

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи

СКОПИНЦЕВ ПАВЕЛ ДМИТРИЕВИЧ



**НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК**

Специальность 1.1.8. «Механика деформируемого твёрдого тела»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Научный руководитель:
кандидат технических наук, доцент
Сердюк Дмитрий Олегович

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|------------|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 3 |
| ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК | 10 |
| 1.1. Современное состояние исследований | 10 |
| 1.2. Постановка задачи нестационарной динамики анизотропных упругих оболочек | 32 |
| 1.3. Уравнения движения анизотропной цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява..... | 34 |
| ГЛАВА 2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ | 50 |
| 2.1. Постановка задачи о фундаментальных решениях для анизотропной оболочки..... | 50 |
| 2.2. Фундаментальные решения для неограниченной анизотропной оболочки . | 52 |
| 2.3. Вспомогательные фундаментальные решения | 68 |
| 2.4. Достоверность фундаментальных решений | 81 |
| 2.5. Численное исследование поведения фундаментального решения | 88 |
| ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК | 93 |
| 3.1. Нестационарное напряжённо–деформированное состояние неограниченной цилиндрической оболочки | 93 |
| 3.2. Нестационарное деформирование цилиндрической оболочки с локальными опорами | 106 |
| 3.3. Достоверность функций нестационарных нормальных перемещений | 123 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 128 |
| БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК | 129 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Цилиндрические оболочки, как конструктивный элемент, имеют важное значение для развития промышленности и технологий. Они широко применяются в самолётостроительной, ракетно–космической, атомной, судостроительной, нефтегазодобывающей и машиностроительной отраслях. Также применимы оболочки в тоннелестроении, в гражданском и промышленном строительстве. Их криволинейная форма позволяет создавать прочные и одновременно лёгкие конструкции, при проектировании которых важно обладать знаниями о нагружении и режимах работы.

Оболочечные конструкции при эксплуатации подвергаются различного рода воздействиям. Повышенное внимание следует уделить воздействиям нестационарного характера, так как определение напряжённо–деформированного состояния в конструкциях, работающих в нестационарных режимах, осложняется существенной неоднородностью решения как по времени, так и по пространственным координатам.

Современные технологии в производстве дают возможность создания тонкостенных конструкций с использованием композитных металлических материалов, материалов с конструктивной анизотропией, армированных пластиков и других частных случаев общей анизотропии. Разработка математических моделей, методов и алгоритмов расчёта конструкций из анизотропных материалов даёт возможность построения единого универсального решения для различных материалов. В данной работе строится решение в геометрически и физически линейной постановке для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки.

Вопросы, касающиеся процессов нестационарного воздействия на цилиндрические оболочки и панели из анизотропных материалов, как показано в литературном обзоре данной работы, в настоящее время являются недостаточно хорошо изученными. Разработка математической модели, которая позволяет исследовать напряжённое деформированное состояние тонких упругих круговых

цилиндрических оболочек и панелей, в том числе с индивидуальным моделированием локальных опор, представляет сложную и актуальную проблему механики.

Целью диссертационной работы является разработка и реализация эффективных численно–аналитических методов исследования напряженно–деформированного состояния анизотропных упругих цилиндрических оболочек большой протяжённости, а также оболочек и панелей с произвольно расположенными локальными опорами при воздействии на них нестационарного нормального нагружения.

Научная новизна работы заключается в следующем:

— Разработана новая математическая модель для исследования нестационарных нормальных перемещений цилиндрических оболочек и панелей, имеющих произвольно расположенные локальные опоры в виде свободных опираний или скользящих заделок, путём индивидуального моделирования точечных граничных условий;

— Впервые построены фундаментальные решения для тонких неограниченных анизотропных цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява;

— Построены новые фундаментальные решения для свободно опёртых ортотропных цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява;

— Разработан алгоритм для анализа сходимости результатов при численном построении обратного интегрального преобразования Фурье;

— Исследовано влияние отношения радиуса анизотропной оболочки к её толщине, а также механических характеристик материала на характер нестационарных перемещений, напряжений и деформаций при воздействии различных нагрузок.

Практическая ценность данной работы заключается в том, что полученные фундаментальные решения могут быть использованы в научных исследованиях других учёных при работе над нестационарными контактными и обратными задачами, в исследованиях нестационарной динамики цилиндрических панелей сложной формы с применением, например, метода граничных элементов.

Проектные организации самолётостроительной, ракетно–космической и судостроительной промышленности могут применять предложенную математическую модель для цилиндрических оболочек и панелей с произвольно расположенными локальными опорами при проведении конкретных практических расчётов.

