $\{w_3^* = 3.713030335, \delta_1^* = 1.566668834\}$. Появление этих точек – результат разрушения структурно неустойчивого многообразия, существующего в прецессионных вращениях планеты под действием притяжения Солнца. Зона колебаний ограничена сепаратрисой $g = 0.0002896666946$, соединяющей равновесия (7) и (8) (рис. 1.10). Равновесия (7) и (8) имеют координаты $\{w_3^* = 5.283915161, \delta_1^* = 1.549358058\}$ и $\{w_3^* = 2.142322507, \delta_1^* = 1.592234596\}$ соответственно.

В заключении отметим, что реальному вращению Сатурна соответствует «испорченная» прецессия с углом нутации $\delta_1^* = 26.73^\circ$, отсчитанным от нормали к плоскости орбиты Сатурна.

ГЛАВА 2

О прецессии Сатурна под действием притяжения Юпитера и спутников

В данной главе исследуется прецессия Сатурна под действием притяжения Солнца, Юпитера и спутников планеты. Сатурн рассматривается как осесимметричное ($A=B$) твердое тело, близкое к динамически сферическому. Орбиты Сатурна и Юпитера считаются кеплеровскими эллипсами в инерциальной системе координат. Предполагается, что орбиты планет имеют малые эксцентриситеты, малыми являются также средние движения планет (по сравнению с собственной частотой вращения Сатурна) и их массы (в сравнении с массой Солнца).

Показано, что вся совокупность малых параметров приводится к двум независимым параметрам. Получена, без учета влияния спутников, осредненная функция Гамильтона задачи и интегралы эволюционных уравнений, в том числе, – интеграл, описывающий эволюцию вектора кинетического момента планеты. С помощью метода малого параметра получены, с точностью до членов второго и третьего порядков малости по малому параметру, выражения для частоты прецессии и угла нутации оси вращения планеты соответственно, вызванные притяжением только Юпитера.

Рассматривая планету со спутниками как “единое целое”, прецессирующее вокруг нормали к неподвижной плоскости орбиты Сатурна, влияние спутников на вращение Сатурна учитывается через поправки в формуле невозмущенной частоты прецессии. Получено числовое значение амплитуды колебаний угла нутации оси планеты на промежутке времени 6×10^6 лет, а также значения поправок к частоте прецессии, вызванных притяжением спутников и Юпитера.

2.1 Функция Гамильтона задачи

Рассмотрим задачу о вращении планеты C (Сатурн) под действием притяжения двух массивных тел S (Солнце) и J (Юпитер) с массами m_S, m_J ($m_S > m_C$) соответственно. Будем считать, что планеты C и J движутся относительно S по эллиптическим орбитам в поступательно перемещающихся осях, связанных с телом S :

$$r = \frac{a_J(1-e_J^2)}{1+e_J \cos \nu_1}, \quad r_1 = \frac{a_C(1-e_C^2)}{1+e_C \cos \nu}$$

Здесь r и r_1 - радиусы векторы между телами S и J , S и C соответственно, a_J, e_J (a_C, e_C) -- большая полуось и эксцентриситет эллиптического движения тела J (тела C); v , и v_1 -- истинные аномалии. Тело C будем считать абсолютно твёрдым телом с динамически-симметричным распределением массы ($A=B$).

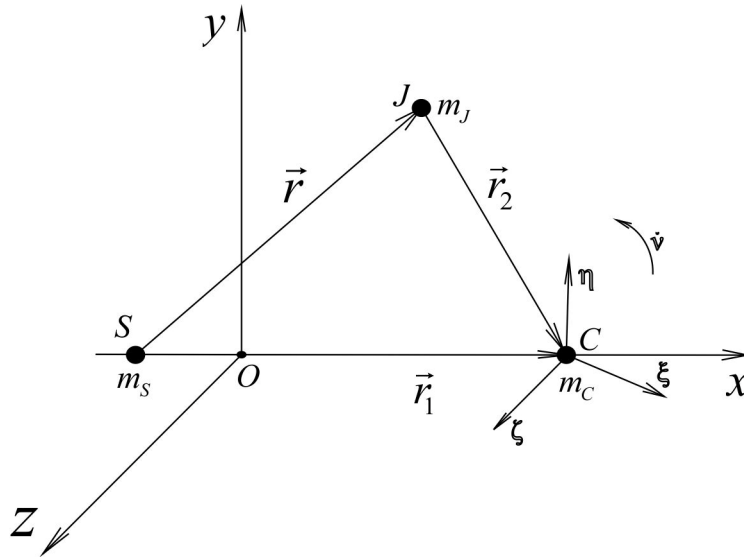


Рис. 2.1. Вывод уравнений движения вокруг центра масс планеты C .

Введем (рис.2.1) барицентрическую систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тел C и S . Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты тела C относительно S . Ось Ox направим по прямой, соединяющей тела S и C в сторону тела C . Кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела C относительно тела S . Ось Oz дополняет оси Ox и Oy до правой системы координат. С центром масс C свяжем поступательно движущуюся систему координат $C\xi\zeta$, ось $C\xi$ которой коллинеарна Oz , ось $C\zeta$ параллельна линии апсид эллиптического движения тел S и C относительно общего центра масс, а $C\eta$ дополняет систему координат до правой. Введём систему координат $Cx_1x_2x_3$, жёстко связанную с телом C , оси которой направлены по главным центральным осям инерции. Ориентация подвижного трёхгранника $Cx_1x_2x_3$ относительно кениговых осей $C\xi\eta\zeta$ задаётся с помощью канонических переменных Депри-Андуайе $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ [54,61] (рис.2.2), подробно описанные в разделе 1.1.

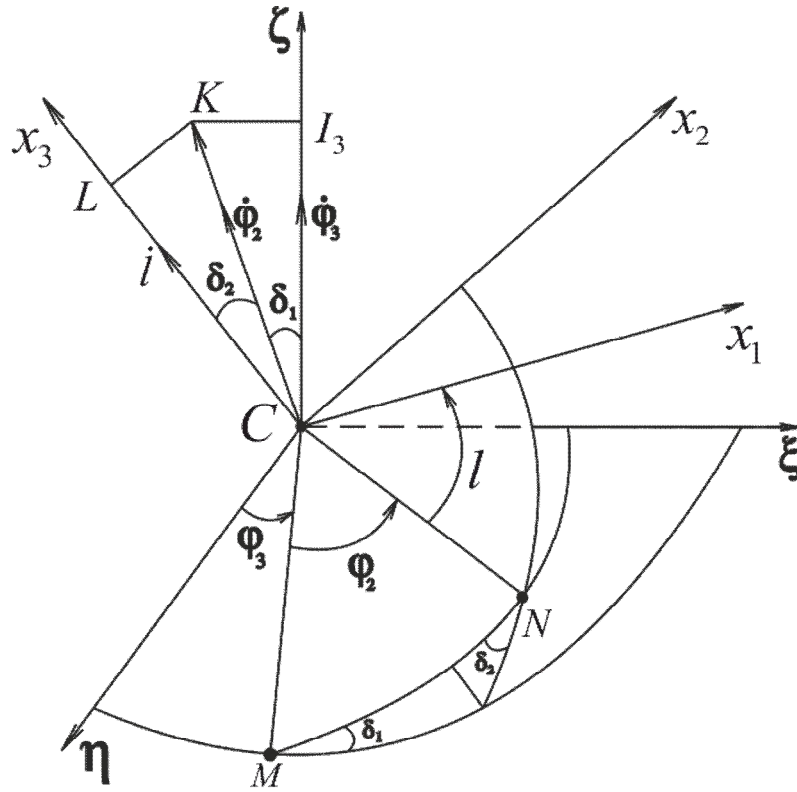


Рис. 2.2 Переменные Делри-Андуайе

На Рис. 2.2 \mathbf{K} – вектор кинетического момента Сатурна относительно центра тяжести. Смысл угловых переменных l, φ_2, φ_3 ясен из рис.2.2, а соответствующие им импульсы таковы

$$L = K \cos \delta_2, \quad I_2 = |\mathbf{K}|, \quad I_3 = K \cos \delta_1$$

Дифференциальные уравнения вращения имеют гамильтонов вид. Выражение для функции Гамильтона известно [8,32]:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C} - U, \quad U = -\frac{3}{2} \mu_s n_c^2 \frac{a_c^3}{r_1^3} (C - A) \gamma_{13}^2 - \frac{3}{2} \mu_J n_J^2 \frac{a_J^3}{r_2^3} (C - A) \gamma_{23}^2 \quad (2.1)$$

$$\gamma_{13} = \alpha_3 \cos \nu + \beta_3 \sin \nu, \quad \gamma_{23} = \frac{1}{r_2} [(\alpha_3 \cos \nu + \beta_3 \sin \nu)(x_c - x_2) - (\beta_3 \cos \nu - \alpha_3 \sin \nu)y_2 - \gamma_3 z_2]$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mu_s = \frac{m_s}{m_c + m_s}, \quad \mu_J = \frac{m_J}{m_s + m_J}, \quad \mu_c = \frac{m_c}{m_s + m_c}$$

f – гравитационная постоянная, $x_c = (1 - \mu_c)r_1$ – координата центра масс тела C ,

$n_J = \sqrt{f(m_s + m_J)/a_J^3}$ – среднее движение тела J , $n_c = \sqrt{f(m_s + m_c)/a_c^3}$ – среднее

движение тела C , $r_2 = \sqrt{(x_c - x_2)^2 + y_2^2 + z_2^2}$ -- расстояние между телами C и J , γ_{13} , γ_{23} –

косинусы углов между радиус-векторами r_i и осью вращения Cx_3 . Иначе $\gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i, \tilde{\mathbf{e}}_j)$, где

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} = (1, 0, 0), \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2|} = \frac{1}{r_2}(x - x_2, -y_2, -z_2),$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = (\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu, \beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu, \gamma_j)$$

Орты $\tilde{\mathbf{e}}_j$ главных центральных осей инерции Cx_j в барицентрической системе координат

$Oxyz$ стоят в столбцах матрицы перехода от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к $Oxyz$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos \nu + \beta_1 \sin \nu & \alpha_2 \cos \nu + \beta_2 \sin \nu & \alpha_3 \cos \nu + \beta_3 \sin \nu \\ \beta_1 \cos \nu - \alpha_1 \sin \nu & \beta_2 \cos \nu - \alpha_2 \sin \nu & \beta_3 \cos \nu - \alpha_3 \sin \nu \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A, C - экваториальный и осевой моменты инерции тела C , $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ - элементы матрицы направляющих косинусов между поступательно движущимися осями $C\xi\eta\zeta$ и связанным трёхгранником $Cx_1x_2x_3$:

$$\alpha_3 = -(-\cos \varphi_3 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \sin \delta_2 + \sin \varphi_3 \sin \delta_1 \cos \delta_2,$$

$$\beta_3 = -(-\sin \varphi_3 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_3 \cos \delta_1 \cos \varphi_2) \sin \delta_2 - \cos \varphi_3 \sin \delta_1 \cos \delta_2,$$

$$\gamma_3 = -\sin \delta_1 \cos \varphi_2 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2, \quad \cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{I_2}.$$

Матрицу \mathbf{S} направляющих косинусов с элементами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ легко получить, сделав пять последовательных поворотов на углы $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, l$ вокруг соответствующих осей. В векторно-матричной форме переход от системы координат $Cx_1x_2x_3$ к $C\xi\eta\zeta$ запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_5$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 \\ 0 & \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & -\sin \delta_2 \\ 0 & \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_5 = \begin{pmatrix} \cos l & -\sin l & 0 \\ \sin l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбиту тела J считаем известной квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат $Oxyz$ (далее орбита будет получена в явном виде):

$$x_2(t) = \sum_{\|\mathbf{p}\| \geq 0} C_{\mathbf{p}}^{(1)} e^{i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})t}, \quad y_2(t) = \sum_{\|\mathbf{p}\| \geq 0} C_{\mathbf{p}}^{(2)} e^{i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})t}, \quad z_2(t) = \sum_{\|\mathbf{p}\| \geq 0} C_{\mathbf{p}}^{(3)} e^{i(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega})t} \quad (2.2)$$

Здесь x_2, y_2, z_2 - координаты центра масс тела J , $\boldsymbol{\omega} = (n_J, n_C)$ - вектор базисных частот, $\mathbf{p} = (p_0, p_1)$, $\|\mathbf{p}\| = |p_0| + |p_1|$, $(\mathbf{p}, \boldsymbol{\omega}) = p_0 n_J + p_1 n_C$. Величины $C_p^{(j)}$ - параметры, определяющие вид орбиты Юпитера в барицентрической системе координат.

2.2 Усредненный Гамильтониан задачи. Первые интегралы.

Для исследования вращения планеты C методом усреднения, введём независимые малые параметры задачи. Будем считать, что тело C – быстро закрученный волчок: угловая скорость собственного вращения $\Omega^* = d\varphi_2/dt$ тела вокруг вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 существенно превосходит остальные компоненты его угловой скорости при движении вокруг центра масс, при этом $\Omega^* \gg n_C, n_J$.

За единицу времени примем характерное значение $T^* = 1/\Omega^*$. Тогда параметры $\varepsilon_1 = n'_C$ ($n'_C = n_C / \Omega^*$), $\varepsilon_2 = n'_J$ ($n'_J = n_J / \Omega^*$) – малые, при этом средние аномалии движений тел C и J будут вычисляться по формулам

$$M = n'_C t, \quad M_1 = n'_J t$$

Также будем считать, что эллипсоид инерции планеты близок к динамически-сферическому: $\varepsilon_3 = (C' - A')$ – малый параметр. Здесь

$$C' = C/I^*, \quad A' = A/I^*, \quad I^* = m_C r_0^2$$

r_0 - средний экваториальный радиус планеты C . Предположим, что $m_J, m_C \ll m_S$, тогда параметры $\mu_J = \varepsilon_4$, $\mu_C = \varepsilon_5$ – малые величины.

Гамильтониан (1) приводится к следующему виду:

$$H = H_0 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_3 H_1 + \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 H_2 \quad (2.3)$$

где

$$H_0 = \frac{I_2^2 - L^2}{2A'I^*\Omega^*} + \frac{L^2}{2C'I^*\Omega^*}, \quad H_1 = \frac{3}{2}\Omega^* I^* \mu_S \frac{a_C^3}{r_1^3} \gamma_{13}^2, \quad H_2 = \frac{3}{2}\Omega^* I^* \frac{a_J^3}{r_2^3} \gamma_{23}^2$$

При $\varepsilon_i = 0$ ($i=1, \dots, 4$) имеем $H=T$, поэтому ось планеты совершает регулярную прецессию вокруг постоянного по величине вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 . Также остаются постоянными во всё время движения канонически сопряжённые переменные I_3, φ_3 , задающие положение этого вектора относительно кёниговой системы координат $C\xi\eta\zeta$.

Отметим, что переменные Депри-Андуайе являются переменными действие-угол в невозмущенной задаче, если планета динамически-симметрична ($A=B$).

Рассмотрим случай, когда частоты

$$\Omega_1 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} \sim I_2, \quad \Omega_2 = \frac{\partial H_0}{\partial L} \sim \varepsilon_3$$

невозмущенного вращения планеты C относительно собственного центра масс, частоты n'_C, n'_J орбитального движения тел C и J не удовлетворяют резонансным соотношениям

$$k_0 n'_J + k_1 n'_C + k_2 \Omega_1 + k_3 \Omega_2 = 0 \quad (2.4)$$

ни при одном наборе целых чисел $k_0, k_1, k_2, k_3, k_2^2 + k_3^2 \neq 0$.

Перейдём к новому времени $M = \varepsilon_1 t$ и запишем «расширенную» функцию Гамильтона

$$H^* = P_M + \frac{n'_J}{\varepsilon_1} P_{M_1} + \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \mu H_1 + \varepsilon H_2 \quad (2.5)$$

Здесь $\mu = \varepsilon_1 \varepsilon_3, \varepsilon = \varepsilon_2^2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_1^{-1}$ -- независимые малые параметры задачи, M, P_M, M_1, P_{M_1} - новые обобщённые координаты и обобщённые импульсы соответственно. Легко видеть, что величины M, M_1, φ_2, l являются быстрыми переменными задачи, частоты изменения которых в невозмущенном движении есть $1, n'_J / \varepsilon_1, \Omega_1 / \varepsilon_1, \Omega_2 / \varepsilon_1$ соответственно.

Исследуем уравнения возмущённого движения при помощи метода усреднения с независимыми малыми параметрами [24,23]. Отметим только, что процедура усреднения с независимыми параметрами аналогична классическому усреднению: временное и пространственное средние вычисляются традиционно, фиксируя значения медленных переменных и малых параметров.

Усредним функцию H^* по всем быстрым переменным:

$$\bar{H}^* = P_M + \frac{n'_J}{\varepsilon_1} P_{M_1} + \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \mu \bar{H}_1 + \varepsilon \bar{H}_2, \quad (2.6)$$

где

$$\bar{H}_1 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H_1 dld\varphi_2 dM, \quad \bar{H}_2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} H_2 dld\varphi_2 dM dM_1$$

Вычисления показывают, что функция \bar{H}_1 имеет следующий вид:

$$\bar{H}_1 = \frac{3}{2} \mu_S \Omega^* I^* a_C^3 \left[D_{11} \sin^2 \delta_2 + (D_{21} \sin^2 \varphi_3 + D_{31} \cos^2 \varphi_3 + D_{41} \sin 2\varphi_3) (2 - 3 \sin^2 \delta_2) \sin^2 \delta_1 \right]$$

Коэффициенты D_{il} вычисляются по формулам:

$$D_{il} = \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{2\pi} Q_{il}(\nu) dM = \frac{1}{(2\pi)} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e_C^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e_C \cos \nu)^2} Q_{il}(\nu) d\nu,$$

$$Q_{11} = \frac{1}{2r_1^3}, \quad Q_{21} = \frac{\cos^2 \nu}{2r_1^3}, \quad Q_{31} = \frac{\sin^2 \nu}{2r_1^3}, \quad Q_{41} = -\frac{\cos \nu \sin \nu}{2r_1^3}$$

Учитывая, что

$$D_{11} = \frac{1}{2a_c^3(1-e_c^2)^{3/2}}, \quad D_{41}=0, \quad D_{21} = D_{31} = \frac{1}{4a_c^3(1-e_c^2)^{3/2}},$$

и, вводя обозначения $D=D_{21}=D_{31}$, получим следующий вид функции \bar{H}_1 :

$$\bar{H}_1 = \frac{3}{2} \mu_s \Omega^* I^* a_c^3 \left[D_{11} \sin^2 \delta_2 + D(2 - 3 \sin^2 \delta_2) \sin^2 \delta_1 \right] \quad (2.7)$$

Функция \bar{H}_2 имеет вид:

$$\bar{H}_2 = \frac{3}{2} \Omega^* I^* a_c^3 \left[D_{12} \sin^2 \delta_2 + (2 - 3 \sin^2 \delta_2) G_2 \right], \quad (2.8)$$

где

$$G_2 = (D_{22} \sin^2 \varphi_3 + D_{32} \cos^2 \varphi_3 + D_{42} \sin 2\varphi_3 + D_{52}) \sin^2 \delta_1 + (D_{62} \sin \varphi_3 + D_{72} \cos \varphi_3) \cos \delta_1 \sin \delta_1$$

Коэффициенты D_{i2} вычисляются по формулам:

$$D_{i2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{i2}(M, M_1) dM dM_1 = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e_c^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e_c \cos \nu)^2} Q_{i2}(\nu, M_1) d\nu dM_1,$$

$$Q_{12} = \frac{(x_c - x_2)^2 + y_2^2 - 2z_2^2}{2r_2^5}, \quad Q_{22} = \frac{((x_c - x_2) \cos \nu + y_2 \sin \nu)}{2r_2^5},$$

$$Q_{32} = \frac{((x_c - x_2) \sin \nu - y_2 \cos \nu)}{2r_2^5}, \quad Q_{42} = -\frac{(y_2 \sin \nu + (x_c - x_2) \cos \nu)((x_c - x_2) \sin \nu - y_2 \cos \nu)}{2r_2^5},$$

$$Q_{52} = -\frac{z_2^2}{2r_2^5}, \quad Q_{62} = -\frac{z_2((x_c - x_2) \cos \nu + y_2 \sin \nu)}{r_2^5}, \quad Q_{72} = \frac{z_2((x_c - x_2) \sin \nu - y_2 \cos \nu)}{r_2^5}$$

Усредненные уравнения вращений допускают следующие интегралы в инволюции:

$$L = \text{const}, \quad I_2 = \text{const}, \quad \bar{H}^* = \text{const}$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении вращение планеты C складывается из регулярной прецессии оси вращения планеты C вокруг постоянного по модулю вектора \mathbf{I}_2 на постоянном угловом расстоянии δ_2 и движения самого вектора \mathbf{I}_2 относительно осей $C\xi\zeta$. Заметим, что в силу постановки задачи, угол δ_2 является малым, поэтому ось вращения планеты C практически совпадает с вектором кинетического момента.

Траектория конца вектора кинетического момента описывается интегралом $\bar{H}^* = \text{const}$, который можно привести к виду

$$\chi_1 \sin^2 \delta_1 + \chi_2 G_2(\varphi_3, \delta_1) = \text{const}, \quad (2.9)$$

где

$$\chi_1 = \frac{3}{2} \mu \mu_S \Omega^* I^* a_C^3 D(2 - 3 \sin^2 \delta_2), \quad \chi_2 = \frac{3}{2} \varepsilon \Omega^* I^* a_J^3 (2 - 3 \sin^2 \delta_2)$$

Первый член левой части интеграла (2.9) обусловлен прямым воздействием массы S , второй член вызван притяжением тела J . Пренебрегая притяжением последнего ($\mu_J=0$), имеем $\chi_2=0$, поэтому интеграл (2.9) приводится к интегралу усредненной обобщенной задачи двух тел [8]. Однако невозможно пренебречь тяготением тела S в рамках рассмотренной модели при условии сохранения непрерывности интеграла по μ_S : при $\mu_S=0$ нарушается непрерывность, так как должен измениться вид орбиты тела J , и, как следствие, меняются значения параметров D_{i2} . Это значит, что влияние тела J опосредовано, в значительной степени, через массу S (формально – через параметры D_{i2}).