Методы исследования. В основе работы лежит метод фундаментальных решений (функций Грина) для неограниченной анизотропной оболочки. Функции Грина для неограниченной анизотропной оболочки представляют собой решения специальных задач, а именно, задач о воздействии на оболочку мгновенной сосредоточенной нагрузки, математически моделируемой с помощью дельта–функций Дирака. Фундаментальные решения построены с применением разложений в экспоненциальные ряды Фурье по угловой координате, интегральных преобразований Лапласа по времени и Фурье по продольной координате. Обратное интегральное преобразование Лапласа найдено аналитически с применением второй теоремы разложения (теоремы о вычетах). Оригинал интегрального преобразования Фурье построен в двух вариантах с использованием численных методов. В первом варианте применён метод интегрирования быстро осциллирующих функций. Во втором – квадратурные формулы метода Симпсона. Для обеспечения сходимости решения разработан алгоритм определения параметров численного интегрирования, основанный на анализе сходимости функций по непрерывной норме с заданной точностью.

Фундаментальные решения для свободно опертой ортотропной цилиндрической оболочки построены при помощи разложения по собственным функциям в двойные тригонометрические ряды Фурье по угловой и продольной координатам, а также интегрального преобразования Лапласа по времени. Обратное интегральное преобразование Лапласа построено аналитически.

Метод исследования нестационарного напряжённо–деформированного состояния неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки базировался на принципе суперпозиции, согласно которому искомое решение связано с

воздействующей нестационарной нагрузкой посредством трёхмерного интегрального оператора типа свёртки по времени, осевой и угловой координатам [27, 119, 134, 143], ядром которого является нестационарное фундаментальное решение для неограниченной анизотропной оболочки. Для взятия интегралов в интегральных представлениях искомым функцией использовались аналитические и численные методы с применением различных квадратурных формул.

Исследование нестационарных перемещений в анизотропной цилиндрической оболочке с локальными опорами проведено при помощи метода компенсирующих нагрузок. А именно, для каждой локальной опоры индивидуально вводились дополнительные сосредоточенные компенсирующие нагрузки, удовлетворяющие интересующим граничным условиям. Функция нормальных перемещений определена как сумма интегральных операторов типа свёртки фундаментального решения для неограниченной анизотропной оболочки с действующей нестационарной нагрузкой и компенсирующими нагрузками, которые обеспечивают удовлетворение локальным граничным условиям. Амплитуды компенсирующих нагрузок находились из решения системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с разностным ядром. Решение системы выполнено при помощи метода обратной матрицы с предварительной дискретизацией амплитуд компенсирующих нагрузок по времени. Расчёт параметров дискретизации основан на анализе сходимости решения по непрерывной норме с заданной точностью. Интегралы у компенсирующих и действующей нагрузок брались аналитически.

Обоснованность и достоверность результатов исследований.

Достоверность научных положений и выводов обеспечена корректностью принятых постановок рассматриваемых задач и используемых при решении математических методов. Верификация построенных новых фундаментальных решений подтверждена близостью полученных разными способами результатов. Надёжность функций нестационарного нормального перемещения анизотропных цилиндрических оболочек с локальными опорами обоснована

путём сопоставления результатов с результатами решения вспомогательной задачи, а также анализом выполнения граничных условий.

Основные результаты, выносимые на защиту:

— математическая модель и алгоритм исследования нестационарной динамики анизотропной цилиндрической оболочки и цилиндрической панели с локальными опорами, распределёнными по произвольному контуру;

— фундаментальные решения для нормального и тангенциальных перемещений неограниченной тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява;

— новые фундаментальные решения для свободно опертой ортотропной цилиндрической оболочки;

— алгоритм для анализа сходимости результатов при численном построении обратного интегрального преобразования Фурье;

— результаты анализа процесса воздействия подвижной нагрузки на характер нестационарных возмущений в зависимости от геометрических параметров цилиндрической оболочки.

Апробация работы.

Основные положения диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях, симпозиумах и семинарах:

— XXVI–XXIX Международный симпозиум имени А. Г. Горшкова «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» (Россия, Кремёнки, 2020–2023 г.);

— Научная конференция «Ломоносовские чтения» (Россия, Москва, 2020–2023 г.);

— X–XII Международная научно–практическая конференция «Проблемы безопасности на транспорте» (Беларусь, Гомель, 2020–2022 г.);

— X Всероссийская научная конференция с международным участием «Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред» (Россия, Москва, 2020 г.);

— XXII Конференция «Зимняя школа по механике сплошных сред» (Россия, Пермь, 2021 г.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 20 работ [64 – 78, 95, 96, 100, 128, 129], в том числе 4 статьи в журналах из перечня, рекомендованного ВАК РФ [67, 77, 78, 95] и 2 статьи в журналах из перечня Scopus [128, 129].

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, библиографического списка, включающего 147 наименований. Общий объем диссертации – 147 страниц. По тексту диссертации имеется 28 рисунков.

Во введении дано обоснование актуальности выбранной темы, сформулированы цели и задачи исследования, описаны методы исследования, научная новизна и практическая ценность данной работы, перечислены основные результаты работы, приведён список апробации проделанной работы и количество публикаций, а также приведено краткое содержание диссертации по главам.