В силу определения малых параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и третьего закона Кеплера имеем

$$\frac{\varepsilon_2^2 a_J^3}{\varepsilon_1^2 a_C^3} = 1$$

Отсюда следует, что первый интеграл (2.9), описывающий траекторию конца вектора кинетического момента, примет вид

$$\left(D_{22} \sin^2 \varphi_3 + D_{32} \cos^2 \varphi_3 + D_{42} \sin 2\varphi_3 + D_{52} + \frac{\mu_S}{\mu_J} D \right) \sin^2 \delta_1 + (D_{62} \sin \varphi_3 + D_{72} \cos \varphi_3) \cos \delta_1 \sin \delta_1 = \text{const}, \quad \mu_J \neq 0 \quad (2.10)$$

Полный анализ интеграла (2.10) при разных значениях входящих в него параметров дан в работах [32,31,70]. В статьях [28,29] этот интеграл применялся для исследования вращений Сатурна и Марса (без учета притяжения спутников этих планет) в барицентрической системе координат Солнце – Юпитер. Недостаток такой системы координат – сложность исследования прецессии оси планеты, в частности, отсутствует предельный переход к прецессии в задаче двух тел.

Отметим, что усредненный гамильтониан (2.6) описывает эволюцию медленных переменных с точностью первого порядка малости по μ, ε [24,23] на временах

$$t \sim \frac{T^*}{\varepsilon_1 \|(\mu, \varepsilon)\|} = \frac{T_C}{2\pi \|(\mu, \varepsilon)\|} \sim 10^6 \text{ лет}$$

где T_C – период обращения планеты C по орбите.

2.3 Прецессия планеты

Уравнения возмущенного движения, описывающие эволюцию медленных переменных I_3, φ_3 имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi_3}{d\tau} = \mu \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial I_3} \\ \frac{dI_3}{d\tau} = -\varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \varphi_3} \end{cases} \quad (2.11)$$

Здесь $\tau = \varepsilon_1 t$. Отсюда следует, что притяжение точки J возмущает переменную I_3 - проекцию вектора \mathbf{I}_2 на нормаль к плоскости орбиты тела C . В отсутствии притяжения точки J ($\varepsilon=0$) вектор \mathbf{I}_2 совершает регулярную прецессию вокруг нормали к плоскости этой орбиты, а формула для частоты прецессии вектора \mathbf{I}_2 , учитывая определение малых параметров и $\mu_S \approx 1$, имеет вид:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{4} \frac{n_C^2}{(1-e_C^2)^{3/2}} (A-C) \frac{(3 \cos^2 \delta_2 - 1)}{I_2} \cos \delta_1, \quad \delta_1, \delta_2 = \text{const} \quad (2.12)$$

Формула (2.12) была получена Белецким [5,8] для динамически-симметричного спутника. Если теперь учесть, что $\delta_2 \approx 0$ и $I_2 \approx C \omega_r$ (ω_r - угловая скорость собственного вращения планеты), то формула частоты прецессии оси планеты примет вид:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2} \frac{n_C^2}{(1-e_C^2)^{3/2} \omega_r} \left(\frac{A-C}{C} \right) \cos \delta_1 \quad (2.13)$$

Формула (2.13) была выведена в работах [66,80] для прецессии оси Земли при $e_C = 0$.

Получим, при помощи метода малого параметра поправку к частоте прецессии ω и углу нутации вектора \mathbf{I}_2 с точностью до членов порядка ε^2 и ε^3 соответственно. С этой целью, представим решение системы (2.11) в виде ряда по ε :

$$I_3 = I_3^{(0)}(\tau) + \varepsilon I_3^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 I_3^{(2)}(\tau) + \dots, \quad \varphi_3 = \varphi_3^{(0)}(\tau) + \varepsilon \varphi_3^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 \varphi_3^{(2)}(\tau) + \dots$$

где $I_3^{(0)}(\tau) = \text{const}$, $\varphi_3^{(0)}(\tau) = \omega_e \tau$ - порождающее решение системы (2.11). Здесь ω_e вычисляется по формуле (2.13) при условии сокращения ее на n_C .

Подставляя эти ряды в уравнения системы (2.11) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} 1) \quad \dot{\varphi}_3^{(0)} &= f(I_3^{(0)}), \quad \dot{I}_3^{(0)} = 0; \quad 2) \quad \dot{\varphi}_3^{(1)} = \left(\frac{\partial f}{\partial I_3} \right)_0 I_3^{(1)} + f_1(I_3^{(0)}, \varphi_3^{(0)}), \quad \dot{I}_3^{(1)} = f_2(I_3^{(0)}, \varphi_3^{(0)}); \quad (2.14) \\ 3) \quad \dot{\varphi}_3^{(2)} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial I_3} \right)_0 I_3^{(1)} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_3} \right)_0 \varphi_3^{(1)} + \left(\frac{\partial f}{\partial I_3} \right)_0 I_3^{(2)} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial I_3^2} \right) (I_3^{(1)})^2, \quad \dot{I}_3^{(2)} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial I_3} \right)_0 I_3^{(1)} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial \varphi_3} \right)_0 \varphi_3^{(1)} \end{aligned}$$

Здесь $f(I_3) = \mu \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_3}$, $f_1(I_3, \varphi_3) = \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial I_3}$, $f_2(I_3, \varphi_3) = -\frac{\partial \bar{H}_2}{\partial \varphi_3}$.

Решение первой системы описывает регулярную прецессию вектора \mathbf{I}_2 планеты под действием притяжения тела S с частотой $\omega_e = f(I_3^{(0)})$ и постоянным углом нутации

$$\delta_1^{(0)} = \arccos\left(\frac{I_3^{(0)}}{C\omega_r}\right)$$

Интегрируя систему (2.14) с нулевыми начальными данными по $\varphi_3^{(k)}$, $I_3^{(k)}$ ($k = 1, 2$), считая δ_2 равным нулю, получим:

$$I_3^{(1)}(\tau) = -3 \frac{\Omega^* I^*}{\omega_e} a_J^3 [(D_{22} \sin^2(\omega_e \tau) - D_{32} \sin^2(\omega_e \tau) + D_{42} \sin(2\omega_e \tau)) \sin^2 \delta_1^{(0)} + (D_{62} \sin(\omega_e \tau) + D_{72} \cos(\omega_e \tau) - D_{72}) \cos \delta_1^{(0)} \sin \delta_1^{(0)}],$$

$$\dot{\varphi}_3^{(1)}(\tau) = -\frac{6\Omega^* I^* \mu \mu_S a_C^3 D}{(C\omega_r)^2} I_3^{(1)}(\tau) + 3 \frac{I^* \Omega^* a_J^3}{C\omega_r} \left[(D_{62} \sin \omega_e \tau + D_{72} \cos \omega_e \tau) \left(2 \sin \delta_1^{(0)} - \frac{1}{\sin \delta_1^{(0)}} \right) - 2(D_{22} \sin^2 \omega_e \tau + D_{32} \cos^2 \omega_e \tau + D_{42} \sin 2\omega_e \tau + D_{52}) \cos \delta_1^{(0)} \right]$$

$$I_3^{(2)}(\tau) = \sum_{\substack{n=-4, \dots, 4 \\ m=0, \dots, 4}} C_{n,m}^{(1)} \sin(m\omega_e \tau + n\delta_1^{(0)}) + \sum_{\substack{n=-4, \dots, 4 \\ m=0, \dots, 4}} C_{n,m}^{(2)} \cos(m\omega_e \tau + n\delta_1^{(0)}) + \sum_{\substack{n=-4, \dots, 4 \\ m=0, \dots, 4}} C_{n,m}^{(3)} \tau \sin(m\omega_e \tau + n\delta_1^{(0)}) + \sum_{\substack{n=-4, \dots, 4 \\ m=0, \dots, 4}} C_{n,m}^{(4)} \tau \cos(m\omega_e \tau + n\delta_1^{(0)}).$$

Заметим, что $I_3^{(1)}(\tau)$ -- периодическая функция τ , в то время как $I_3^{(2)}(\tau)$ содержит также секулярные члены. Секулярный член

$$\frac{\omega_e}{2\pi} \left(\int_0^{2\pi/\omega_e} \dot{\varphi}_3^{(1)}(\tau) d\tau \right) \tau$$

входит в выражение для $\varphi_3^{(1)}(\tau)$. Формулы для коэффициентов $C_{n,m}^{(i)}$ опускаем. Отметим также, что для планет с $\sin \delta_1^{(0)} \approx 0$ полученные формулы непригодны.

Приведем формулу для угла нутации

$$\delta_1(\tau) = \arccos\left[\frac{I_3^{(0)} + \varepsilon I_3^{(1)}(\tau) + \varepsilon^2 I_3^{(2)}(\tau)}{I_2^0}\right]$$

оси вращения планеты C , раскладывая это выражение в ряд по ε :

$$\delta_1 = \delta_1^{(0)} - \frac{I_3^{(1)}(\tau)}{C\omega_r \sin \delta_1^{(0)}} \varepsilon - \left[\left(\frac{I_3^{(1)}(\tau)}{C\omega_r} \right)^2 \frac{\cos \delta_1^{(0)}}{2 \sin^3 \delta_1^{(0)}} + \frac{I_3^{(2)}(\tau)}{C\omega_r \sin \delta_1^{(0)}} \right] \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3) \quad (2.15)$$

Поправку к невозмущенной частоте прецессии можно получить, исходя из формулы периода прецессии:

$$\hat{T} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_3}{\mu \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_3} + \varepsilon \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial I_3}} = \frac{1}{\omega_e} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{\omega_e} \frac{\partial \bar{H}_2}{\partial I_3} + o(\varepsilon) \right) d\varphi_3, \quad \omega_e = \mu \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_3}$$

При вычислении периода необходимо учитывать изменение I_3 как функции φ_3 . Будем считать параметры D_{i2} малыми в сравнении с величиной $\mu_S D/\mu_J$. Тогда, в силу интеграла (2.10), имеем $I_3 = \text{const}$. Период прецессии вычисляется по формуле

$$\hat{T} = \frac{2\pi}{\omega_e} - 6\varepsilon \frac{I^* \Omega^* a_J^3 \pi}{C \omega_r \omega_e^2} (D_{22} + D_{32} + 2D_{52}) \cos \delta_1^{(0)} + o(\varepsilon), \quad (2.16)$$

частота прецессии есть

$$\omega = \omega_e + \varepsilon 3 \frac{I^* \Omega^* a_J^3}{C \omega_r} (D_{22} + D_{32} + 2D_{52}) \cos \delta_1^{(0)} + o(\varepsilon) \quad (2.17)$$

Если вернуться к «старому» времени $t = T^* \tau / \varepsilon_1$, будем иметь

$$T = \frac{T_C}{2\pi} \hat{T}$$

2.4 Влияние Юпитера и спутников на вращение Сатурна

В качестве тел S , C и J выберем Солнце, Сатурн и Юпитер соответственно. Орбитальные характеристики движения Юпитера и Сатурна, рассчитанные на эпоху J2000, приведены в таблице 1 (данные взяты с сайта NASA (nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/saturnfact.html)).

Таблица 2.1. Кеплеровские элементы орбит Юпитера и Сатурна

Элемент	Юпитер	Сатурн
Эксцентриситет	$e_J=0.04839266$	$e_C=0.05415060$
Наклонение орбиты	$i_J=1.30530^\circ$	$i_C=2.48446^\circ$
Долгота восходящего узла	$\Omega_J=100.55615^\circ$	$\Omega_C=113.71504^\circ$
Аргумент перигелия	$\omega_J=275.066^\circ$	$\omega_C=336.013862^\circ$
Большая полуось	$a_J=5.20336301$ а.е.	$a_C=9.53707032$ а.е.
Среднее движение	$n_J=1.678740634 \cdot 10^{-8}$ рад/с	$n_C=6.758270169 \cdot 10^{-9}$ рад/с

Орбита Юпитера в барицентрической системе координат Солнца и Сатурна запишется следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} X_J \\ Y_J \\ Z_J \end{pmatrix} - \mathbf{s}$$

Здесь $\mathbf{s}=(\mu_C r_1, 0, 0)$, $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3$. \mathbf{S}_j – матрицы поворота вокруг соответствующих осей, X_J, Y_J, Z_J - координаты центра масс Юпитера в гелиоцентрической эклиптической системе координат. Матрицы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \Omega_C & -\sin \Omega_C & 0 \\ \sin \Omega_C & \cos \Omega_C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_C & -\sin i_C \\ 0 & \sin i_C & \cos i_C \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos(\omega_C + \nu) & -\sin(\omega_C + \nu) & 0 \\ \sin(\omega_C + \nu) & \cos(\omega_C + \nu) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Выражения для X_J, Y_J, Z_J можно записать в виде

$$\begin{aligned} X_J &= r(\cos(\omega_J + \nu_1) \cos \Omega_J - \sin(\omega_J + \nu_1) \sin \Omega_J \cos i_J), \\ Y_J &= r(\cos(\omega_J + \nu_1) \sin \Omega_J + \sin(\omega_J + \nu_1) \cos \Omega_J \cos i_J), \\ Z_J &= r(\sin(\omega_J + \nu_1) \sin i_J) \end{aligned}$$

где r_1 – расстояние между Солнцем и Сатурном. Используя формулы для координат центра масс Юпитера, получим координаты x_2, y_2, z_2 как функций ν, ν_1 :

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1.421442833 \cos \nu \cos \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} + \frac{4.992296462 \cos \nu \sin \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} - \frac{4.991671936 \sin \nu \cos \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} + \\ &+ \frac{1.422507024 \sin \nu \sin \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} - \frac{0.002717626805}{1 + 0.05415060 \cos \nu}, \\ y_2 &= -\frac{4.991671936 \cos \nu \cos \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} + \frac{1.422507024 \cos \nu \sin \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} - \frac{1.421442833 \sin \nu \cos \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} + \\ &- \frac{4.992296462 \sin \nu \sin \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1}, \\ z_2 &= \frac{0.1050502840 \cos \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1} + \frac{0.04211668380 \sin \nu_1}{1 + 0.04839266 \cos \nu_1}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы записать координаты Юпитера в виде ряда (2.2), воспользуемся разложением тригонометрических функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии [1]:

$$\cos \nu = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \quad \sin \nu = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM$$

где J_k – функция Бесселя k -го порядка.

Подставляя эти ряды в x_2, y_2, z_2 , раскладывая полученные выражения в ряды по e_J, e_S с точностью до членов пятого порядка малости (члены четвертого порядка малости содержат $\cos 5M, \sin 5M$, которые необходимы для вычисления резонансных коэффициентов $C_{(2,5)}^{(i)}$ ряда Фурье), получим координаты Юпитера в осях $Ox_2y_2z_2$:

$$x_2 = \frac{1.421442833 \cos M \cos M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} + \frac{4.992296462 \cos M \sin M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} - \frac{4.991671936 \sin M \cos M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} +$$

$$+ \frac{1.422507024 \sin M \sin M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} - \frac{0.002717626805}{1 + 0.05415060 \cos M} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_C^n x_{2mn}(M, M_1),$$

$$y_2 = -\frac{4.991671936 \cos M \cos M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} + \frac{1.422507024 \cos M \sin M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} - \frac{1.421442833 \sin M \cos M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} +$$

$$- \frac{4.992296462 \sin M \sin M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_C^n y_{2mn}(M, M_1),$$

$$z_2 = \frac{0.1050502840 \cos M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} + \frac{0.04211668380 \sin M_1}{1 + 0.04839266 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_C^n z_{2mn}(M, M_1).$$

Здесь M, M_1 - средние аномалии Сатурна и Юпитера. Функции $x_{2mn}, y_{2mn}, z_{2mn}$ имеют громоздкий вид, поэтому опускаем их выражения. Численные значения некоторых коэффициентов $C_{(p_0, p_1)}^{(i)}$ ряда Фурье для функций $x_2(M, M_1), y_2(M, M_1), z_2(M, M_1)$ приведены в таблице 2.2.

На рис. 2.3 изображена орбита Юпитера в барицентрических осях Солнца и Сатурна на интервале времени порядка 317 земных лет. Величины x_2, y_2, z_2 указаны в астрономических единицах.

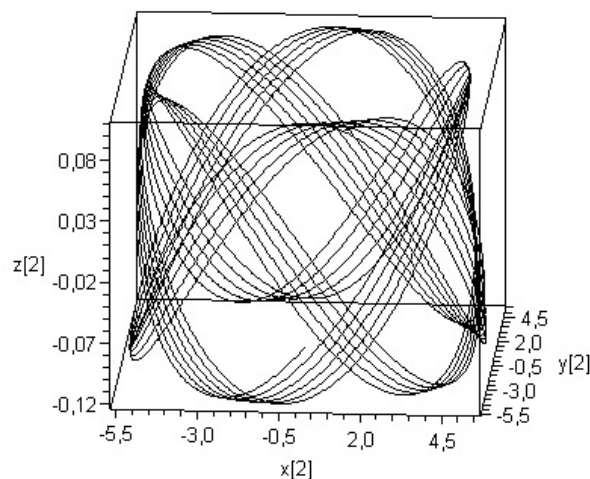


Рис. 2.3. График орбиты Юпитера в барицентрической системе координат Солнца и Сатурна.

Малые параметры задачи имеют следующий вид: $\varepsilon_1=2.565777269 \times 10^{-4}$, $\varepsilon_2=6.373338812 \times 10^{-4}$. Разность осевого и экваториального моментов инерции планеты выражается, согласно [2], по формуле:

$$\varepsilon_3=(C'-A')=J_2 \quad (2.18)$$

Здесь $J_2 = 0.016298$ есть коэффициент второй зональной гармоники гравитационного потенциала Сатурна [58]. Осевой момент инерции Сатурна $C'=0.210$ находится по данным сайта NASA (nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/saturnfact.html).

Вычисления показывают, что

$$\varepsilon_4=9.536283219 \times 10^{-4}, \quad \varepsilon_5=2.857920737 \times 10^{-4}, \quad \mu_S=0.9997142079, \quad \mu=4.181703793 \times 10^{-6}, \\ \varepsilon=2.460529147 \times 10^{-8}.$$

Заметим, что почти соизмеримость постоянных частот орбитального движения Юпитера и Сатурна

$$\Delta=k_0 n_J+k_1 n_C \approx 0$$

может повлиять на движение вектора \mathbf{I}_2 , так как усредненные уравнения вращений будут содержать величину $\theta \equiv k_0 M+k_1 M_1=\Delta t$ как параметр, медленно меняющийся со временем. Поэтому орбитальный резонанс ведет к медленной эволюции усредненных движений нерезонансного случая.

Таблица 2.2. Некоторые коэффициенты ряда Фурье координат центра масс Юпитера в барицентрических осях $Oxyz$

j	(p ₀ ,p ₁)	(0,0)	(1,1)	(2,-5)	(-2,5)
1		0.002871669533	-0.0003181916618+ +0.001490434058·I	6.890353336·10 ⁻⁸ + +2.418941380·10 ⁻⁷ ·I	6.890353336·10 ⁻⁸ + -2.418941380·10 ⁻⁷ ·I
2		-0.01966700847	0.0003405579243+ + 0.0002033693752·I	-2.418932656·10 ⁻⁷ + +6.890376750·10 ⁻⁸ ·I	-2.418932656·10 ⁻⁷ + -6.890376750·10 ⁻⁸ ·I
3		-0.007643393678	6.867288847·10 ⁻¹² + -2.752066937·10 ⁻¹² ·I	-1.984002524·10 ⁻¹⁴ + +2.945789877·10 ⁻¹⁸ ·I	-1.984002524·10 ⁻¹⁴ + -2.945789877·10 ⁻¹⁸ ·I

Однако, если резонансная расстройка удовлетворяет неравенству $\Delta \gg \varepsilon$, то воздействие резонанса будет незначительным (нерезонансный случай). Именно по этой причине резонанс 2:5 в орбитальных движениях Сатурна и Юпитера слабо влияет на вращения Сатурна, поскольку $\Delta=2n_J-5n_C \sim 10^{-2}$ значительно превосходит малые параметры μ , ε . Этот же вывод следует из представления орбиты Юпитера в виде ряда Фурье

(таблица 2.2): резонансные коэффициенты $C_{(2,5)}^{(j)} \sim 10^{-7}$ малы по сравнению с коэффициентами $C_{(0,0)}^{(j)}, C_{(1,1)}^{(j)}$, поэтому влияние их остается малым и в усредненных уравнениях движения.

Численные значения параметров D_{ij} приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3. Численные значения параметров D_{ij}

D_{ij}	Значение
D_{11}	0.0005789460169
D_{21}	0.0002894730085
D_{31}	0.0002894730085
D_{41}	0
D_{12}	0.001278447239
D_{22}	0.0006392990817
D_{32}	0.0006397384723
D_{42}	-0.000001718411258
D_{52}	$-2.951574337 \times 10^{-7}$
D_{62}	-0.00001018866987
D_{72}	-0.00001386094073

Дальнейшее продвижение в изучении прецессии Сатурна связано с учетом притяжения его спутников. Массы спутников малы по сравнению с массами Солнца и Юпитера, но они находятся вблизи планеты, поэтому их влияние существенно. В доказательство этого приведем оценки силовых функций Солнца, Юпитера и самого массивного спутника Сатурна – Титана, вносящего основной вклад (90 %) в суммарное воздействие спутников на Сатурн.

Оценка влияния Солнца:

$$\max |U_S| = \frac{3}{2} \mu_S \varepsilon_1^2 \frac{a_C^3}{r_1^3} \varepsilon_3 \approx 1.616040958 \cdot 10^{(-9)},$$

Оценка влияния Юпитера:

$$\max |U_J| = \frac{3}{2} \varepsilon_4 \varepsilon_2^2 \frac{a_J^3}{r_2^3} \varepsilon_3 \approx 1.239363864 \cdot 10^{(-12)},$$

Оценка влияния Титана:

$$\max |U_T| = \frac{3}{2} \mu_T n_T'^2 \frac{a_T^3}{r_T^3} \varepsilon_3 \approx 1.736202314 \cdot 10^{(-7)},$$

$$\mu_T = \frac{m_T}{m_T + m_C} \approx 0.0002365833564, n'_T = 0.1731510010, a_T = 1221870 \text{ км}.$$

Здесь m_T - масса Титана; $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \bar{r}_T$ - средние расстояния между Сатурном и Солнцем, Сатурном и Юпитером, Сатурном и Титаном соответственно; n'_T - среднее движение Титана в масштабе T^* ; a_T - большая полуось кеплеровой орбиты Титана.

Из приведенных оценок легко видеть, что влияние Титана в 100 раз превосходит влияние Солнца и в 100000 раз превосходит влияние Юпитера.

Однако создать стройную теорию вращения планеты под действием гравитационных моментов его спутников проблематично из-за медленной сходимости гравитационных потенциалов: отношение характерной длины планеты (например, диаметра планеты) к расстоянию до спутника меньше единицы, но это отношение не малое (см. таблицу 2.4).

Таблица 2.4. Значения параметра спутникова приближения для массивных спутников планет солнечной системы

Планета	Спутник	Значение $\lambda = \rho/R$ ρ - характерный размер планеты . R – среднее расстояние от спутника до планеты
Земля	Луна	0.01659239488
Марс	Фобос	0.3621763426
	Деймос	0.1447779009
Юпитер	Ио	0.1695328433
	Европа	0.1065400561
	Ганимед	0.06678923629
	Каллисто	0.03797294218
Сатурн	Титан	0.04932439621
Уран	Миранда	0.1975345854
	Ариэль	0.1338027432
	Умбриэль	0.09597822005
	Титания	0.05863366291

	Оберон	0.04380141212
Нептун	Тритон	0.06980513532
Плутон	Харон	0.06064972358

Для медленно сходящихся рядов характерно удержание большего количества членов, если ставится цель приближения потенциала с заданной точностью. Сколько членов ряда следует сохранить – вопрос открытый. Однако можно с уверенностью утверждать, что спутниковое приближение не работает. Например, исследование вращения Нептуна под действием притяжения Тритона показывает, что, удержание первого члена гравитационного потенциала спутника ведет к регулярной прецессии оси планеты вокруг нормали к плоскости орбиты Тритона, что не отвечает действительности (орбита Тритона сильно наклонена к плоскости эклиптики).

Для наглядности оценим члены разложения для силовых функций Солнца, Юпитера и самого массивного спутника Сатурна - Титана:

$$\lambda_s = \frac{r_0}{\bar{r}_1} \approx 4.18 \cdot 10^{-5} \text{ (Солнце)}, \lambda_j = \frac{r_0}{\bar{r}_2} \approx 9.3 \cdot 10^{-5} \text{ (Юпитер)}, \lambda_T = \frac{r_0}{\bar{r}_T} \approx 0.049 \text{ (Титан)}$$

Из приведенных оценок видно, что модель спутникова приближения работает только для Солнца и Юпитера. Для Титана модель спутникова приближения не работает – необходимо удерживать большее количество членов силовой функции.

В статьях [86,63,87] предложена формула вычисления угловой скорости прецессии оси вращения Сатурна с учетом притяжения спутников. Вывод формулы основан на предположении о вращении Сатурна со спутниками как единого целого: плоскости орбит спутников “жестко связаны” с плоскостью экватора Сатурна, так как прецессируют вместе с экватором, имея с ним постоянные углы наклона. Такое возможно в случае [64], когда период эволюционного движения восходящего узла орбиты спутника на экваторе планеты много меньше периода прецессии оси самой планеты (плоскость Лапласа спутника почти совпадает с плоскостью экватора). Указанное условие выполнено для большинства спутников Сатурна, исключая Феб, не сохраняющий угол наклона с плоскостью экватора Сатурна и исключая Япет, имеющий немалый угол наклона $i_L = 14.84^\circ$ плоскости Лапласа к экватору планеты [63]. В случае Япета его вклад в суммарное воздействие спутников уменьшается с коэффициентом $\sin 2(\delta_1 - i_L) / \sin 2\delta_1$. Эффект “целого” усиливается, если воспользоваться методом Гаусса и гравитационное воздействие спутника на планету аппроксимировать притяжением однородного вращающегося узкого кольца, имеющего массу спутника и совпадающего с его орбитой [63]. Заметим, что Титан

($m_{\text{Титан}}=1.34 \times 10^{23}$ кг), вносит основной вклад (90%) в суммарное воздействие спутников на Сатурн.

Следуя работам [86,63,87], кинетический момент “единого целого” представим в виде кинетического момента Сатурна и орбитальных моментов его экваториальных спутников:

$$I_2 = \tilde{C} m_C r_0^2 \omega_r, \quad \tilde{C} = C' + \sum_j \frac{m_j a_j^2 n_j}{m_C r_0^2 \omega_r},$$

Здесь m_j , a_j , n_j – масса, орбитальный радиус и среднее движение j -ого экваториального спутника соответственно.

Далее, разность моментов инерции ($C-A$), входящая в формулу (2.13), свяжем с коэффициентом второй зональной гармоникой по формуле (2.18), что оправдано в силу сжатия Сатурна у полюсов (Солнце и спутники создают экваториальные приливные горбы у планеты). Коэффициент второй зональной гармоникой будем вычислять, с учетом наличия экваториальных спутников, по формуле:

$$\tilde{J}_2 = J_2 + \sum_j \frac{\bar{C}_j - \bar{A}_j}{m_C r_0^2} = J_2 + \frac{1}{2} \sum_j \frac{m_j a_j^2}{m_C r_0^2}.$$

Здесь $\bar{C}_j = m_j a_j^2$ -- момент инерции кольца массой m_j и радиусом a_j относительно центральной оси, $\bar{A}_j = \frac{1}{2} m_j a_j^2$ -- момент инерции кольца относительно диаметра.

Итак, прецессирующий Сатурн со спутниками можно трактовать как единую планету с измененными динамическими параметрами C и J_2 . Из статьи [63] находим (с учетом последних данных), что

$$\tilde{J}_2 = J_2 + 0.05164 = 0.067938, \quad \tilde{C} = C' + 0.00278 = 0.21278.$$

Тогда, принимая во внимание известное значение угла нутации $\delta_1 = 26^\circ 44'$ и пренебрегая притяжением Юпитера, получим следующее выражение для угловой скорости прецессии оси вращения Сатурна:

$$\omega_e = \frac{3}{2} \frac{n_C^2}{\tilde{C} \omega_r} \tilde{J}_2 \cos \delta_1 = 0''.7679 \text{ год}^{-1}$$

В этом случае период прецессии Сатурна равен $T_e = 1.688 \times 10^6$ лет. Учитывая, что период прецессии под действием одного лишь Солнца составляет $T_e = 6.94 \times 10^6$ лет, приходим к выводу, что влияние спутников уменьшает этот период в четыре раза.

Теперь можем учесть притяжение Юпитера, используя предыдущие результаты усреднения. Для этого построим, на основе формулы (2.15), график зависимости угла

нутации от времени на интервале порядка $4.69 \cdot 10^7$ земных лет, удерживая члены первого порядка малости по ε . Проведем также численное интегрирование системы (2.11) с начальными условиями $\varphi_3(0)=0$, $I_3(0) = I_2^0 \cos(\delta_1^0)$, где $\delta_1^0 = 26.73^\circ$, $I_2^0 = \tilde{C}\omega_r$, ω_r - угловая скорость собственного вращения Сатурна. Результаты расчетов приведены на рис. 2.4.

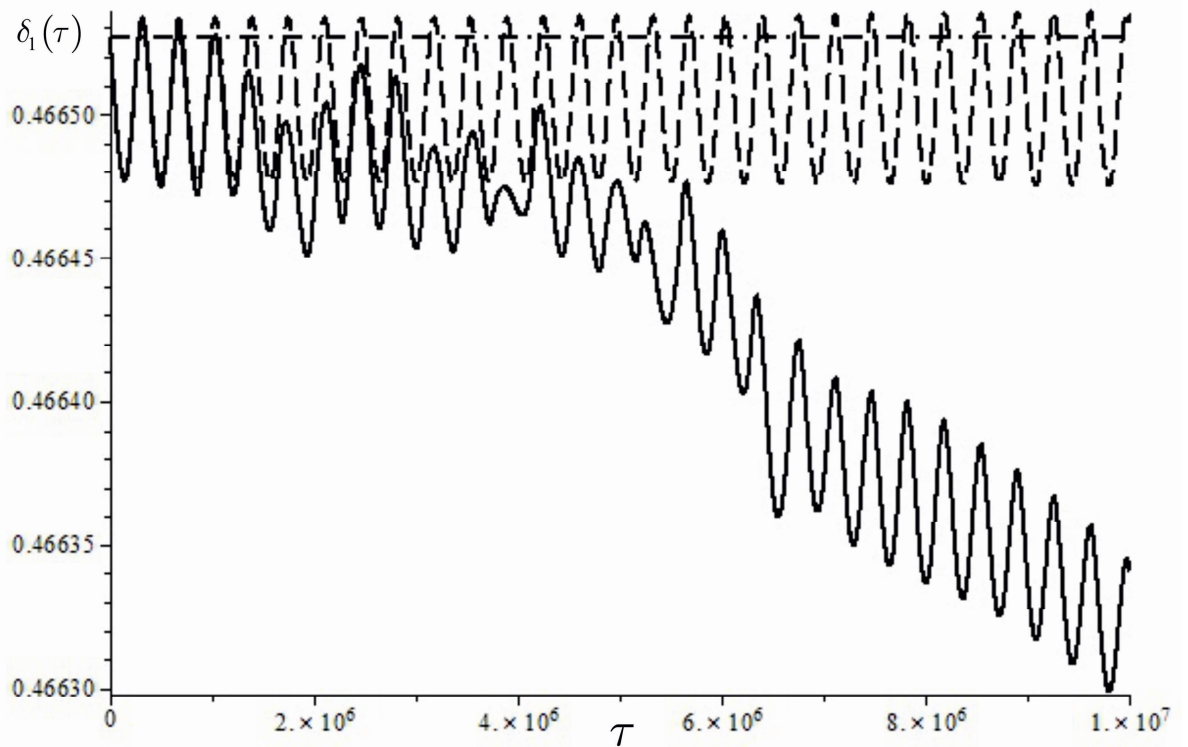


Рис. 2.4. График зависимости угла нутации оси Сатурна от времени.

Сплошной линии соответствует график, полученный в результате интегрирования усредненной системы (2.11), пунктирной – график, полученный по методу малого параметра, штрих-пунктирной линии – график, полученный при учете притяжения одного лишь Солнца. Из сравнения графиков видно, что формула (2.15) хорошо описывает изменение угла нутации на промежутке времени 6×10^6 лет, при этом минимальное значение этого угла равно 26.727° . Таким образом, влияние Юпитера ведет к уменьшению угла нутации на величину 0.003° с периодом, равным периоду невозмущенной прецессии. На больших промежутках времени наблюдаем уменьшение угла нутации (сплошная кривая). Поэтому можно допустить, что угол нутации в прошлом превосходил текущее его значение.

Период прецессии оси Сатурна, вычисленный по формуле (2.16) составил $T = 1.677 \times 10^6$ лет. Из этого следует, что притяжение Юпитера уменьшает период прецессии

на 3547 лет. Частота прецессии оси Сатурна, вычисленная по формуле (2.17), равна $\omega = 0 \square .7727 \text{ год}^{-1}$. Откуда следует, что притяжение Юпитера увеличивает частоту прецессии на $0 \square .0016 \text{ год}^{-1}$.

В заключение отметим, что модель Ward и Hamilton (2004), описывающая эволюцию угла нутации Сатурна, обладает существенным недостатком: не учитывается прямое воздействие (через гравитационные моменты) массивного Юпитера, принимаются во внимание только вековые изменения орбиты самого Сатурна, обусловленные Нептуном. Оценки малости возмущений от Солнца, Юпитера и вековых изменений долготы восходящего узла орбиты Сатурна, вызванные Нептуном, показывают, что гравитационные моменты со стороны Юпитера превосходят возмущения от эволюции орбиты Сатурна. Действительно, имеем:

$$\text{возмущения от Солнца: } \max |U_S| = \frac{3}{2} \mu_S \varepsilon_1^2 \frac{a_C^3}{\bar{r}_1^3} \varepsilon_3 \approx 1.616040958 \cdot 10^{(-9)}$$

$$\text{возмущения от Юпитера: } \max |U_J| = \frac{3}{2} \varepsilon_4 \varepsilon_2^2 \frac{a_J^3}{\bar{r}_2^3} \varepsilon_3 \approx 1.239363864 \cdot 10^{(-12)}$$

Здесь ε_j -- малые параметры задачи, $\bar{r}_1 \approx a_C$, $\bar{r}_2 = 10.2461 \text{ a.e.}$ -- средние значения полярных радиусов r_1 , r_2 , описывающих расстояния от Солнца до Сатурна и от Юпитера до Сатурна (\bar{r}_2 вычислялась как пространственное среднее от функции $r_2(\nu, \nu_1)$).

Получить оценки малости резонансных нептунианских возмущений в орбите Сатурна и, как следствие, возмущения в гравитационном потенциале U_S весьма затруднительно, если следовать оригинальным исследованиям [87]: статья содержит возмущения по углу наклона и долготе восходящего узла орбиты Сатурна, что явно недостаточно, чтобы описать полные возмущения в декартовых координатах центра масс Сатурна. Тем не менее, мы можем оценить нижнее значение порядка малости этих возмущений, учитывая, что они вызваны Нептуном. Эти возмущения сравнимы по величине (или имеют более высокий порядок малости) с малым параметром $\beta = m_{\text{Нептун}} / m_{\text{Солнце}} = 0.5 \times 10^{-4}$. Тогда возмущения в гравитационной силовой функции U_S от Солнца имеют вид

$$d|U_S| = \frac{3}{2} \mu_S \varepsilon_1^2 \frac{a_C^3}{\bar{r}_1^3} \varepsilon_3 \beta \approx 0.8 \cdot 10^{-13}$$

и, следовательно, на порядок меньше значений силовой функции U_J Юпитера.

Заметим также, что для объяснения эволюции угла нутации Сатурна на очень больших промежутках времени авторы статьи [88] исследуют спин-орбитальный резонанс

во вращении Сатурна, акцентируя внимание на прохождение системы через резонанс. Такое возможно, когда резонирующие частоты α , g эволюционируют со временем. Но эволюция этих частот неизвестна. Авторы статьи рассматривают эти частоты как некие явные функции времени (хотя частоты реальных механических систем – функции медленных переменных, как правило), и, исследуя возможные виды этих функций, делают выводы об эволюции угла нутации Сатурна. К примеру, для проведения расчетов рассматриваются функции вида $\alpha = -0.64g(1 + e^{-t/\tau})$, $g = \text{const}$, либо $g = -\alpha(0.89 + 0.23e^{-t/\tau})$ без должного обоснования возможности существования таких соотношений между частотами α , g .

ГЛАВА 3

О вращении Марса вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли.

В данной главе рассматриваются вращения Марса вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли. Предполагается, что Марс — осесимметричное твердое тело ($A=B$). Орбиты Марса, Земли и Юпитера считаются эллиптическими. Независимыми малыми параметрами задачи являются средние движения Земли и Юпитера.

Получена осредненная функция Гамильтона задачи и интегралы эволюционных уравнений. Построена качественная картина движений вектора кинетического момента Марса на небесной сфере единичного радиуса, экваториальная плоскость которой параллельна плоскости орбиты Юпитера.

Показано, что «классические» положения равновесия вектора кинетического момента Марса \mathbf{I}_2 , принадлежащие нормали к плоскости орбиты Марса, сохраняются под действием притяжения Земли и Юпитера. Кроме того, появляются два новых равновесия вектора \mathbf{I}_2 , принадлежащие нормали к плоскости орбиты Юпитера. Эти равновесия неустойчивы, через них проходят гомоклинические траектории.

Помимо этого, появляется пара неустойчивых равновесий, принадлежащих дуге большого круга, параллельного плоскости орбиты Марса. Через эти равновесия проходят четыре гетероклинические кривые. Между парами этих кривых заключены два устойчивых положения равновесия.

3.1 Уравнения вращательных движений Марса в переменных Депри-Андуайе.

Рассмотрим обобщённую ограниченную задачу четырех тел, три из которых — Солнце, Юпитер и Земля — представляют собой материальные точки с массами m_\odot , m_J , m_\oplus соответственно ($m_\odot > m_J > m_\oplus$), при этом Юпитер и Земля движутся относительно Солнца по эллиптическим кеплеровым орбитам:

$$r = \frac{a_J(1-e_J^2)}{1+e_J \cos \nu}, \quad r_\oplus = \frac{a_\oplus(1-e_\oplus^2)}{1+e_\oplus \cos \nu_2}$$

Здесь r, r_{\oplus} - расстояния между Солнцем и Юпитером, Солнцем и Землей, a_J, a_{\oplus} и e_J, e_{\oplus} - большие полуоси и эксцентриситеты орбит Юпитера и Земли, ν, ν_2 - истинные аномалии.

Четвертое тело – Марс, которое мы будем рассматривать как твердое телом с динамически - симметричным распределением массы ($A=B$). Считаем орбиту Марса кеплеровским эллипсом

$$r_1 = \frac{a_M(1 - e_M^2)}{1 + e_M \cos \nu_1},$$

где r_1 –расстояние между Солнцем и Марсом, a_M и e_M - большая полуось и эксцентриситет орбиты Марса, ν_1 – его истинная аномалия.

Пусть \oplus, M, J и \odot -- центры масс Земли, Марса, Юпитера и Солнца соответственно.

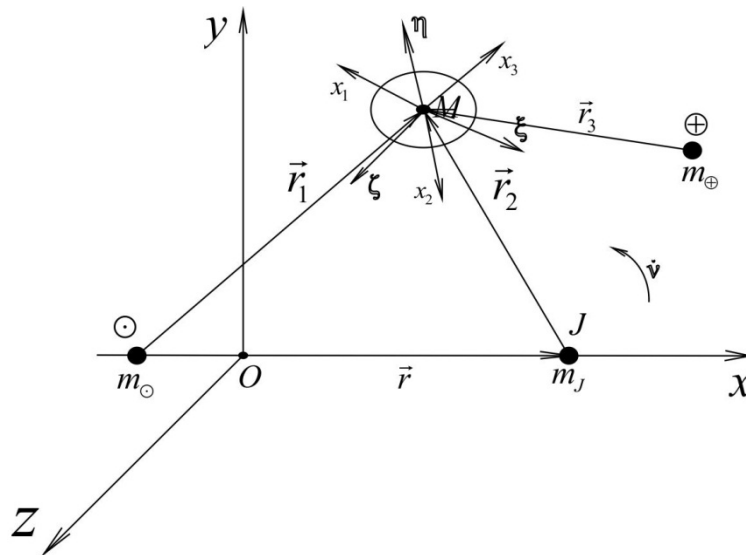


Рис. 3.1. К выводу уравнений движения вокруг центра масс Марса.

Введем (рис 3.1) барицентрическую систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тел \odot и J . Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты тела J относительно \odot . Ось Ox направим по прямой, соединяющей тела \odot и J в сторону тела J . Кратчайший поворот от оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела J относительно тела \odot . Ось Oz дополняет оси Ox и Oy до правой системы координат. С центром масс M свяжем поступательно движущуюся систему координат $M\xi\eta\zeta$, ось $M\xi$ которой коллинеарна Oz , ось $M\zeta$ параллельна линии апсид эллиптического движения тел \odot и J относительно общего центра масс, а $M\eta$ дополняет систему координат до правой. Введём систему координат $Mx_1x_2x_3$, жёстко связанную с телом, оси которой направлены по главным центральным осям инерции. Взаимное положение главных центральных осей инерции $Mx_1x_2x_3$ и кёниговой системы координат $M\xi\eta\zeta$ задаётся с помощью канонических

переменных Депри-Андуайе $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ [54,61] (Рис. 3.2), которые подробно описаны в разделе 1.1.

Отметим, что если использовать традиционные обозначения этих переменных $L; G; H; l; g; h$, будем иметь переменные Серрет-Андуайе [84].

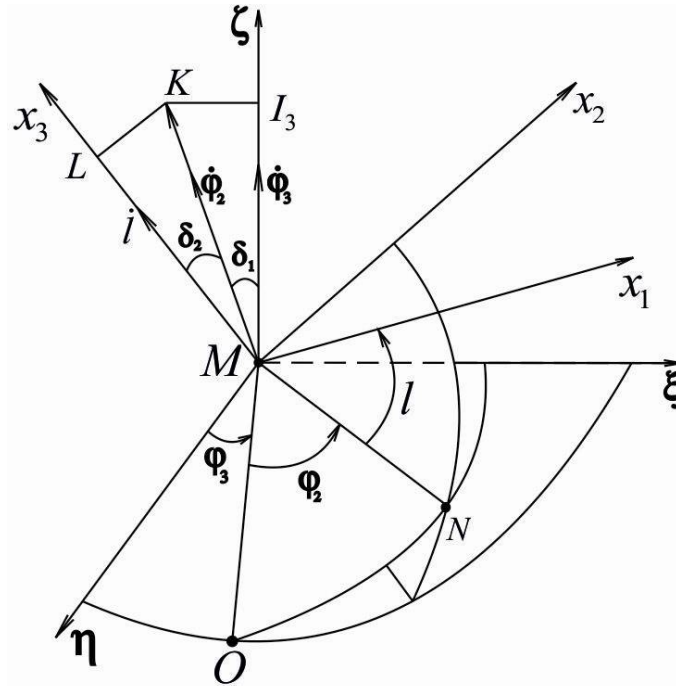


Рис. 3.2 Переменные Депри-Андуайе

На Рис. 3.2 K – вектор кинетического момента Марса относительно центра тяжести. Смысл угловых переменных l, φ_2, φ_3 ясен из рис.3.2, а соответствующие им импульсы как следует из Рис.2.2 таковы

$$L = K \cos \delta_2, \quad I_2 = K, \quad I_3 = K \cos \delta_1$$

Дифференциальные уравнения вращения имеют гамильтонов вид. Выражение для функции Гамильтона известно [4,8]:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C} - U,$$

$$U = -\frac{3}{2}(1-\mu)n_J^2 \frac{a_J^3}{r_1^3} (C-A)\gamma_{13}^2 - \frac{3}{2}\mu n_J^2 \frac{a_J^3}{r_2^3} (C-A)\gamma_{23}^2 - \frac{3}{2}\mu_{\oplus} n_{\oplus}^2 \frac{a_{\oplus}^3}{r_3^3} (C-A)\gamma_{33}^2, \quad (3.1)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{r_i} [(\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu)(x - x_i) + (\beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu)(y - y_i) + \gamma_j (z - z_i)].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mu = \frac{m_J}{m_S + m_J} = 0.0009535918308, \quad \mu_{\oplus} = \frac{m_{\oplus}}{m_S + m_{\oplus}} = 0.000003002655505.$$

f - гравитационная постоянная, $x_1 = -\mu r$, $x_2 = (1-\mu)r$ - координаты центров масс Солнца и Юпитера, $n_J = \sqrt{f(m_S + m_J)/a_J^3}$ - среднее движение Юпитера, $n_{\oplus} = \sqrt{f(m_S + m_{\oplus})/a_{\oplus}^3}$ - среднее движение Земли, $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$, γ_{ij} - направляющие косинусы радиуса-вектора r_i с главными центральными осями инерции Mx_j . Иначе $\gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Здесь $\mathbf{e}_i = \left(\frac{x-x_i}{r_i}, \frac{y-y_i}{r_i}, \frac{z-z_i}{r_i} \right)$, $\mathbf{e}_j = (\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu, \beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu, \gamma_j)$. Острые

\mathbf{e}_j главных центральных осей инерции Mx_j в барицентрической системе координат $Oxyz$ стоят в столбцах матрицы перехода от системы координат $Mx_1x_2x_3$ к $Oxyz$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos \nu + \beta_1 \sin \nu & \alpha_2 \cos \nu + \beta_2 \sin \nu & \alpha_3 \cos \nu + \beta_3 \sin \nu \\ \beta_1 \cos \nu - \alpha_1 \sin \nu & \beta_2 \cos \nu - \alpha_2 \sin \nu & \beta_3 \cos \nu - \alpha_3 \sin \nu \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A , C - экваториальный и аксиальный моменты инерции Марса, α_i , β_i , γ_i - элементы матрицы направляющих косинусов между кёниговой системой координат $M\xi\eta\zeta$ и главными центральными осями инерции $Mx_1x_2x_3$ соответственно, выражения для которых приведены, например, в [17].

Матрицу \mathbf{S} направляющих косинусов с элементами $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ легко получить, сделав пять последовательных поворотов на углы $\varphi_3, \delta_1, \varphi_2, \delta_2, l$ вокруг соответствующих осей. В векторно-матричной форме переход от системы координат $Mx_1x_2x_3$ к $M\xi\eta\zeta$ запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3 \mathbf{S}_4 \mathbf{S}_5$$

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 & 0 \\ \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_1 & -\sin \delta_1 \\ 0 & \sin \delta_1 & \cos \delta_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta_2 & -\sin \delta_2 \\ 0 & \sin \delta_2 & \cos \delta_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_5 = \begin{pmatrix} \cos l & -\sin l & 0 \\ \sin l & \cos l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Орбиту Марса M будем считать известной квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат $Oxyz$, частотный базис которой имеет вид $\boldsymbol{\omega}_1 = (n_J, n_M)$. Здесь n_J, n_M - средние движения Юпитера и Марса соответственно.

Орбиту Земли будем также считать известной квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат $Oxyz$ с частотным базисом $\omega_2 = (n_J, n_\oplus)$. Величины n_J, n_\oplus - средние движения Юпитера и Земли соответственно.

3.2 Орбита Земли и Марса в барицентрических координатах Солнца и Юпитера.

Для вычисления орбиты Марса в барицентрической системе координат $Oxyz$ введём правые системы координат.

Пусть $SXYZ$ - система координат с началом в центре масс Солнца, ось SZ направлена по нормали к плоскости эклиптики, ось SX направлена в точку весеннего равноденствия γ , ось SU дополняет систему координат до правой; $Sx'y'z'$ - система координат с началом в центре масс Солнца, ось Sz' направлена по нормали к плоскости орбиты Юпитера, ось Sx' направлена в точку восходящего узла орбиты Юпитера, ось Sy' дополняет систему координат до правой. Барицентрическая система координат $Oxyz$ была описана выше.

Координаты центра масс Марса в гелиоцентрической эклиптической системе координат $SXYZ$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} X_M &= r_1 (\cos(\omega_M + \nu_1) \cos(\Omega_M) - \sin(\omega_M + \nu_1) \sin(\Omega_M) \cos(i_M)), \\ Y_M &= r_1 (\cos(\omega_M + \nu_1) \sin(\Omega_M) + \sin(\omega_M + \nu_1) \cos(\Omega_M) \cos(i_M)), \\ Z_M &= r_1 (\sin(\omega_M + \nu_1) \sin(i_M)) \end{aligned}$$

Здесь ω_M, Ω_M, i_M - кеплеровские элементы орбиты Марса (см. таблицу 3.1). Для вычисления координат центра масс Марса в барицентрической системе координат $Oxyz$ выполним три последовательных поворота и параллельный перенос начала координат S в точку O - барицентр Солнца и Юпитера.

Первый поворот выполним вокруг оси SZ на угол Ω_J . В результате получим систему координат $SX_1Y_1Z_1$, где плоскость X_1Y_1 лежит в плоскости эклиптики, причём ось SX_1 направлена в точку восходящего узла орбиты Юпитера, ось SZ_1 направлена по нормали к плоскости эклиптики, ось SU_1 - дополняет систему координат до правой. Второй поворот выполним вокруг оси SX_1 на угол i_J . В результате получим систему координат $Sx'y'z'$, которая была описана выше. Третий поворот выполним вокруг оси Sz' на угол $u = \omega_J + \nu$. В результате получим вращающуюся систему координат $Sxyz$ с центром в Солнце. Перейдём от системы координат $Sxyz$ к системе координат $Oxyz$, сделав параллельный перенос начала координат на вектор $s = (\mu r, 0, 0)$.

В векторно-матричной форме переход от старых координат $SXYZ$ к новым $Oxyz$ запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} X_M \\ Y_M \\ Z_M \end{pmatrix} - \mathbf{s} \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{S}=\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3$. \mathbf{S}_1 – матрица поворота вокруг оси SZ на угол Ω_J , \mathbf{S}_2 – матрица поворота вокруг оси SX_1 на угол i_J , \mathbf{S}_3 – матрица поворота вокруг оси Sz' на угол $u=\omega_J + v$.

Матрицы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \Omega_J & -\sin \Omega_J & 0 \\ \sin \Omega_J & \cos \Omega_J & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_J & -\sin i_J \\ 0 & \sin i_J & \cos i_J \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Для вычисления орбиты Земли в барицентрической системе координат $Ox_{\oplus}y_{\oplus}z_{\oplus}$ поступим аналогичным образом. Подсчитаем координаты центра масс Земли в гелиоцентрической эклиптической системе координат $SXYZ$ по формулам

$$\begin{aligned} X_{\oplus} &= r_{\oplus} (\cos(\omega_{\oplus} + v_2) \cos(\Omega_{\oplus}) - \sin(\omega_{\oplus} + v_2) \sin(\Omega_{\oplus}) \cos(i_{\oplus})), \\ Y_{\oplus} &= r_{\oplus} (\cos(\omega_{\oplus} + v_2) \sin(\Omega_{\oplus}) + \sin(\omega_{\oplus} + v_2) \cos(\Omega_{\oplus}) \cos(i_{\oplus})), \\ Z_{\oplus} &= r_{\oplus} (\sin(\omega_{\oplus} + v_2) \sin(i_{\oplus})) \end{aligned}$$

где r_{\oplus} – расстояние между Солнцем и Землей, $\omega_{\oplus}, \Omega_{\oplus}, i_{\oplus}$ – кеплеровские элементы орбиты Земли (см. таблицу 3.1). Тогда координаты центра масс Земли в барицентрических осях запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} X_{\oplus} \\ Y_{\oplus} \\ Z_{\oplus} \end{pmatrix} - \mathbf{s}.$$

Средние кеплеровские элементы орбит Юпитера, Марса и Земли, рассчитанные на эпоху J2000, представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Кеплеровские элементы орбит Юпитера, Марса и Земли.

Элемент	Юпитер	Марс	Земля
Эксцентриситет	$e_J=0.04839266$	$e_M=0.09341233$	$e_{\oplus} = 0.01671022$
Наклонение орбиты	$i_J=1.30530^\circ$	$i_M= 1.85061^\circ$	$i_{\oplus} = 0^\circ$
Долгота восходящего узла	$\Omega_J=100.55615^\circ$	$\Omega_M=49.57854^\circ$	$\Omega_{\oplus}=348.73936^\circ$
Аргумент перигелия	$\omega_J=275.066^\circ$	$\omega_M=286.4623^\circ$	$\omega_{\oplus} = 114.20783^\circ$
Большая полуось	$a_J=5.20336301$ а.е.	$a_M=1.52366231$ а.е.	$a_{\oplus} = 1.00000011$ а.е.
Среднее движение	$n_J=1.6784899 \cdot 10^{-8}$ рад/с	$n_M=1.05857597 \cdot 10^{-7}$ рад/с	$n_{\oplus} = 1.990986576 \cdot 10^{-7}$ рад/с

Используя полученные формулы для координат центров масс Земли и Марса, значения средних кеплеровских элементов орбиты, получим координаты x, y, z как функций ν, ν_1 и координаты x_3, y_3, z_3 -- как функций ν, ν_2 :

$$x = \frac{1}{1+0.09341233\cos\nu_1} [1.164389636 \cos\nu_1 \cos\nu + 0.9619543252 \cos\nu \sin\nu_1 - 0.9618034592 \sin\nu \cos\nu_1 + 1.163934041 \sin\nu \sin\nu_1] - \frac{0.004949210633}{1+0.04839266\cos\nu},$$

$$y = \frac{1}{1+0.09341233\cos\nu_1} [-0.9618034592 \cos\nu \cos\nu_1 + 1.163934041 \cos\nu \sin\nu_1 - 1.164389636 \sin\nu \cos\nu_1 - 0.9619543252 \sin\nu \sin\nu_1],$$

$$z = \frac{1}{1+0.09341233\cos\nu_1} [-0.01842487193 \cos\nu_1 + 0.03331703134 \sin\nu_1],$$

$$x_3 = \frac{1}{1+0.01671022\cos\nu_2} [0.0466676364 \cos\nu_2 \cos\nu - 0.9983733582 \cos\nu \sin\nu_2 + 0.9986305951 \sin\nu \cos\nu_2 + 0.0466339854 \sin\nu \sin\nu_2] - \frac{0.004949210633}{1+0.04839266\cos\nu},$$

$$y_3 = \frac{1}{1+0.01671022\cos\nu_2} [0.9986305951 \cos\nu \cos\nu_2 + 0.0466339854 \cos\nu \sin\nu_2 - 0.0466676364 \sin\nu \cos\nu_2 + 0.9983733582 \sin\nu \sin\nu_2],$$

$$z_3 = \frac{1}{1+0.01671022\cos\nu_2} [-0.000949299537 \cos\nu_2 - 0.02275398410 \sin\nu_2],$$

Для того, чтобы записать координаты центра масс Марса и Земли в виде временных рядов, воспользуемся разложением тригонометрических функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии [1]:

$$\cos\nu = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \quad \sin\nu = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM \quad (3.3)$$

Подставляя ряды (3.3) в формулы для x, y, z и x_3, y_3, z_3 , раскладывая полученные выражения в ряды по e_J, e_M, e_{\oplus} получим, с точностью до членов пятого порядка малости, координаты центра масс Марса в осях $Oxyz$:

$$\begin{aligned}
x(M, M_1) &= \frac{1.164389636 \cos M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{0.9619543252 \cos M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \\
&- \frac{0.9618034592 \sin M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{1.163934041 \sin M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \\
&- \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266000 \cos M} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_M^n x_{mn}(M, M_1), \\
y(M, M_1) &= -\frac{0.9618034592 \cos M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{1.163934041 \cos M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \\
&- \frac{1.164389636 \sin M \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} - \frac{0.9619543252 \sin M \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_M^n y_{mn}(M, M_1), \\
z(M, M_1) &= -\frac{0.01842487193 \cos M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \frac{0.03331703134 \sin M_1}{1 + 0.09341233 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_M^n z_{mn}(M, M_1), \\
x_3(M, M_2) &= \frac{0.0466676364 \cos M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} - \frac{0.9983733582 \cos M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \\
&+ \frac{0.9986305951 \sin M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.0466339854 \sin M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \\
&- \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266000 \cos M} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_{\oplus}^n x_{mn}(M, M_2), \\
y_3(M, M_2) &= \frac{0.9986305951 \cos M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.0466339854 \cos M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \\
&- \frac{0.0466676364 \sin M \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.9983733582 \sin M \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_{\oplus}^n y_{mn}(M, M_2) \\
z_3(M, M_2) &= -\frac{0.01842487193 \cos M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \frac{0.03331703134 \sin M_2}{1 + 0.01671022 \cos M_2} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_{\oplus}^n z_{mn}(M, M_2),
\end{aligned}$$

Здесь $M = n_J t$, $M_1 = n_M t$, $M_2 = n_{\oplus} t$ - средние аномалии Юпитера, Марса и Земли.

Функции x_{nm}, y_{nm}, z_{nm} имеют громоздкий вид, поэтому их опускаем.

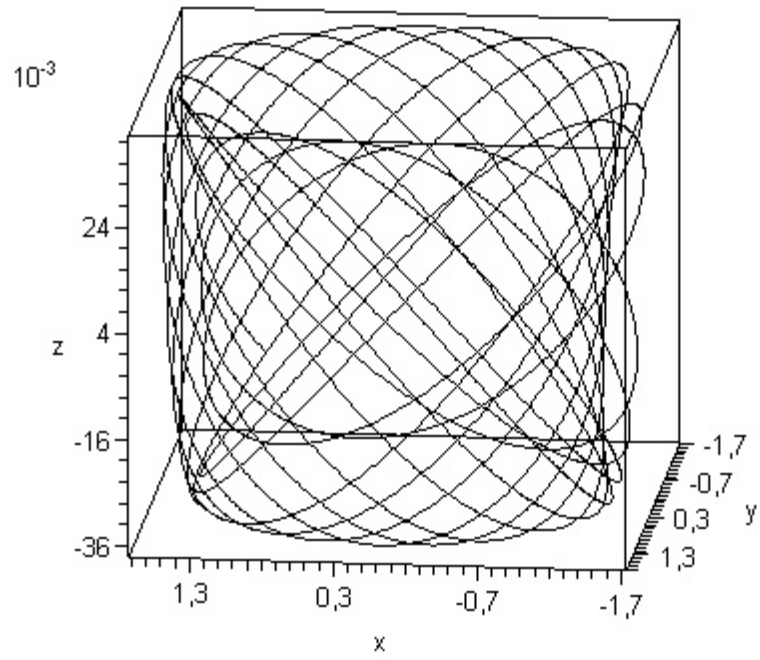


Рис. 3.3. График орбиты Марса в барицентрической системе координат $Oxyz$.

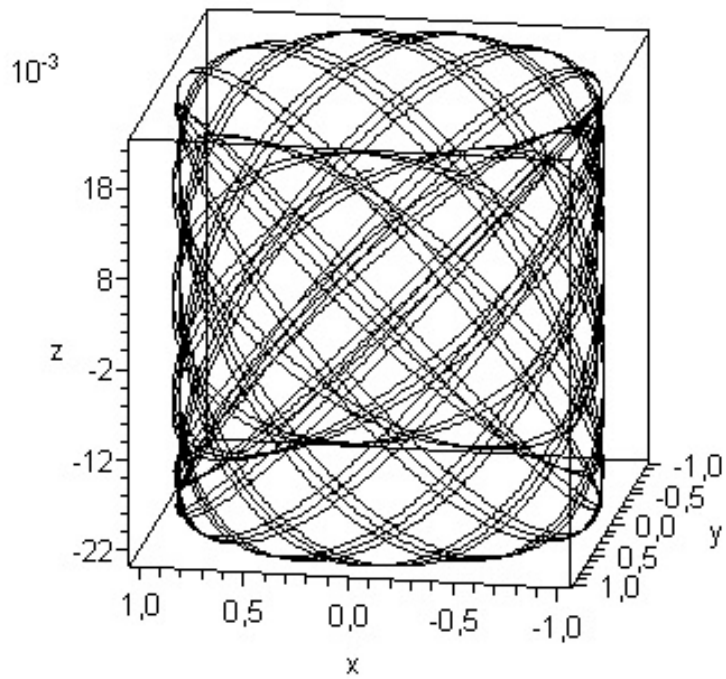


Рис. 3.4 График орбиты Земли в барицентрической системе координат $Oxyz$.

На рисунках 3.3, 3.4 изображены орбиты Марса и Земли в барицентрических осях $Oxyz$ на интервале времени порядка 31,7 земных лет. Величины x, y, z и x_3, y_3, z_3 указаны в астрономических единицах.

На Рис.3.5 представлены орбиты Марса, Земли (плоскость эклиптики) и Юпитера на единичной сфере в инерциальной системе координат. Здесь Υ и Ω - точки весеннего и осеннего равноденствий соответственно, β - наклонение орбиты Марса к орбите Юпитера.

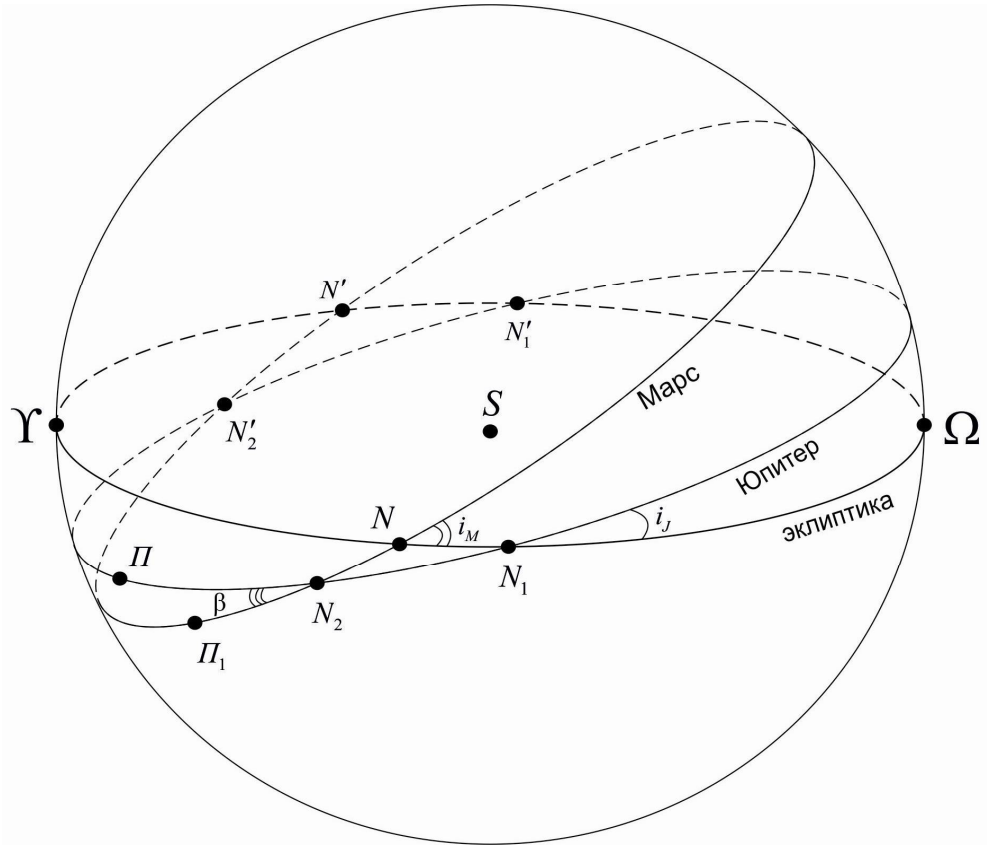


Рис. 3.5. Орбиты Марса и Юпитера на небесной сфере.

Из таблицы 3.1 непосредственно следует, что $\angle N=100.55615^\circ$, $\angle N_I=49.57854^\circ$, $\angle NII=275.066^\circ$, $\angle N_I\Pi_I=286.4623^\circ$, $i_J=1.30530^\circ$, $i_M=1.85061^\circ$. Из сферического треугольника N_1N_2N , изображенного на рисунке 2.5, легко получить

$$N_1N = \Omega_J - \Omega_M = 50.97761^\circ,$$

$$\beta = \arccos(-\cos(180 - i_M)\cos i_J + \sin(180 - i_M)\sin i_J \cos(\Omega_J - \Omega_M)) = 1.444426100^\circ,$$

$$N_1N_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(\Omega_J - \Omega_M)\sin(180 - i_M)}{\sin \beta}\right) = 84.44437506^\circ,$$

$$NN_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(\Omega_J - \Omega_M)\sin i_J}{\sin \beta}\right) = 44.59437585^\circ$$

3.3 Возмущённое вращение Марса.

Для того, чтобы исследовать вращение Марса методами теории возмущений, введём малые параметры задачи. Учитывая, что угловая скорость вращения Марса $\Omega^* \approx 7.0882711 \cdot 10^{-5}$ рад/с относительно центра масс существенно превосходит среднее движение Юпитера $n_J \approx 1.6784899 \cdot 10^{-8}$ рад/с и среднее движение Земли $n_{\oplus} \approx 1.990986576 \cdot 10^{-7}$ рад/с, за единицу времени примем характерное значение $T^* = \frac{1}{\Omega^*}$. Тогда

параметры $\varepsilon_1 = n'_J$ ($n'_J = n_J / \Omega^* \sim 10^{-4}$), $\varepsilon_2 = n'_{\oplus}$ ($n'_{\oplus} = n_{\oplus} / \Omega^* \sim 10^{-3}$) -- малые, при этом средние аномалии движений Юпитера, Марса и Земли будут вычисляться по формулам

$$M = n'_J t, M_1 = n'_M t \left(n'_M = \frac{n_M}{\Omega^*} \sim 10^{-2} \right), M_2 = n'_{\oplus} t$$

Функция Гамильтона (2.1) примет следующий вид:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A\Omega^*} + \frac{L^2}{2C\Omega^*} + \varepsilon_1^2 \Omega^* H_{11} + \varepsilon_2^2 \Omega^* H_{12}$$

где

$$H_{11} = \frac{3}{2}(1-\mu) \frac{a_J^3}{r_1^3} (C-A) \gamma_{13}^2 + \frac{3}{2} \mu \frac{a_J^3}{r_2^3} (C-A) \gamma_{23}^2,$$

$$H_{12} = \frac{3}{2} \mu_{\oplus} \frac{a_{\oplus}^3}{r_3^3} (C-A) \gamma_{33}^2.$$

Отметим, что для случая динамически-симметричного Марса ($A=B$) переменные Депри-Андуайе являются переменными действие-угол в невозмущенной задаче:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} = \frac{I_2}{\Omega^* A}, \dot{l} = \frac{\partial H_0}{\partial L} = \frac{L}{\Omega^*} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right)$$

$$L = const, I_2 = const, I_3 = const, \varphi_3 = const \quad (3.4)$$

Заметим, что частота собственного вращения ($\Omega_1 = \dot{l}$), частота прецессии ($\Omega_2 = \dot{\varphi}_2$) относительных движений Марса вокруг вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 , частоты n_M, n_J, n_{\oplus} орбитального движения Марса, Юпитера и Земли в барицентрических осях не удовлетворяют резонансным соотношениям

$$k_0 n_J + k_1 n_M + k_2 n_{\oplus} + k_3 \Omega_1 + k_4 \Omega_2 = 0$$

ни при одном наборе целых чисел k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 , если $k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \neq 0$.

Перейдём к новому времени $M = \varepsilon_1 t$ и запишем «расширенную» функцию Гамильтона

$$H^* = P_M + \frac{n'_M}{\varepsilon_1} P_{M_1} + \frac{n'_{\oplus}}{\varepsilon_1} P_{M_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \varepsilon_1 H_{11} + \bar{\varepsilon}_2 H_{12} \quad (\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2^2 \varepsilon_1^{-1} \sim 10^{-2}) \quad (3.5)$$

Здесь, $M, P_M, M_1, P_{M_1}, M_2, P_{M_2}$ новые обобщённые координаты и обобщённые импульсы соответственно. Легко видеть, что величины $M, M_1, M_2, l, \varphi_2$ являются быстрыми переменными задачи, частоты изменения которых в невозмущенном движении есть 1, $n'_M / \varepsilon_1, n'_{\oplus} / \varepsilon_1, \Omega_1 / \varepsilon_1, \Omega_2 / \varepsilon_1$.

Исследуем уравнения возмущённого движения при помощи метода усреднения. Для этого усредним функцию H^* по быстрым переменным $M, M_1, M_2, l, \varphi_2$, рассматривая $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_2$ как независимые малые параметры [24,23]

$$\bar{H}^* = \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \varepsilon_1 \bar{H}_1, \quad \bar{H}_1 = \frac{1}{(2\pi)^5} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(H_{11} + \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1} H_{12} \right) dld\varphi_2 dM dM_1 dM_2$$

Вычисления показывают, что функция \bar{H}_1 имеет следующий вид:

$$\bar{H}_1 = -a_J^3 \Omega^* F(I_2, L) \left[\frac{D_1}{2} - \frac{3}{2} G(I_2, I_3, \varphi_3) \right], \quad (3.6)$$

где

$$F(I_2, L) = (C - A)(2 - 3 \sin^2 \delta_2),$$

$$G(I_2, I_3, \varphi_3) = (D_2 \sin^2 \varphi_3 + D_3 \cos^2 \varphi_3 + D_4 \sin 2\varphi_3 + D_5) \sin^2 \delta_1 + (D_6 \sin \varphi_3 + D_7 \cos \varphi_3) \cos \delta_1 \sin \delta_1,$$

$$\cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{I_2}$$

Коэффициенты D_i вычисляются по формулам:

$$D_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i dM dM_1 dM_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e_J^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e_J \cos \nu)^2} \frac{(1-e_M^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e_M \cos \nu_1)^2} \frac{(1-e_{\oplus}^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e_{\oplus} \cos \nu_2)^2} Q_i d\nu d\nu_1 d\nu_2$$

Здесь введены следующие обозначения ($\mu_1 = 1 - \mu, \mu_2 = \mu, \mu_3 = \mu_{\oplus}$)

$$Q_1 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(x-x_i)^2 + y^2 - 2z^2}{2r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - 2(z-z_3)^2}{2r_3^5},$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x-x_i) \cos \nu - y \sin \nu)^2}{2r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((x-x_3) \cos \nu - (y-y_3) \sin \nu)^2}{2r_3^5},$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x-x_i) \sin \nu + y \cos \nu)^2}{2r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_{\otimes}^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((x-x_3) \sin \nu + (y-y_3) \cos \nu)^2}{2r_3^5}$$

$$\begin{aligned}
Q_4 &= \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(y \sin \nu - (x - x_i) \cos \nu)((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{2r_i^5} + \\
&+ \frac{\varepsilon_2^2 a_\infty^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((y - y_3) \sin \nu - (x - x_3) \cos \nu)((x - x_3) \sin \nu + (y - y_3) \cos \nu)}{2r_3^5}, \\
Q_5 &= -\sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z^2}{2r_i^5} - \frac{\varepsilon_2^2 a_\infty^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z - z_3)^2}{2r_3^5}, \\
Q_6 &= \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x - x_i) \cos \nu - y \sin \nu)}{r_i^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_\infty^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z - z_3)((x - x_3) \cos \nu - (y - y_3) \sin \nu)}{r_3^5} \\
Q_7 &= -\sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x - x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{r_i^5} - \frac{\varepsilon_2^2 a_\infty^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z - z_3)((x - x_3) \sin \nu + (y - y_3) \cos \nu)}{r_3^5}.
\end{aligned}$$

В силу определения малых параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и третьего закона Кеплера имеем

$$\frac{\varepsilon_2^2 a_\infty^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} = 1$$

Усредненные уравнения вращений допускают следующие интегралы в инволюции:

$$L = \text{const}, I_2 = \text{const}, G = \text{const}, \bar{H}^* = \text{const}$$

Интеграл $G = \text{const}$ описывает возмущённое движение вектора кинетического момента Марса. Он не зависит от моментов инерции A, C , поэтому геометрия массы планеты не влияет на движение вектора \mathbf{I}_2 .

Таким образом, в рассматриваемом приближении вращение Марса складывается из регулярной прецессии вокруг вектора \mathbf{I}_2 и движения самого вектора \mathbf{I}_2 относительно осей $M\xi\eta\zeta$.

Вычисления показывают, что при $m_s = 1.9891 \cdot 10^{30}$ кг, $m_j = 1.8986 \cdot 10^{27}$ кг, $m_\oplus = 5.9726 \cdot 10^{24}$ кг, $\mu_1 = 1 - \mu \approx 0.9990$, $\mu_2 = \mu \approx 9.5359 \cdot 10^{-4}$, $\mu_3 = \mu_\oplus \approx 0.0027 \cdot 10^{-6}$, $D_1 = 0.1429559651$, $D_2 = 0.07154463109$, $D_3 = 0.07150226249$, $D_4 = 0.000008246177674$, $D_5 = -0.4546425415 \cdot 10^{-4}$, $D_6 = 0.0006645690058$, $D_7 = -0.3543987113 \cdot 10^{-2}$.

Приведем формулы для вековой частоты прецессии вектора кинетического момента Сатурна \mathbf{I}_2 и угла нутации δ_1 . В возмущенном движении медленно эволюционируют канонически сопряженные переменные I_3, φ_3 :

$$\begin{aligned}
\dot{\varphi}_3 &= \varepsilon_1 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_3} = \frac{3}{2} \varepsilon_1 \Omega^* a_J^3 F(I_2, L) \frac{\partial G(I_2, I_3, \varphi_3)}{\partial I_3}, \\
\dot{I}_3 &= -\varepsilon_1 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \varphi_3} = -\frac{3}{2} \varepsilon_1 \Omega^* a_J^3 F(I_2, L) \frac{\partial G(I_2, I_3, \varphi_3)}{\partial \varphi_3}
\end{aligned}$$

Причем угол нутации зависит от медленной переменной I_3 следующим образом

$$\delta_1 = \arccos\left(\frac{I_3}{I_2}\right)$$

3.4 След конца вектора кинетического момента Марса на единичной сфере.

Рассмотрим интеграл

$$G=g, \quad (3.7)$$

описывающий поведение вектора кинетического момента Марса в кёниговой системе координат $M\zeta\eta\zeta$. Полный анализ интеграла (3.7) для произвольных значений параметров D_j дан в работах [34,31]. Результаты расчетов либрационных зон вращения Марса в окрестности полюсов представлены на рис. 3.6, 3.7.

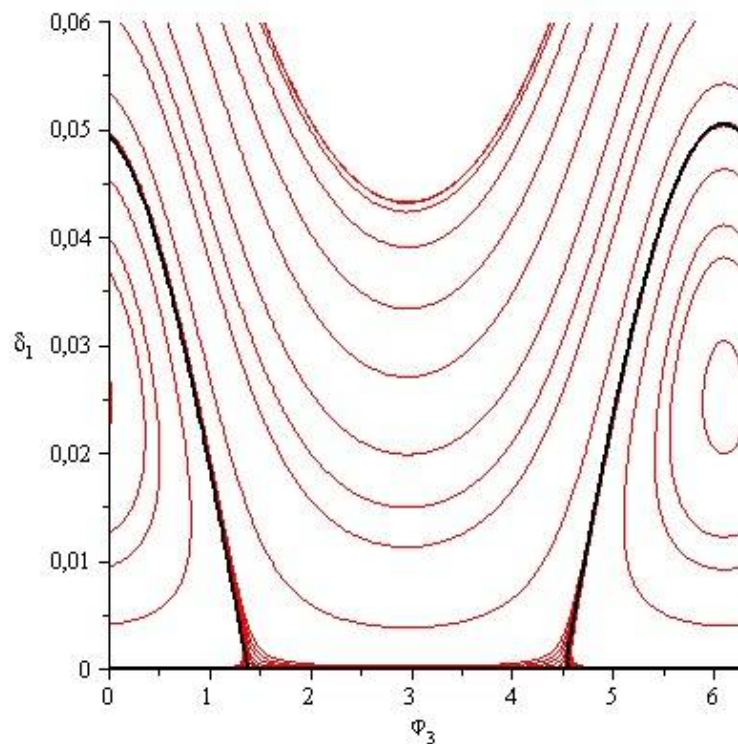


Рис. 3.6. Колебания конца вектора кинетического момента Марса в окрестности северного полюса единичной сферы.

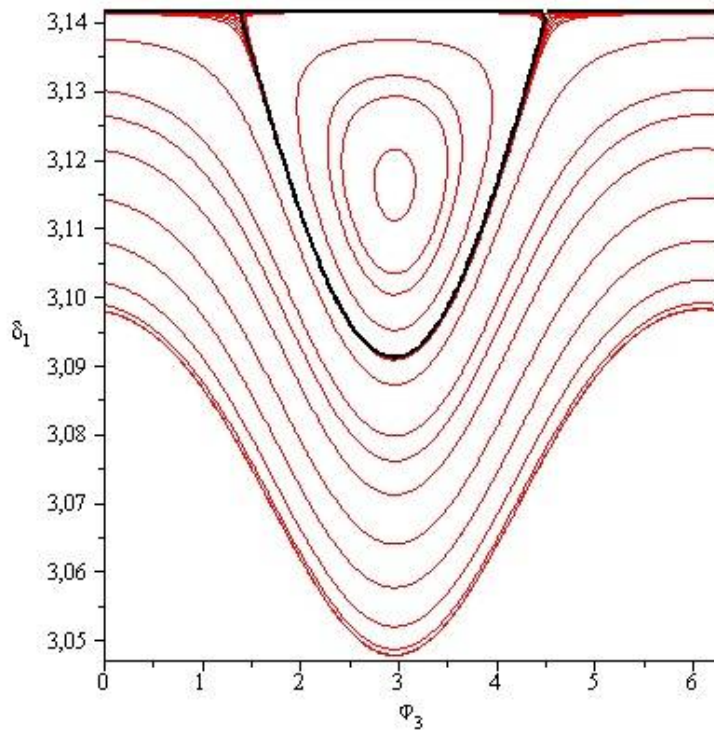


Рис. 3.7. Колебания конца вектора кинетического момента Марса в окрестности южного полюса единичной сферы.

Положения равновесия конца вектора \mathbf{I}_2 находятся численно из следующих уравнений:

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_3} \equiv [(D_2 - D_3) \sin 2\varphi_3 + 2D_4 \cos 2\varphi_3] \sin^2 \delta_1 + \frac{1}{2}(D_6 \cos \varphi_3 - D_7 \sin \varphi_3) \sin 2\delta_1 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \delta_1} \equiv (D_2 \sin^2 \varphi_3 + D_3 \cos^2 \varphi_3 + D_4 \sin 2\varphi_3 + D_5) \sin 2\delta_1 + (D_6 \sin \varphi_3 + D_7 \cos \varphi_3) \cos 2\delta_1 = 0$$
(3.8)

Здесь δ_1 -- угол между вектором кинетического момента и осью $M\zeta$.

Число стационарных точек равно восьми, при этом четыре точки устойчивы, остальные неустойчивы. Между положениями равновесия 7 и 8 заключены зоны колебаний в окрестности плоскости большого круга, параллельного плоскости орбиты Марса. Эти зоны изображены на рисунке 3.8

Качественная картина траекторий вектора \mathbf{I}_2 представлена на рис 3.8. Сплошными линиями изображены видимые кривые, расположенные на внешней стороне сферы, а пунктирными линиями изображены кривые, расположенные на оборотной стороне.

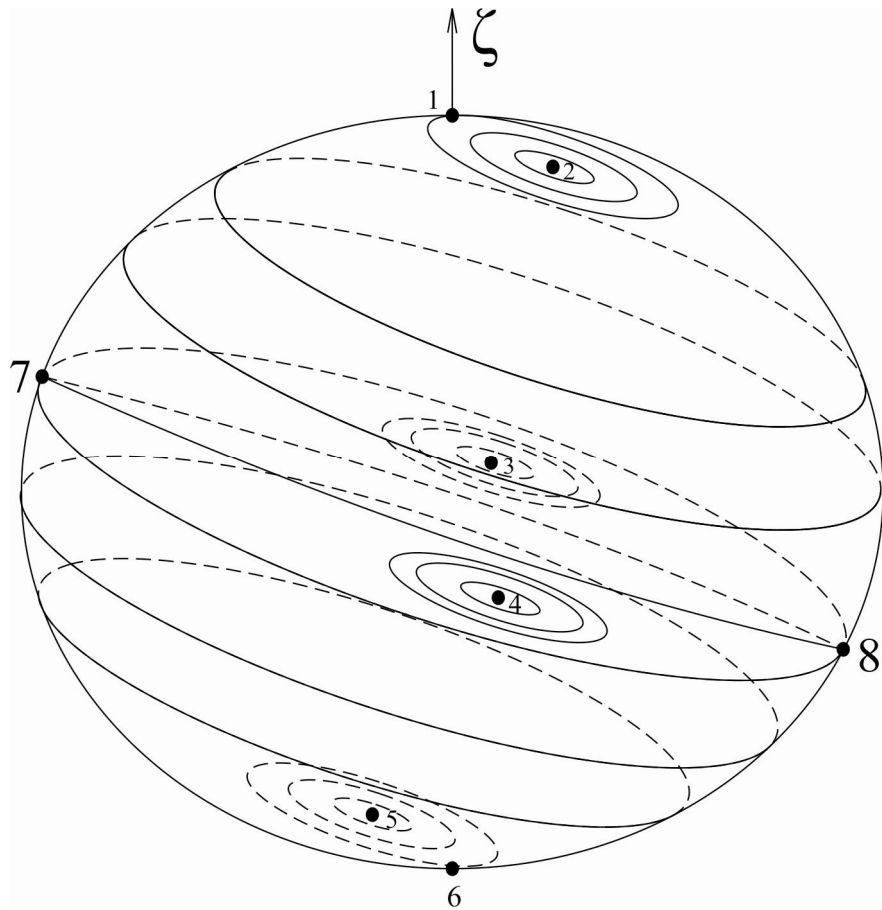


Рис.3.8 Траектории конца вектора кинетического момента Марса на единичной сфере.

Приведённых сведений достаточно, чтобы сделать выводы о влиянии Солнца, Юпитера и Земли на вращение Марса. Прежде всего отметим, что стационарные точки (2) и (5) имеют следующие координаты: $\{\varphi_3^* = 349.37922056^\circ, \delta_1^* = 1.44439823^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 169.37922055^\circ, \delta_1^* = 178.555602^\circ\}$ соответственно. Отсюда следует, что эти точки принадлежат нормали к плоскости орбиты Марса, так как угол $\delta_1^* = 1.44439823^\circ$ совпадает с наклоном $\beta = 1.444426100^\circ$ орбиты Марса к орбите Юпитера.

Отсюда следует, что стационарные точки (7) и (8), имеющие координаты $\{\varphi_3^* = 132.08670022^\circ, \delta_1^* = 88.85081593^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 312.08670023^\circ, \delta_1^* = 91.14918407^\circ\}$, принадлежат плоскости, параллельной плоскости орбиты Марса. «Окружностям» единичной сферы, плоскость которых параллельна орбите Марса, отвечает прецессия вектора кинетического момента вокруг нормали к плоскости этой орбиты. Не останавливаясь подробно на анализе прецессии, отметим только, что притяжение Солнца вызывает регулярную прецессию, в то время как Юпитер и Земля «портят» прецессию, изменяя угол нутации и угловую скорость прецессии на величины порядка ϵ_1 . Уточнение прецессионного движения можно провести на основе работы [37]. Подробное

исследование прецессии Марса с учетом возмущающих факторов разной природы проведено в работе [56].

Более существенные эффекты от притяжения Юпитера и Земли проявляют себя в том случае, когда движения вектора кинетического момента наблюдаются вблизи южного и северного полюсов единичной сферы, а также вблизи плоскости большого круга, параллельного плоскости орбиты Марса. К примеру, появляются новые положения равновесия, отвечающие значениям $\delta_1=0, \delta_1=\pi$, что непосредственно следует из интеграла (8) при $g=0$. Неустойчивым стационарным точкам $\delta_1=0, \delta_1=\pi$ отвечают гомоклинические траектории, вдоль которых движение имеет асимптотический характер. Либрациям в окрестности этих траекторий отвечают движения I_2 со сколь угодно большим периодом.

В окрестности плоскости большого круга, параллельного плоскости орбиты Марса, вектор I_2 совершает колебания вблизи стационарных точек (3), (4) с координатами $\{\varphi_3^* = 222.10425195^\circ, \delta_1^* = 89.12509615^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 42.10425194^\circ, \delta_1^* = 90.87490385^\circ\}$, соответственно. Появление стационарных точек и либраций в их окрестности – результат разрушения структурно неустойчивого континуума равновесий, существующего во вращениях планеты под действием притяжения Солнца и заполняющего собой экваториальную окружность. Зона колебаний ограничена двумя гетероклиническими кривыми, соединяющими равновесия (7) и (8) (рис. 2.8) и отвечающими константе $g=0.07150070095$

В заключении отметим, что реальному вращению Марса соответствует псевдо-регулярная прецессия с углом нутации $\theta^* = 25.19^\circ$, отсчитанным от нормали к плоскости орбиты Марса. Для уточнения модели вращения Марса необходимо учесть притяжение ближайшего спутника планеты -- Фобоса в рамках модели движения двух притягивающих тел в поле притягивающего центра [20,22].

Точность приближения метода усреднения есть величина первого порядка малости по $\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_2$ на промежутке времени порядка $1/\|(\varepsilon_1, \bar{\varepsilon}_2)\|$ [24,23].

Глава 4

О вращении Нептуна вокруг центра масс под действием гравитационных моментов Тритона, Солнца и Юпитера

В главе 4 рассматриваются вращения Нептуна вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Тритона - массивного спутника Нептуна. Предполагается, что Нептун – динамически-симметричное твёрдое тело ($A=B$). Орбиты Нептуна и Юпитера считаются эллиптическими с эксцентриситетами e_N, e_J соответственно, орбита Тритона – окружность в относительной системе координат, связанной с Нептуном. Малыми параметрами задачи являются среднее движение Юпитера n_J и среднее движение Тритона n_T .

Получена осредненная функция Гамильтона для произвольных значений e_N, e_J , когда малыми параметрами являются среднее движение Юпитера $\varepsilon_1 = n_J$ и среднее движение Тритона $\varepsilon_2 = n_T$. Получены интегралы эволюционных уравнений, построена качественная картина движений вектора кинетического момента Нептуна \mathbf{I}_2 на небесной сфере единичного радиуса, экваториальная плоскость которой параллельна плоскости орбиты Юпитера.

Показано, что под действием притяжения Тритона, положения равновесия вектора \mathbf{I}_2 принадлежат нормали к плоскости орбиты Тритона, в отличие от классического случая под действием притяжения Солнца, когда стационарные точки вектора \mathbf{I}_2 принадлежат нормали к плоскости непунианской орбиты. Эти положения равновесия являются устойчивыми.

Под действием притяжения Юпитера и Тритона появляются новые точки покоя вектора \mathbf{I}_2 , принадлежащие нормали к плоскости орбиты Юпитера. Эти точки покоя неустойчивы. Через них проходят гомоклинические траектории, движение вдоль которых имеет асимптотический характер.

Кроме того в окрестности экватора единичной сферы существуют два неустойчивых положения равновесия вектора \mathbf{I}_2 , расположенных на дуге большого круга, параллельной плоскости орбиты Тритона. Через эти равновесия проходят две гетероклинические кривые, стремящиеся к этим положениям равновесия при $t \rightarrow \pm\infty$. Между этими кривыми заключены два устойчивых положения равновесия. Данный эффект обусловлен притяжением Юпитера и Тритона.

4.1 Уравнения вращательных движений Нептуна в переменных Депри-Андуайе.

Рассмотрим обобщённую ограниченную задачу четырёх тел, два из которых - Солнце и Юпитер - представляют собой материальные точки с массами m_s и m_j ($m_s > m_j$), движущиеся друг относительно друга по эллиптической кеплеровой орбите

$$r = \frac{a_j(1-e_j^2)}{1+e_j \cos \nu}.$$

Здесь r - расстояние между Солнцем и Юпитером, a_j и e_j - большая полуось и эксцентриситет орбиты Юпитера, ν - истинная аномалия. Третьим телом является Нептун с динамически - симметричным распределением массы. Четвертым телом является массивный спутник Нептуна - Тритон, представляющий собой материальную точку с массой m_T и движущийся относительно Нептуна по круговой орбите радиуса a_T . Считаем орбиту Нептуна эллиптической:

$$r_1 = \frac{a_N(1-e_N^2)}{1+e_N \cos \nu_1}$$

где r_1 - расстояние между Солнцем и Нептуном, a_N и e_N - большая полуось и эксцентриситет орбиты Нептуна, ν_1 - его истинная аномалия.

Пусть N, J, T и S -- центры масс Нептуна, Юпитера, Тритона и Солнца соответственно.

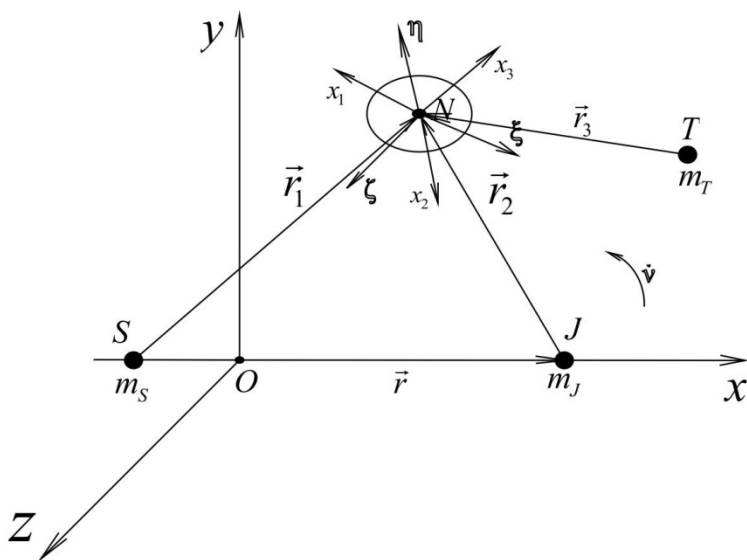


Рис. 4.1. Вывод уравнений движения вокруг центра масс Нептуна.

Введем (рис.4.1) барицентрическую систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс тел S и J . Плоскость Oxy совместим с плоскостью орбиты тела J относительно S . Ось Ox направим по прямой, соединяющей тела S и J в сторону тела J . Кратчайший поворот от

оси Ox к оси Oy совпадает с направлением вращения тела J относительно тела S . Ось Oz дополняет оси Ox и Oy до правой системы координат. С центром масс N свяжем поступательно движущуюся систему координат $N\zeta\eta\zeta$, ось $N\zeta$ которой коллинеарна Oz , ось $N\zeta$ параллельна линии апсид эллиптического движения тел S и J относительно общего центра масс, а $N\eta$ дополняет систему координат до правой. Введём систему координат $Nx_1x_2x_3$, жёстко связанную с телом, оси которой направлены по главным центральным осям инерции. Взаимное положение главных центральных осей инерции $Nx_1x_2x_3$ и кёниговой системы координат $N\zeta\eta\zeta$ задаётся с помощью канонических переменных Депри-Андруайе $L, I_2, I_3, l, \varphi_2, \varphi_3$ [54,61] (Рис.4.2), которые подробно описаны в разделе 1.1 Отметим, что если использовать традиционные обозначения этих переменных $L; G; H; l; g; h$, будем иметь переменные Серрет-Андруайе [84].

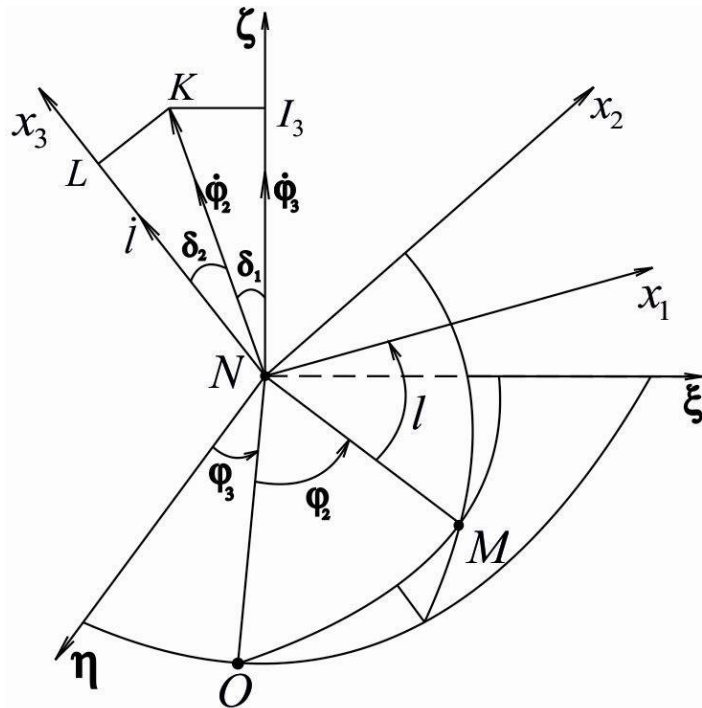


Рис. 4.2 Переменные Депри-Андруайе

На Рис. 4.2 K – вектор кинетического момента Нептуна относительно центра тяжести. Смысл угловых переменных l, φ_2, φ_3 ясен из рис.4.2, а соответствующие им импульсы как следует из Рис.4.2 таковы

$$L = K \cos \delta_2, \quad I_2 = K, \quad I_3 = K \cos \delta_1$$

Дифференциальные уравнения вращения имеют гамильтонов вид. Выражение для функции Гамильтона известно [9,10]:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2A} + \frac{L^2}{2C} - U,$$

$$U = -\frac{3}{2}(1-\mu)n_J^2 \frac{a_J^3}{r_1^3} (C-A)\gamma_{13}^2 - \frac{3}{2}\mu n_J^2 \frac{a_J^3}{r_2^3} (C-A)\gamma_{23}^2 - \frac{3}{2}\mu_T n_T^2 \frac{a_T^3}{r_3^3} (C-A)\gamma_{33}^2, \quad (4.1)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{r_i} [(\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu)(x - x_i) + (\beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu)(y - y_i) + \gamma_j (z - z_i)].$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mu = \frac{m_J}{m_S + m_J} = 0.0009535918308, \quad \mu_T = \frac{m_T}{m_T + m_N} = 0.0002088795273,$$

$x_1 = -\mu r$, $x_2 = (1-\mu)r$ - координаты центров масс Солнца и

Юпитера, $n_J = \sqrt{f(m_S + m_J)/a_J^3}$ - среднее движение Юпитера, $n_T = \sqrt{f(m_T + m_N)/a_T^3}$ -

среднее движение Тритона, $r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}$, γ_{ij} - направляющие косинусы радиус-векторов r_i с главными центральными осями инерции Nx_j . Иначе

$\gamma_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. Здесь $\mathbf{e}_i = \left(\frac{x-x_i}{r_i}, \frac{y-y_i}{r_i}, \frac{z-z_i}{r_i} \right)$, $\mathbf{e}_j = (\alpha_j \cos \nu + \beta_j \sin \nu, \beta_j \cos \nu - \alpha_j \sin \nu, \gamma_j)$.

Орты \mathbf{e}_j главных центральных осей инерции Nx_j в барицентрической системы координат

$Oxyz$ стоят в столбцах матрицы перехода от системы координат $Nx_1x_2x_3$ к $Oxyz$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \cos \nu + \beta_1 \sin \nu & \alpha_2 \cos \nu + \beta_2 \sin \nu & \alpha_3 \cos \nu + \beta_3 \sin \nu \\ \beta_1 \cos \nu - \alpha_1 \sin \nu & \beta_2 \cos \nu - \alpha_2 \sin \nu & \beta_3 \cos \nu - \alpha_3 \sin \nu \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

A, C - экваториальный и аксиальный моменты инерции Нептуна относительно осей Nx_1 ,

Nx_3 соответственно, $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ - элементы матрицы направляющих косинусов между

кёниговой системой координат $N\xi\eta\zeta$ и главными центральными осями инерции $Nx_1x_2x_3$

соответственно, выражения для которых приведены, например, в [17].

Орбиту Нептуна N является квазипериодической функцией времени в барицентрической системе координат $Oxyz$, частотный базис которой имеет вид

$\omega_1 = (n_J, n_N)$, где n_J, n_N - средние движения Юпитера и Нептуна соответственно. Орбита

Тритона T -- квазипериодическая функция времени в осях $Oxyz$ с частотным базисом

$\omega_2 = (n_J, n_N, n_T)$. Здесь n_T - среднее движение Тритона.

4.2 Орбита Нептуна и Тритона в барицентрических координатах Солнца и Юпитера.

Для вычисления орбит Нептуна и его спутника Тритона в барицентрической системе координат $Oxyz$ введём правые системы координат.

Пусть $SXYZ$ - система координат с началом в центре масс Солнца, ось SZ направлена по нормали к плоскости эклиптики, ось SX направлена в точку весеннего равноденствия γ , ось SY дополняет систему координат до правой; $Sx'y'z'$ - система координат с началом в центре масс Солнца, ось Sz' направлена по нормали к плоскости орбиты Юпитера, ось Sx' направлена в точку восходящего узла орбиты Юпитера, ось Sy' дополняет систему координат до правой. Барицентрическая система координат $Oxyz$ была описана выше.

Координаты центра масс Нептуна в гелиоцентрической эклиптической системе координат $SXYZ$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} X &= r_1 (\cos(\omega_N + \nu_1) \cos(\Omega_N) - \sin(\omega_N + \nu_1) \sin(\Omega_N) \cos(i_N)), \\ Y &= r_1 (\cos(\omega_N + \nu_1) \sin(\Omega_N) + \sin(\omega_N + \nu_1) \cos(\Omega_N) \cos(i_N)), \\ Z &= r_1 (\sin(\omega_N + \nu_1) \sin(i_N)) \end{aligned}$$

Здесь ω_N, Ω_N, i_N - кеплеровские элементы орбиты (см. таблицу 1). Для вычисления координат центра масс Нептуна в барицентрической системе координат $Oxyz$ выполним три последовательных поворота и параллельный перенос начала координат S в точку O - барицентр Солнца и Юпитера.

Первый поворот выполним вокруг оси SZ на угол Ω_J . В результате получим систему координат $SX_1Y_1Z_1$, где плоскость X_1Y_1 лежит в плоскости эклиптики, причём ось SX_1 направлена в точку восходящего узла орбиты Юпитера, ось SZ_1 направлена по нормали к плоскости эклиптики, ось SY_1 - дополняет систему координат до правой. Второй поворот выполним вокруг оси SX_1 на угол i_J . В результате получим систему координат $Sx'y'z'$, которая была описана выше. Третий поворот выполним вокруг оси Sz' на угол $u = \omega_J + \nu$. В результате получим вращающуюся систему координат $Sxyz$ с центром в Солнце. Перейдём от системы координат $Sxyz$ к системе координат $Oxyz$, сделав параллельный перенос начала координат на вектор $\mathbf{s} = (\mu r, 0, 0)$.

В векторно-матричной форме переход от старых координат $SXYZ$ к новым $Oxyz$ запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \mathbf{s} \quad (4.2)$$

Здесь $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 \mathbf{S}_2 \mathbf{S}_3$. \mathbf{S}_1 - матрица поворота вокруг оси SZ на угол Ω_J , \mathbf{S}_2 - матрица поворота вокруг оси SX_1 на угол i_J , \mathbf{S}_3 - матрица поворота вокруг оси Sz' на угол $u = \omega_J + \nu$.

Матрицы $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \mathbf{S}_3$ имеют следующий вид:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \cos \Omega_J & -\sin \Omega_J & 0 \\ \sin \Omega_J & \cos \Omega_J & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_J & -\sin i_J \\ 0 & \sin i_J & \cos i_J \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} \cos u & -\sin u & 0 \\ \sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Средние кеплеровские элементы орбит Нептуна и Юпитера, рассчитанные на эпоху J2000, представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Кеплеровские элементы орбит Нептуна и Юпитера.

Элемент	Юпитер	Нептун
Эксцентриситет	$e_j=0.04839266$	$e_N=0.00858587$
Наклонение орбиты	$i_j=1.30530^\circ$	$i_N=1.76917^\circ$
Долгота восходящего узла	$\Omega_j=100.55615^\circ$	$\Omega_N=131.72169^\circ$
Аргумент перигелия	$\omega_j=275.066^\circ$	$\omega_N=273.24966^\circ$
Большая полуось	$a_j=5.20336301$ а.е.	$a_N=30.06896348$ а.е.
Среднее движение	$n_j=1.6784899 \cdot 10^{-8} \text{ c}^{-1}$	$n_N=1.208187768 \cdot 10^{-9} \text{ c}^{-1}$

Перейдём к вычислению орбиты Тритона в барицентрической системе координат $O_{хуz}$. Положение орбит Нептуна и Юпитера определяется в эклиптической системе координат. Элементы орбиты Тритона $\bar{\Omega}_T = 191.2^\circ$, $\bar{i}_T = 115.23^\circ$ вычислены в нептуноцентрической системе координат на эпоху 1923 г. [62], причём за основную плоскость принимается экватор Земли. Перейдём от экваториальных элементов орбиты $\bar{\Omega}_T, \bar{i}_T$ к эклиптическим элементам Ω_T, i_T . Остальные элементы, определяющие круговую орбиту Тритона (a_T и e_T), очевидно, не зависят от системы координат.

Построим сферический треугольник, образованный эклипстикой, экватором Земли и орбитой Тритона (Рис. 4.3).

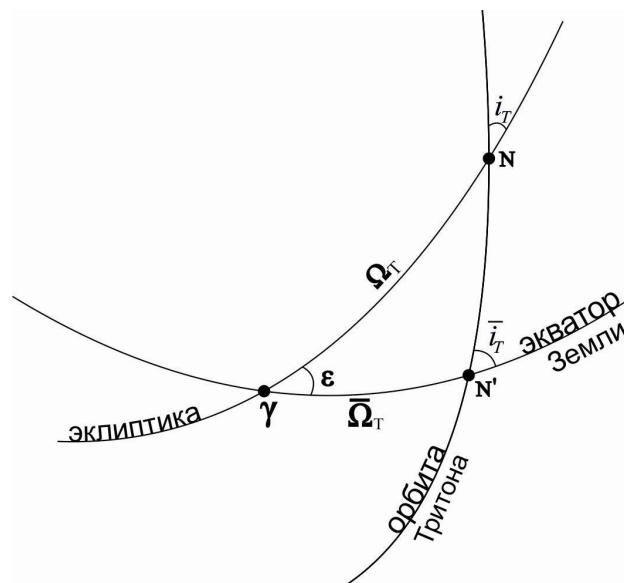


Рис.4.3 Пересчет элементов орбиты Тритона

Применяя формулы сферической тригонометрии, получим

$$i_T = \arccos(\cos \bar{i}_T \cos \varepsilon + \sin \bar{i}_T \sin \varepsilon \cos \bar{\Omega}_T), \quad \Omega_T = \arcsin\left(\frac{\sin \bar{\Omega}_T \sin \bar{i}_T}{\sin i_T}\right)$$

Известно, что $\varepsilon=23.45222^\circ$, тогда $i_T=138.0906730^\circ$, $\Omega_T=344.7488892^\circ$.

Кеплеровские элементы орбиты Тритона, отнесенные к плоскости эклиптики представлены в Таблице 4.2. (эпоха 1923 г.)

Таблица 4.2. Кеплеровские эклиптические элементы орбиты Тритона

Элемент	Тритон
Эксцентриситет	$e_T=0$
Наклонение орбиты	$i_T=138.0906730^\circ$
Долгота восходящего узла	$\Omega_T=344.7488892^\circ$
Аргумент перицентра	$\omega_T=0^\circ$
Большая полуось	$a_T = 0.002371417486 \text{ а.е.}$
Среднее движение	$n_T=1.2374009 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$

Координаты центра масс Тритона в нептуноцентрической эклиптической системе координат $N\bar{x}_3\bar{y}_3\bar{z}_3$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{x}_3 &= a_T (\cos(M_2) \cos(\Omega_T) - \sin(M_2) \sin(\Omega_T) \cos(i_T)), \\ \bar{y}_3 &= a_T (\cos(M_2) \sin(\Omega_T) + \sin(M_2) \cos(\Omega_T) \cos(i_T)), \\ \bar{z}_3 &= a_T \sin(M_2) \sin(i_T) \end{aligned}$$

где M_2 – средняя аномалия движения Тритона.

Для перехода от нептуноцентрической к гелиоцентрической системе координат необходимо сделать параллельный перенос начала координат N в точку S на вектор $\mathbf{r}_1=(X,Y,Z)$. Далее, выполнив три последовательных поворота и параллельный перенос начала координат S в точку O, как было описано ранее, получим координаты центра масс Тритона в барицентрической системе координат $Oxyz$.

В векторно-матричной форме переход от старых координат $N\bar{x}_3\bar{y}_3\bar{z}_3$ к новым $Oxyz$ запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} = \mathbf{S}^{-1} \begin{pmatrix} X + \bar{x}_3 \\ Y + \bar{y}_3 \\ Z + \bar{z}_3 \end{pmatrix} - \mathbf{s} \quad (4.3)$$

Используя формулу (4.2) и значения средних элементов орбиты, получим координаты x , y , z как функций ν , ν_1 :

$$x = \frac{1}{1 + 0.00858587 \cos \nu_1} [26.20940051 \cos \nu_1 \cos \nu - 14.73274067 \cos \nu \sin \nu_1 + 14.72907733 \sin \nu \cos \nu_1 + 26.20770386 \sin \nu_1 \sin \nu] - \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266 \cos \nu},$$

$$y = \frac{1}{1 + 0.00858587 \cos \nu_1} [14.72907733 \cos \nu_1 \cos \nu - 26.20940051 \cos \nu_1 \sin \nu + 26.20770386 \sin \nu_1 \cos \nu + 14.73274067 \sin \nu_1 \sin \nu],$$

$$z = \frac{1}{1 + 0.00858587 \cos \nu_1} [-0.3617645378 \cos \nu_1 - 0.3344825179 \sin \nu_1]$$

Формулы для x_3 , y_3 , z_3 как функций ν , ν_1 , M_2 имеют громоздкий вид, поэтому их приводить не будем.

Для того, чтобы записать координаты центра масс Нептуна в виде временного ряда, воспользуемся разложением тригонометрических функций истинной аномалии в тригонометрические ряды по кратным средней аномалии [1]:

$$\cos \nu = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM, \quad \sin \nu = \sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} [J_{k-1}(ke) - J_{k+1}(ke)] \sin kM \quad (4.4)$$

Подставляя ряды (4.4) в x, y, z , раскладывая полученные выражения в ряды по e_j , e_N с точностью до членов пятого порядка малости, получим координаты центра масс Нептуна в осях $Oxyz$:

$$x(M, M_1) = \frac{26.20940051 \cos M_1 \cos M}{1 + 0.00858587 \cos M_1} - \frac{14.73274067 \cos M \sin M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} + \frac{14.72907733 \sin M \cos M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} + \frac{26.20770386 \sin M \sin M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} - \frac{0.004949210633}{1 + 0.04839266 \cos M} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_N^n x_{mn}(M, M_1)$$

$$y(M, M_1) = \frac{14.72907733 \cos M_1 \cos M}{1 + 0.00858587 \cos M_1} + \frac{26.20770386 \cos M \sin M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} - \frac{26.20940051 \sin M \cos M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} + \frac{14.73274067 \sin M \sin M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_N^n y_{mn}(M, M_1)$$

$$z(M, M_1) = -\frac{0.3617645378 \cos M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} - \frac{0.3344825179 \sin M_1}{1 + 0.00858587 \cos M_1} + \sum_{m+n=1}^4 e_J^m e_N^n z_{nm}(M, M_1)$$

Здесь M, M_1 - средние аномалии Юпитера и Нептуна, функции x_{nm}, y_{nm}, z_{nm} имеют громоздкий вид, поэтому их опускаем. Учитывая, что $M=n_J t, M_1=n_N t$ можем представить координаты центра масс Нептуна в виде явных функций времени.

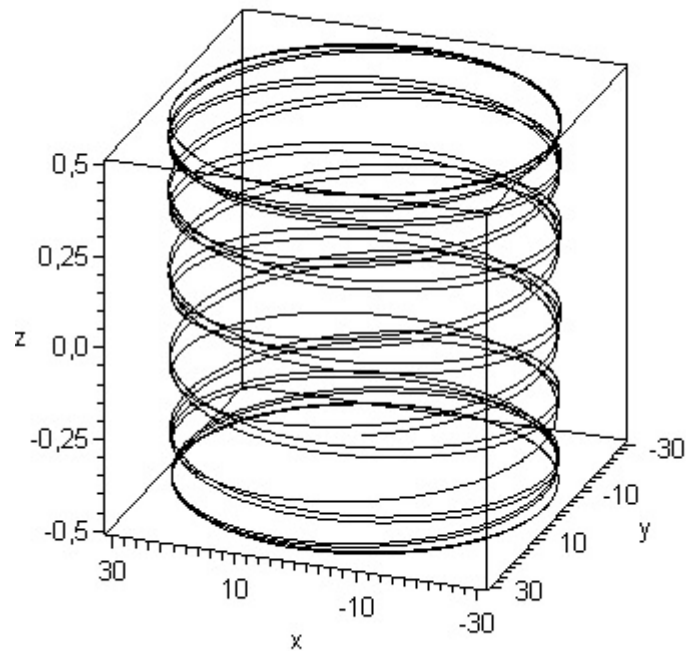


Рис. 4.4 График орбиты Нептуна в барицентрической системе координат $Oxyz$.

На рис. 4.4 изображена орбита Нептуна в барицентрических осях $Oxyz$ на интервале времени порядка 317 земных лет. Величины x, y, z указаны в астрономических единицах.

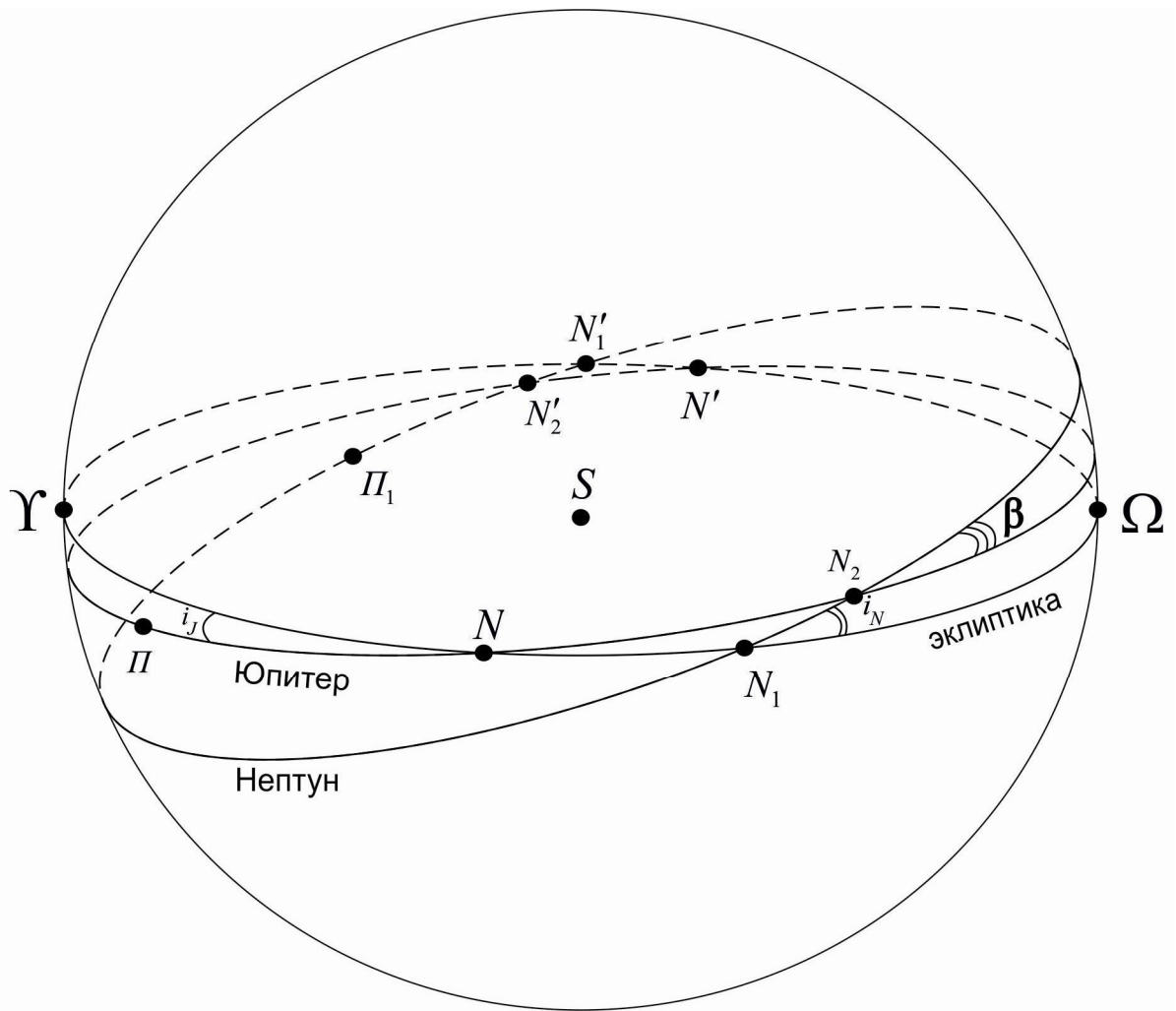


Рис. 4.5. Орбиты Нептуна и Юпитера на небесной сфере.

На Рис.4.5 представлены орбиты Нептуна и Юпитера, изображённые на единичной сфере в инерциальной системе координат. Здесь Υ и Ω - точки весеннего и осеннего равноденствий соответственно, $\sphericalangle N=100.55615^\circ$, $\sphericalangle N_I=131.72169^\circ$, $\sphericalangle N\Pi=275.066^\circ$, $\sphericalangle N_I\Pi_I=273.24966^\circ$, $\sphericalangle NN_I=31.16554^\circ$, $\sphericalangle NN_2=77.16086293^\circ$, $\sphericalangle N_I N_2=46.00570765^\circ$, $i_J=1.30530^\circ$, $i_N=1.76917^\circ$, $\beta=0.9389385262^\circ$.

4.3 Возмущённое вращение Нептуна.

Для того, чтобы исследовать вращение Нептуна методами теории возмущений, введём малые параметры задачи. Учитывая, что угловая скорость вращения Нептуна $\Omega^* \approx 1.0931271 \cdot 10^{-4}$ рад/с относительно центра масс существенно превосходит среднее движение Юпитера $n_J \approx 1.67992 \cdot 10^{-8}$ рад/с и среднее движение Тритона $n_T \approx 1.2368 \cdot 10^{-5}$ рад/с, за единицу времени примем характерное значение $T^* = \frac{1}{\Omega^*}$. Тогда параметры $\varepsilon_1 = n'_J$ ($n'_J = n_J / \Omega^* \sim 10^{-4}$), $\varepsilon_2 = n'_T$ ($n'_T = n_T / \Omega^* \sim 10^{-1}$) -- малые, при этом

средние аномалии движений Юпитера, Нептуна и Тритона будут вычисляться по формулам

$$M = n'_J t, \quad M_1 = n'_N t \left(n'_N = \frac{n_N}{\Omega^*} \sim 10^{-5} \right), \quad M_2 = n'_T t$$

Далее рассматривая движение центра масс Нептуна удобно за единицу длины принять расстояние между Нептуном и Тритоном $a_* = a_T$. Тогда соответствующие расстояния будут вычисляться следующим образом:

$$r'_3 = \frac{r_3}{a_*} \sim 1, \quad r' = \frac{r}{a_*} \sim \frac{a_J}{a_*}, \quad r'_1 = \frac{r_1}{a_*} \sim \frac{a_N}{a_*}, \quad r'_2 = \frac{r_2}{a_*}$$

Теперь рассмотрим движение Нептуна относительно центра масс. В данном движении за единицу длины удобно принять характерный размер Нептуна $x_* = \rho$. Тогда координаты Нептуна в связанной с телом системе координат $Nx_1x_2x_3$ будут вычисляться по формулам

$$x_1 = \rho x'_1, \quad x_2 = \rho x'_2, \quad x_3 = \rho x'_3$$

Здесь $x'_1 \sim 1$, $x'_2 \sim 1$, $x'_3 \sim 1$. При этих предположениях главные центральные моменты инерции Нептуна A, B, C будут представляться в виде:

$$A = \rho^2 \int_V (x_2'^2 + x_3'^2) dm = \rho^2 A', \quad B = \rho^2 \int_V (x_3'^2 + x_1'^2) dm = \rho^2 B', \quad C = \rho^2 \int_V (x_1'^2 + x_2'^2) dm = \rho^2 C'$$

Здесь $A' \sim 1$, $B' \sim 1$, $C' \sim 1$.

Введем еще один малый параметр спутникова приближения $\Delta = \frac{\rho}{a_*}$. Учитывая, что

характерный размер Нептуна $\rho = 24764$ км. Имеем $\Delta = 0.0698 \sim 10^{-2}$.

Функция Гамильтона (3.1) примет следующий вид:

$$H = \frac{I_2^2 - L^2}{2\rho^2 A' \Omega^*} + \frac{L^2}{2\rho^2 C' \Omega^*} + \varepsilon_1^2 \Delta^2 \Omega^* H_{11} + \varepsilon_2^2 \Delta^2 \Omega^* H_{12}$$

где

$$H_{11} = \frac{3}{2}(1-\mu) \frac{a_J^3}{a_* r_1'^3} (C' - A') \gamma_{13}^2 + \frac{3}{2} \mu \frac{a_J^3}{a_* r_2'^3} (C' - A') \gamma_{23}^2,$$

$$H_{12} = \frac{3}{2} \mu_T \frac{a_T^3}{a_* r_3'^3} (C' - A') \gamma_{33}^2$$

Отметим, что для случая динамически-симметричного Нептуна ($A=B$) переменные Депри-Андуайе являются переменными действие-угол в невозмущенной задаче:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{\partial H_0}{\partial I_2} = \frac{I_2}{\Omega^* \rho^2 A'}, \quad \dot{i} = \frac{\partial H_0}{\partial L} = \frac{L}{\Omega^* \rho^2} \left(\frac{1}{C'} - \frac{1}{A'} \right)$$

$$L = const, I_2 = const, I_3 = const, \varphi_3 = const \quad (4.5)$$

Заметим, что частота собственного вращения ($\Omega_1 = \dot{l}$), частота прецессии ($\Omega_2 = \dot{\varphi}_2$) относительных движений Нептуна вокруг вектора кинетического момента \mathbf{I}_2 , частоты n_N, n_J, n_T орбитального движения Нептуна, Юпитера и Тритона в барицентрических осях не удовлетворяют резонансным соотношениям

$$k_0 n_J + k_1 n_N + k_2 n_T + k_3 \Omega_1 + k_4 \Omega_2 = 0$$

ни при одном наборе целых чисел k_0, k_1, k_2, k_3, k_4 , если $k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2 \neq 0$.

Перейдём к новому времени $M = \varepsilon_1 t$ и запишем «расширенную» функцию Гамильтона

$$H^* = P_M + \frac{n'_N}{\varepsilon_1} P_{M_1} + \frac{n'_T}{\varepsilon_1} P_{M_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \Delta_1 H_{11} + \Delta_2 H_{12} \quad (4.6)$$

Причем $\Delta_1 = \varepsilon_1 \cdot \Delta^2 \sim 10^{-8}$, $\Delta_2 = \frac{\varepsilon_2^2 \cdot \Delta^2}{\varepsilon_1} \sim 10^{-2}$.

Здесь, $M, P_M, M_1, P_{M_1}, M_2, P_{M_2}$ новые обобщённые координаты и обобщённые импульсы соответственно. Легко видеть, что величины $M, M_1, M_2, l, \varphi_2$ являются быстрыми переменными задачи, частоты изменения которых в невозмущенном движении есть $1, n'_N / \varepsilon_1, n'_T / \varepsilon_1, \Omega_1 / \varepsilon_1, \Omega_2 / \varepsilon_1$.

Исследуем уравнения возмущённого движения при помощи метода усреднения. Для этого усредним функцию H^* по быстрым переменным $M, M_1, M_2, l, \varphi_2$, рассматривая Δ_1, Δ_2 как независимые малые параметры [24,23]

$$\bar{H}^* = \frac{1}{\varepsilon_1} H_0 + \Delta_1 \bar{H}_1, \quad \bar{H}_1 = \frac{1}{(2\pi)^5} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \left(H_{11} + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} H_{12} \right) dld\varphi_2 dM dM_1 dM_2$$

Вычисления показывают, что функция \bar{H}_1 имеет следующий вид:

$$\bar{H}_1 = -\frac{a_J^3}{a_*} \Omega^* F(I_2, L) \left[\frac{D_1}{2} - \frac{3}{2} G(I_2, I_3, \varphi_3) \right], \quad (4.7)$$

где

$$F(I_2, L) = (C - A)(2 - 3 \sin^2 \delta_2),$$

$$G(I_2, I_3, \varphi_3) = (D_2 \sin^2 \varphi_3 + D_3 \cos^2 \varphi_3 + D_4 \sin 2\varphi_3 + D_5) \sin^2 \delta_1 + (D_6 \sin \varphi_3 + D_7 \cos \varphi_3) \cos \delta_1 \sin \delta_1,$$

$$\cos \delta_1 = \frac{I_3}{I_2}, \quad \cos \delta_2 = \frac{L}{I_2}$$

Коэффициенты D_i вычисляются по формулам:

$$D_i = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_i dM dM_1 dM_2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-e_J^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e_J \cos \nu)^2} \frac{(1-e_N^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+e_N \cos \nu_1)^2} Q_i d\nu d\nu_1 dM_2$$

Здесь введены следующие обозначения ($\mu_1 = 1 - \mu$, $\mu_2 = \mu$, $\mu_3 = \mu_T$)

$$Q_1 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(x-x_i)^2 + y^2 - 2z^2}{2r_i'^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 - 2(z-z_3)^2}{2r_3'^5},$$

$$Q_2 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x-x_i) \cos \nu - y \sin \nu)^2}{2r_i'^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((x-x_3) \cos \nu - (y-y_3) \sin \nu)^2}{2r_3'^5},$$

$$Q_3 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{((x-x_i) \sin \nu + y \cos \nu)^2}{2r_i'^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((x-x_3) \sin \nu + (y-y_3) \cos \nu)^2}{2r_3'^5}$$

$$Q_4 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{(y \sin \nu - (x-x_i) \cos \nu)((x-x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{2r_i'^5} +$$

$$+ \frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{((y-y_3) \sin \nu - (x-x_3) \cos \nu)((x-x_3) \sin \nu + (y-y_3) \cos \nu)}{2r_3'^5},$$

$$Q_5 = -\sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z^2}{2r_i'^5} - \frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z-z_3)^2}{2r_3'^5},$$

$$Q_6 = \sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x-x_i) \cos \nu - y \sin \nu)}{r_i'^5} + \frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z-z_3)((x-x_3) \cos \nu - (y-y_3) \sin \nu)}{r_3'^5}$$

$$Q_7 = -\sum_{i=1}^2 \mu_i \frac{z((x-x_i) \sin \nu + y \cos \nu)}{r_i'^5} - \frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} \mu_3 \frac{(z-z_3)((x-x_3) \sin \nu + (y-y_3) \cos \nu)}{r_3'^5}.$$

В силу определения малых параметров $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и третьего закона Кеплера имеем

$$\frac{\varepsilon_2^2 a_T^3}{\varepsilon_1^2 a_J^3} = 1$$

Усредненные уравнения вращений допускают три интеграла в инволюции:

$$L = \text{const}, I_2 = \text{const}, G = \text{const}$$

Интеграл $G = \text{const}$ описывает возмущённое движение вектора кинетического момента Нептуна. Он не зависит от моментов инерции A, C , поэтому геометрия массы планеты не влияет на качественную картину движения вектора \mathbf{I}_2 .

Таким образом, в рассматриваемом приближении вращение Нептуна складывается из регулярной прецессии вокруг вектора \mathbf{I}_2 и движения самого вектора \mathbf{I}_2 относительно осей $N\zeta\eta\zeta$.

Вычисления показывают, что при $m_s = 1.9891 \cdot 10^{30}$ кг, $m_j = 1.8986 \cdot 10^{27}$ кг, $m_T = 2.14 \cdot 10^{22}$ кг, $\mu_1 = 0.9990464081692$, $\mu_2 = 0.0009535918308$, $\mu_3 = 0.0002088795273$, $D_1 = 0.1391264379$, $D_2 = 0.180124171$, $D_3 = 0.134933727$, $D_4 = 0.0377352403$, $D_5 = -0.08796573046$, $D_6 = -0.09855538557$, $D_7 = 0.1738860962$.

Приведем формулы для вековой частоты прецессии вектора кинетического момента Нептуна \mathbf{I}_2 и угла нутации δ_1 . В возмущенном движении медленно эволюционируют канонически сопряженные переменные I_3, φ_3 :

$$\dot{\varphi}_3 = \Delta_1 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial I_3} = \frac{3}{2a_*} \Delta_1 \Omega^* a_j^3 F(I_2, L) \frac{\partial G(I_2, I_3, \varphi_3)}{\partial I_3},$$

$$\dot{I}_3 = -\Delta_1 \frac{\partial \bar{H}_1}{\partial \varphi_3} = -\frac{3}{2a_*} \Delta_1 a_j^3 \Omega^* F(I_2, L) \frac{\partial G(I_2, I_3, \varphi_3)}{\partial \varphi_3}$$

Причем угол нутации зависит от медленной переменной I_3 следующим образом

$$\delta_1 = \arccos\left(\frac{I_3}{I_2}\right)$$

4.4 След вектора кинетического момента Нептуна на единичной сфере

Рассмотрим интеграл

$$G=g, \tag{4.8}$$

описывающий поведение вектора кинетического момента Нептуна \mathbf{I}_2 в кёниговой системе координат $N\xi\eta\zeta$. Полный анализ интеграла (4.8) для произвольных значений параметров D_j дан в работе [31]. Фазовый портрет колебаний конца вектора кинетического момента Нептуна \mathbf{I}_2 представлен на рис. 4.6. Чёрным цветом на Рис.4.6 обозначены сепаратрисы, движение вдоль которых имеет асимптотический характер.

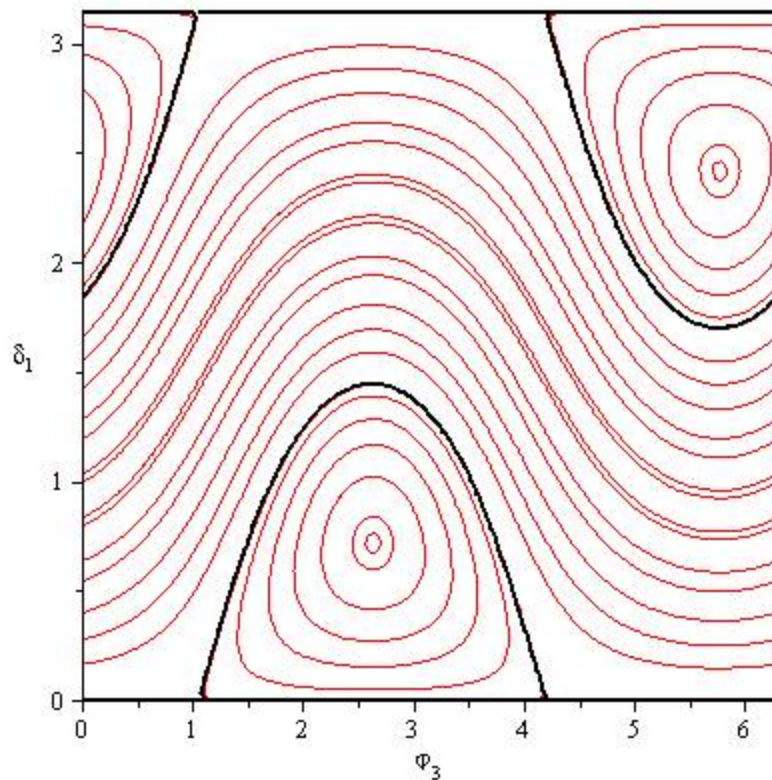


Рис. 4.6. Фазовый портрет колебаний конца вектора кинетического момента Нептуна.

Положения равновесия конца вектора \mathbf{I}_2 находятся численно из уравнений:

$$\frac{\partial G}{\partial \varphi_3} \equiv [(D_2 - D_3) \sin 2\varphi_3 + 2D_4 \cos 2\varphi_3] \sin^2 \delta_1 + \frac{1}{2}(D_6 \cos \varphi_3 - D_7 \sin \varphi_3) \sin 2\delta_1 = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial \delta_1} \equiv (D_2 \sin^2 \varphi_3 + D_3 \cos^2 \varphi_3 + D_4 \sin 2\varphi_3 + D_5) \sin 2\delta_1 + (D_6 \sin \varphi_3 + D_7 \cos \varphi_3) \cos 2\delta_1 = 0$$
(4.9)

Число стационарных точек равно восьми, при этом четыре точки устойчивы, остальные неустойчивы. Между положениями равновесия (7) и (8) заключены зоны колебаний в окрестности плоскости большого круга, параллельного плоскости орбиты Тритона. Эти зоны очень узкие, поэтому на рис. 4.6 не изображены.

Качественная картина траекторий вектора \mathbf{I}_2 представлена на рис. 4.7. Сплошными линиями изображены видимые кривые, расположенные на внешней стороне сферы, а пунктирными линиями изображены кривые, расположенные на оборотной стороне.

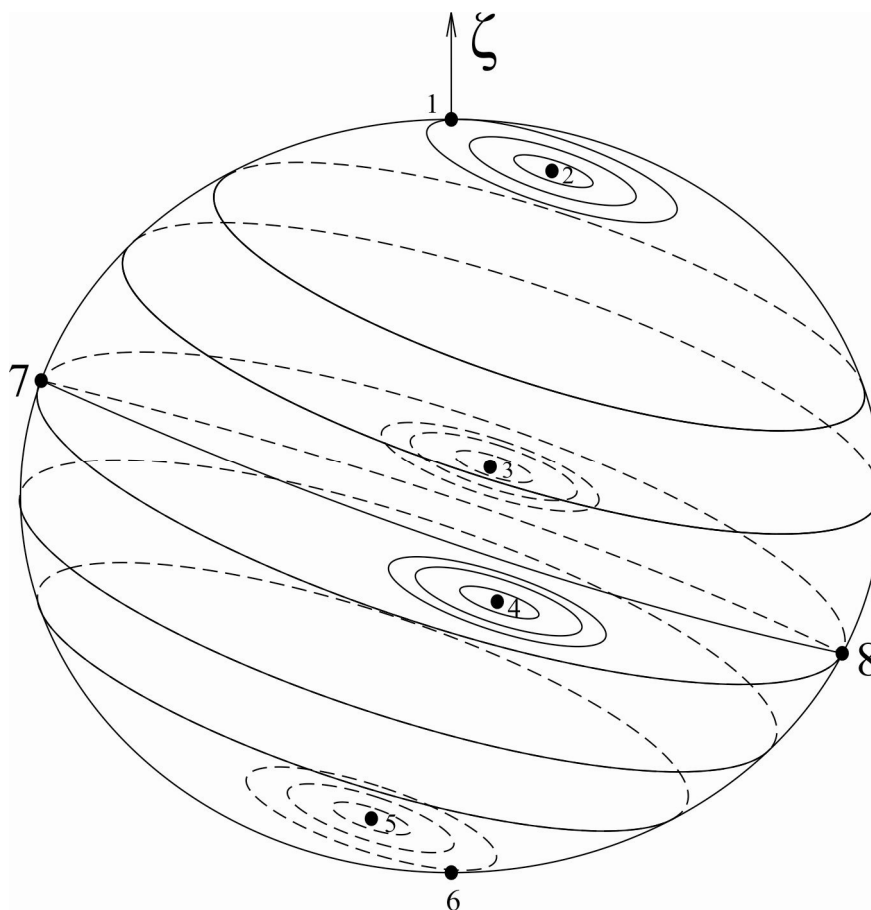


Рис.4.7 Траектории конца вектора кинетического момента Нептуна на единичной сфере.

Приведённых сведений достаточно, чтобы сделать выводы о влиянии Тритона, Солнца и Юпитера на вращение Нептуна. Прежде всего отметим, что стационарные точки (2) и (5) имеют следующие координаты: $\{\varphi_3^* = 150.456239^\circ, \delta_1^* = 41.353394^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 330.456239^\circ, \delta_1^* = 138.646606^\circ\}$ соответственно. Отсюда следует, что эти точки принадлежат нормали к плоскости орбиты Тритона, так как угол $\delta_1^* = 138.646606^\circ$ является

наклоением α орбиты Тритона к орбите Юпитера. Действительно, несложно показать, что наклонение α вычисляется по формуле

$$\alpha = \arccos(-\cos i_J \cos(\pi - i_T) + \sin i_J \sin(\pi - i_T) \cos(\Omega_T - \Omega_J)) = 138.6453144^\circ$$

Отсюда следует, что стационарные точки (7) и (8), имеющие координаты $\{\varphi_3^* = 330.067229^\circ, \delta_1^* = 48.647260^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 150.067229^\circ, \delta_1^* = 131.352739^\circ\}$, принадлежат плоскости, параллельной плоскости орбиты Тритона. Окружностям единичной сферы, плоскость которых параллельна орбите Тритона, отвечает прецессия вектора кинетического момента вокруг нормали к плоскости этой орбиты. Не останавливаясь подробно на анализе прецессии, отметим только, что притяжение Тритона вызывает регулярную прецессию, в то время как Солнце и Юпитер портят прецессию, изменяя угол нутации и угловую скорость прецессии на величины порядка Δ_1 .

Более существенные эффекты от притяжения Солнца и Юпитера проявляют себя в том случае, когда движения вектора кинетического момента наблюдаются вблизи южного и северного полюсов единичной сферы, а также вблизи плоскости большого круга, параллельного плоскости орбиты Тритона. К примеру, появляются новые положения равновесия, отвечающие значениям $\delta_1=0, \delta_1=\pi$, что непосредственно следует из интеграла (12) при $g=0$. Неустойчивым стационарным точкам $\delta_1=0, \delta_1=\pi$ отвечают гомоклинические траектории, вдоль которых движение имеет асимптотический характер. Либрациям в окрестности этих траекторий отвечают движения \mathbf{I}_2 со сколь угодно большим периодом.

В окрестности плоскости большого круга, параллельного плоскости орбиты Тритона, вектор \mathbf{I}_2 совершает колебания вблизи стационарных точек (3), (4) с координатами $\{\varphi_3^* = 60.237040^\circ, \delta_1^* = 89.807068^\circ\}$ и $\{\varphi_3^* = 240.237040^\circ, \delta_1^* = 90.192932^\circ\}$ соответственно. Появление стационарных точек и либраций в их окрестности – результат разрушения структурно неустойчивого континуума, состоящего из равновесий, принадлежащих экваториальной окружности, и существующего во вращениях планеты под действием притяжения одного лишь Тритона. Зона колебаний ограничена двумя гетероклиническими кривым, соединяющими равновесия (7) и (8) (рис. 6) и отвечающими константе $g=0.1135422152$. Как было ранее отмечено, ширина такой зоны колебаний очень узкая.

Анализ интеграла $G=g$ показывает, что вектор кинетического момента совершает вращения вокруг нормали к плоскости орбиты Тритона, что не отвечает действительности: реальному вращению Нептуна соответствует замкнутая фазовая траектория на единичной сфере с углом нутации $\delta_1^* = 29.56^\circ$, отсчитанным от нормали к плоскости орбиты Нептуна. Полученный результат объясняется грубостью модели: силовая функция

Тритона приближается первым членом разложения силовой функции в ряд (спутниковое приближение), однако точность такой аппроксимации плохая, так как параметр ρ не является достаточно малым. Поэтому для решения задачи о вращении Нептуна с учетом притяжения Тритона нужны иные подходы.

В заключении необходимо отметить работу [18], в которой исследовалось прецессионное движение Нептуна под действием притяжения его массивного спутника Тритона. В цитируемой работе выписаны эволюционные уравнения Белецкого с поправкой на эволюцию орбиты Тритона. В этой же работе выписан первый интеграл, описывающий поведение вектора кинетического момента Нептуна \mathbf{I}_2 на единичной сфере. Кроме классических стационарных точек, когда вектор кинетического момента Нептуна \mathbf{I}_2 направлен по нормали и антинормали к плоскости орбиты Тритона интеграл допускает зоны колебаний в окрестности стационарных точек, расположенных вблизи плоскости орбиты Тритона и вблизи нормали к плоскости тритоновской орбиты. Эти эффекты обусловлены эволюцией орбиты Тритона и в данной работе не рассматривались.

Заключение

В диссертации применен подход к исследованию вращения некоторых небесных тел, в котором орбита исследуемого тела является условно-периодической функцией времени в некоторой системе координат. Такой подход позволяет учитывать гравитационное возмущение со стороны N тел в отличие от классических исследований. Получены усредненные уравнения вращения Сатурна, Нептуна и Марса, описывающие эволюцию медленных переменных (частоту прецессии и угла нутации), когда в качестве базовой системы переменных, описывающих ориентацию твердого тела берутся переменные Дебри-Андуайе. Были получены интегралы, описывающие поведение вектора кинетического момента Сатурна, Нептуна и Марса на единичной сфере. При исследовании этих интегралов были выявлены новые интересные эффекты: появление новых положений равновесия вектора кинетического момента Марса и Сатурна, а также появление зон либраций в окрестности плоскостей их орбит и нормалей к ним.

Исследовано влияние Юпитера на прецессию оси вращения Сатурна с учетом притяжения Солнца и спутников планеты. Используя метод малого параметра, получены, с точностью до членов порядка ε^3 и ε^2 в усредненном движении, общие выражения для угла нутации и частоты прецессии планеты соответственно. Предполагалось, что планета является динамически симметричным твердым телом ($A=B$) и находится в гравитационном поле притяжения двух массивных тел. При исследовании вращений Сатурна учитывалось также притяжение его спутников. Сатурн со спутниками рассматривается как «единое целое», прецессирующее вокруг нормали к неподвижной плоскости орбиты Сатурна, и, как следствие, уточнена частота невозмущенной прецессии.

Исключение здесь составляет Нептун, вектор кинетического момента которого совершает псевдорегулярную прецессию вокруг нормали к плоскости орбиты Тритона. Также при определенных начальных условиях наблюдаются либрационные движения в окрестности плоскости орбиты Тритона. Данный эффект, отличающийся от классических результатов, объясняется учетом гравитационных моментов со стороны Тритона, как притягивающего центра, в рамках модели спутникова приближения. Зоны либраций отделяют от движений типа прецессии гомоклинические и гетероклинические траектории, стремящиеся к соответствующим положениям равновесия вектора кинетического момента

планеты при $t \rightarrow \pm\infty$. Было установлено, что топология вращений Марса в задаче четырех тел совпадает с топологией вращения Марса в задаче трех тел (когда третьим притягивающим телом является Юпитер или Земля).

Список литературы

- 1 Абалакин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1971
- 2 Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1977.
- 3 Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. УМН, 1963, т.18 вып. 6
- 4 Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.: Наука, 1977.
- 5 Асланов В. С., Пироженко А. В., Кислов А. В., Маслова А. И. Влияние переменного аэродинамического момента на движение спутника относительно центра масс. Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2011, т. 11, вып.3(2), с. 67–74.
- 6 Асланов В.С. Пространственное движение тела при спуске в атмосфере. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
- 7 Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.:Наука, 1965.
- 8 Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М.:Изд-во МГУ, 1975.
- 9 Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. М.: Наука, 1972.
- 10 Белецкий В.В. Резонансные явления во вращательных движениях искусственных и естественных небесных тел. Препринт ИПМ АН СССР, № 10, 1975.
- 11 Белецкий В.В., Левин Е.М., Погорелов Д.Ю. К вопросу о резонансных вращениях Венеры. I. – Астрон. ж., 1980, т. 57, №1, с. 158
- 12 Белецкий В.В., Левин Е.М., Погорелов Д.Ю. К вопросу о резонансных вращениях Венеры. II. – Астрон. ж., 1981, т. 58, вып. 1, с. 198.
- 13 Белецкий В.В., Хентов А.А. Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 1985, 288с.
- 14 Белецкий В.В., Хентов А.А. Магнитно-гравитационная стабилизация спутника. Доклад на XXIV конгрессе МАФ. Баку, 1973.
- 15 Белецкий В.В., Хентов А.А. Резонансные вращения небесных тел. Нижний Новгород: Нижегородский гуманитарный центр, 1995 - 423 с.
- 16 Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. (1963). Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. 4-е издание, исправленное и дополненное. – Физматгиз. 503 с.

- 17 Борисов А.В. , Мамаев И.С. Динамика твёрдого тела. Москва, Ижевск: Изд-во Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
- 18 Галиуллин И.А. К исследованию структурной устойчивости прецессионного движения планет.// *Астрономический вестник*, 1999, том 33, №1, с. 72-78.
- 19 Дубошин. Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука, 1968.
- 20 Зленко А.А. Движение двух вязкоупругих шаров в поле притягивающего центра // *Космич. исслед.*, 2011, т. 49, № 6, с. 569-572.
- 21 Зленко А.А. Силовая функция двух твердых небесных тел в переменных Делоне–Андуайе // *Астрономический журнал*. 2015. Т. 92. №12. С. 1009–1016.
- 22 Зленко А.А. Стационарные решения и исследование их устойчивости в задаче об эволюции движения двух вязкоупругих шаров в поле притягивающего центра. // *Космич. исслед.*, 2012, т. 50, № 6, С 490-492.
- 23 Красильников П. С. Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015.
- 24 Красильников П.С. О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании// *ПММ*, т. 76, вып. 1, 2012, с. 36-51
- 25 Красильников П.С. Плоские резонансные вращения динамически-симметричного спутника в задаче трех тел// *Астрономический журнал*, 1982, т. 59, №1, с. 147.
- 26 Красильников П.С. Пространственные вращения спутника в круговой задаче трех тел в случае главного резонанса//*Космические исследования*, 1990, т. 28, вып. 6, с. 808
- 27 Красильников П.С. Пространственные вращения спутника в круговой задаче трех тел при дробных резонансах//*Космические исследования*, 1991, т. 29, №6.
- 28 Красильников П.С., Амелин Р.Н. О вращении Марса вокруг центра масс под действием притяжения Солнца, Юпитера и Земли // *Нелинейная динамика*. 2015. Т.11. № 2. С. 329-342.
- 29 Красильников П.С., Амелин Р.Н. О вращении Сатурна относительно центра масс под действием гравитационных моментов Солнца и Юпитера // *Космические исследования*. 2016. Т. 54. № 2. С. 135–142.
- 30 Красильников П.С., Е.Е. Захарова. Резонансные вращения спутника относительно центра масс на условно-периодической орбите в ограниченной задаче N тел//*Космические исследования*, 1995, т. 33, №2, с. 191-200.

- 31 Красильников П.С., Захарова Е.Е. Нерезонансные вращения спутника относительно центра масс на условно-периодической орбите в ограниченной задаче N тел //Космические исследования, 1993, Т.31, Вып. 6
- 32 Красильников. П.С. Быстрые нерезонансные вращения космического аппарата на условно-периодических орбитах в ограниченной задаче трех тел. – Космические исследования, 1984, т. 22, №2, с. 171.
- 33 Маркеев А. П. К теории резонансного вращения Меркурия. Нелинейная динамика, 2009, т. 5, №1, с. 87–98
- 34 Маркеев А.П. , Красильников П.С. О движении спутника относительно центра масс в эллиптической ограниченной задаче трех тел. – Космические исследования, 1981, т. 19, № 2, с. 178.
- 35 Маркеев А.П. О стационарных вращениях твердого тела на периодической орбите вблизи коллинеарной точки либрации. Прикладная математика и механика, 1979, т. 43, №3, с. 411.
- 36 Маркеев А.П. Плоские периодические движения спутника относительно центра масс вблизи коллинеарной точки либрации. Космические исследования, 1979, т. 17, №3, с. 333.
- 37 Петров К.Г., Тихонов А.А. Уравнения ротационного движения твердого тела, основанные на использовании кватернионных параметров // Изв. РАН. Мех. тверд. тела, 2002, № 3, с. 3-16
- 38 Садов Ю.А. Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо.- Препринт №22 ИПМ АН СССР, 1970.
- 39 Сазонов В.В. Расчет главного вектора и главного момента сил светового давления, действующих на космический аппарат с солнечным парусом. Космические исследования. 2011, т. 49, №1, с. 59-67
- 40 Сазонов В.В., Троицкая А.В. Периодические движения спутника-гиростата с большим гиростатическим моментом относительно центра масс. Прикладная математика и механика. 2015, т. 79, №5, с. 595-607.
- 41 Сарычев В. А. Упрощение схемы системы гравитационной стабилизации спутника. Космические исследования, 1964, т. 2, №1, с. 33–45
- 42 Сарычев В. А. Условия устойчивости системы гравитационной стабилизации спутников с гиродемпфированием. Astronautica Acta, 1969, т. 14, №4, с. 299–310
- 43 Сарычев В.А., Герман А.Д., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Нерезонансные движения спутника с гистерезисными стержнями в режиме гравитационной ориентации. Известия АН СССР: Механика твердого тела. 1989, №6, с.3-12

- 44 Сарычев В.А., Овчинников М.Ю., Герман А.Д.. Периодические движения спутника с сильным магнитом в плоскости полярной орбиты с учетом возмущений. *Космические исследования*. 1988, т.26, вып.6, с.830-839
- 45 Сарычев В.А., Овчинников М.Ю.. Движение спутника с постоянным магнитом относительно центра масс, *Космические исследования*. 1986, т.24, вып.4, с.527-543
- 46 Тихонов А. А., Александров А. Ю. Одноосная электродинамическая стабилизация искусственного спутника Земли в орбитальной системе координат. *Автомат. и телемех.*, 2013, № 8, с. 22–31.
- 47 Тихонов А. А., Антипов К. А. Параметрическое управление в задаче о стабилизации космического аппарата в магнитном поле Земли. *Автомат. и телемех.*, 2007, № 8, с. 44–56.
- 48 Тихонов А.А. Интегрируемый случай вращательного движения гиростата в гравитационном и магнитном полях Земли. *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2009, № 2, с. 89–96.
- 49 Торжевский А.П. Быстрое вращение искусственного спутника вокруг центра масс в резонансном режиме.//*Космические исследования*, т.6, вып.1, 58-70, 1968.
- 50 Торжевский А.П. Движение искусственного спутника относительно центра масс и резонансы. «*Astronautica Acta*», 14, N3, 1969.
- 51 Торжевский А.П. Исследование резонансных явлений при движении искусственного спутника относительно центра масс под действием гравитационного и геомагнитного полей. М.: ИПМ АН СССР, 1969.
- 52 Черноузько Ф.Л. О движении спутника относительно центра масс под действием гравитационных моментов. *Прикл. мат. и мех.*, 1963, т. 27, №3, с. 474.
- 53 Черноузько Ф.Л. Резонансные явления при движении спутника относительно центра масс. *ЖВМ и МФ*, № 3, 528-538, 1963.
- 54 Andoyer M.H. *Cours de mecaniquee celeste*. – Paris: Gauthier-Villars, 1923. – Т.1. – 440 p.; 1926. – Т.2. – 454 p.
- 55 Beletskii V.V. Resonance Rotation of Celestial Bodies and Cassini’s Laws. «*Celestial Mechanics*», 6, No. 3, 356-378, 1972.
- 56 Bouquillon S., Souchay J. Pricise modelling of the precession-nutation of Mars. *Astronomy and Astrophysics*. 1999. V. 345. P.282-297.

- 57 Bretagnon, P., Rocher, P. and Simon, J. L. Theory of the rotation of the rigid Earth //Astronomy&Astrophysics.1997. V. 319. P. 305–317.
- 58 Campbell J.K., Anderson J.D. Gravity field of the saturnian system from pioneer and voyager tracking data //The Astronomical Journal. 1989. V. 97. № 5. P. 1485-1495.
- 59 Correia, A., Laskar, J. Mercury's capture into the 3/2 spin-orbit resonance as a result of its chaotic dynamics //Nature. 2004. V. 429. P. 848–850
- 60 Correia, A., Laskar, J. The Four final Rotation States of Venus //Nature. 2001. V. 411. P. 767–770.
- 61 Deprit. A. Free rotation of a rigid body studied in the phase plane. Amer. J. Phys., 1967, v. 35, №5, p. 424-428.
- 62 Eichelberger W.S., Newton A. The orbits of Neptune's satellite and the pole of Neptune's equator// Monthly notices Roy. Astron. soc. London, 1926. V. 86. №5. P. 276-294.
- 63 French Richard G., Philip D. Nicholson, Maren L. Cooke, J.L. Elliot, Keith Matthews, Olga Perkovic', Eric Tollestrup, Paul Harvey, Nancy J. Chanover, Mary Ann Clark, Edward W. Dunham, William Forrest, Joseph Harrington, Judith Pipher, Andre' Brahic, Isabelle Grenier, Francoise Roques, and Martina Arndt. Geometry of the Saturn System from the 3 July 1989 Occultation of 28 Sgr and Voyager Observations //ICARUS. 1993. V. 103. № 2. P. 163-214.
- 64 Goldreich P. Inclination of Satellite Orbits about an Oblate Precessing Planet. //The Astronomical Journal. 1965. V. 70. № 1. P. 5-9.
- 65 Goldreich P., Peale S. The Dynamics of Planetary Rotations. «Ann. Rev. Astron. And Astroph.», 6, Palo Alto, Calif., USA, 1968.
- 66 Gray A. A treatise on gyrostatics and rotational motion. Theory and application. London: Macmillan and Co, 1918. 530 p.
- 67 Hiroshi Kinoshita and Jean Souchay. The theory of the nutation for the rigid earth. Model at the second order //Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1990. V. 48. P. 187-265.
- 68 Hiroshi Kinoshita. Theory of the rotation of the rigid earth. Celestial Mechanics. 1977. V. 15. P. 277-326.
- 69 J. Souchay and H. Kinoshita. Comparison of new nutation series with numerical integration // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1991. V. 52. P. 45-55.
- 70 Krasilnikov P. Fast non-resonance rotations of spacecraft in restricted three body problem with magnetic torques//International Journal of Non-Linear Mechanics, Volume 73, July 2015, Pages 43–50.

- 71 Laplace P.S. *Traite de la Mecanique Celeste*. Tome II. Duprat II. Paris. 1799
- 72 Laskar J. A numerical experiment on the chaotic behaviour of the solar system // *Nature*. 1989. V. 338. P. 237.
- 73 Laskar J. Large-scale chaos in the solar system // *Astronomy and Astrophysics*. 1994. V. 287. N. 1. P. L9-L12
- 74 Laskar J., Joutel F., Robutel P. Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon // *Nature*. 1993. V. 361. P. 615-617.
- 75 Laskar J., Robutel P. The chaotic obliquity of the planets // *Nature*. 1993. V. 361. N. 6413. P. 608-612.
- 76 M. Folgueira and J. Souchay. Free polar motion of a triaxial and elastic body in Hamiltonian formalism: Application to the Earth and Mars // *Astronomy&Astrophysics*. 2005. V. 432. P. 1101-1113.
- 77 Marta Folgueira, Jean Souchay and Hiroshi Kinoshita. Effects on the nutation of the non-zonal harmonics of third degree // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1998. V. 69. P. 373-402.
- 78 Marta Folgueira, Jean Souchay and Hiroshi Kinoshita. Effects on the nutation of $C_{4,m}$ and $S_{4,m}$ harmonics // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 1999. V. 70. P. 147-157
- 79 Poinsot L. *Précession des équinoxes*. P.: Mallet-Bachelier, Imprimeur-Libraire, 1857. 56 p.
- 80 Routh E.J. *The advanced part of a treatise on the dynamics of a system of a rigid bodies*. L.: Macmillan and Co, 1892.
- 81 Sarychev V. A., Guerman A., Paglione P. Stability of equilibria for a satellite subject to gravitational and constant torques. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2008, V.31, №2, P. 386–394
- 82 Sarychev V. A., Sazonov V. V. Spin-stabilized satellites. *Journal of Astronautical Sciences*. 1976. V. 24. №4, P. 291–310
- 83 Sazonov V.V. Periodic motions of a satellite-gyrostap relative to its center of mass under the action of gravitational torque. *Cosmic Research*. 2013, V. 51, №2, P. 133-146
- 84 Serret J.A. Mémoire sur l'emploi de la méthode de la variation des arbitraires dans la théorie des mouvements de rotation. *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*. V. 35. 585-616. 1866.
- 85 Tisserand F. Sur le mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité // *Comptes rendus l'Acad.Sci. Paris*, 1885. V. 101

- 86 Ward W.R. Tidal friction and generalized Cassini's laws in the solar system. //The Astronomical Journal. 1975. V. 80. № 1. P. 64-70.
- 87 Ward W.R., Hamilton D.P. TILTING SATURN. I. ANALYTIC MODEL //The Astronomical Journal. 2004. V. 128. № 5. P. 2501-2509.
- 88 Ward W.R., Hamilton D.P. TILTING SATURN. II. NUMERICAL MODEL //The Astronomical Journal. 2004. V.128. №5. P. 2510-2517.