В первой главе приведён обзор работ, посвящённых нестационарным задачам механики оболочек. Представлена общая постановка задачи о нестационарной динамике анизотропных упругих цилиндрических оболочек, даны уравнения движения для анизотропных упругих цилиндрических оболочек. Приведено описание начальных условий.

Во второй главе приведена общая постановка задачи о фундаментальных решениях для анизотропных цилиндрических оболочек. Построены нестационарные фундаментальные решения для неограниченных анизотропных цилиндрических оболочек. Построены фундаментальные решения для нормальных и тангенциальных перемещений тонкой упругой ортотропной свободно опертой цилиндрической оболочки. Дана оценка достоверности полученных решений. Продемонстрирована универсальность по отношению к типу симметрии упругой среды построенных нестационарных фундаментальных решений на численных примерах.

В третьей главе рассмотрена нестационарная динамика анизотропных неограниченных и ограниченных оболочек, а также оболочек с локальными опорами на произвольном контуре. Описана математическая модель и алгоритмы её решения как класса задач для цилиндрических оболочек с конструктивными особенностями. Приведены примеры расчётов процесса воздействия нестационарного нагружения разного рода на тонкую упругую анизотропную цилиндрическую оболочку с различными вариантами граничных условий. Выполнен анализ и верификация построенных решений.

Разработанные алгоритмы решения реализованы методами компьютерного вычисления при помощи языка программирования «Python».

ГЛАВА 1. ПОСТАНОВКА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

1.1. Современное состояние исследований

Пожалуй, первой попыткой вывода уравнений теории оболочек следует считать исследования Х. Арона, проведённые им ещё в конце XIX века, а именно, в 1874 году. Они основывались на уравнениях теории упругости и методе Кирхгофа. Последующее развитие теории оболочек получили благодаря трудам А. Лява, А. Бэссета, Х. Лэмба и других видных исследователей того времени. А. Ляв в своей теории использовал метод Кирхгофа – Геринга без обращения к гипотезам Кирхгофа. Данная теория сыграла важную роль в технике в дальнейшем, так как именно на неё опирались в течение долгого времени большинство авторов, которые работали в области расчёта оболочек.

По теориям тонких оболочек имеется большое количество исследований, изложенных в монографиях А. И. Лурье [80], Ю. Н. Работнова [99], В. З. Власова [22], В. М. Даревского [32 – 37], В. В. Новожилова [89], С. А. Амбарцумяна [5, 6], П. М. Огибалова [91], Э. И. Григолюка, П. П. Чулкова [29], А. А. Гольденвейзера [26], К. З. Галимова [25], П. А. Жилина [47], В. П. Шмакова [111] и других учёных.

А. И. Лурье в своей работе [80], в 1940 году, представил полную теорию оболочек в тензорном изложении, основываясь на гипотезах Кирхгофа – Лява. Автор не приводил точных решений и использовал асимптотические методы. Работы А. И. Лурье являлись фундаментом для дальнейших исследований других авторов.

В исследованиях Ю. Н. Работнова [99] 1946 года рассматривались задачи воздействия нормальной сосредоточенной силы на бесконечно длинную цилиндрическую оболочку. Автор, комбинируя частные решения однородного дифференциального уравнения теории пологих цилиндрических оболочек, установил характер функций напряжений и прогибов вблизи точки приложения

силы и получил выражения для наибольшего прогиба оболочки в замкнутом виде.

В своей монографии 1949 года В. З. Власов [22] представил теорию безмоментных оболочек, общую теорию оболочек, теорию и методы расчёта ортотропных оболочек средней длины. Сочетая методы сопротивления материалов, математической теории упругости и строительной механики, автор получил предельно простые и чёткие результаты в теории оболочек. Автор ввёл допущение, что при опущении в уравнениях равновесия и неразрывности деформации некоторых малых членов, которые имеют множителем Гауссову кривизну срединной поверхности, можно свести расчёт оболочки к решению системы из двух уравнений с двумя неизвестными.

В. М. Даревский в своих работах [32 – 37] 1950 – 1952 годов описал строгое решение основных дифференциальных уравнений теории цилиндрических оболочек при нагрузке, равномерно распределённой по прямоугольной области, принадлежащей внешней поверхности оболочки, ограниченной отрезками линий кривизны. При исследовании поведения оболочек при сосредоточенных воздействиях, для получения решений, осуществлялся предельный переход. Также автором было составлено строгое математическое обоснование операций, с помощью которых были получены решения. С учётом неограниченного возрастания значений искомых функций возле места приложения сосредоточенной нагрузки были введены асимптотические формулы, которые характеризуют поведение искомых функций в окрестности особых точек.

В исследованиях В. В. Новожилова [89, 90] (1948, 1991 г.) предлагался комплексный метод решения задач теории оболочек, который позволил упростить вид разрешающих уравнений. Для изотропных оболочек неизменной толщины данный метод позволял рассмотреть ряд конкретных проблем и задач линейной теории оболочек. Автор рассматривал вопросы условия реализации безмоментного напряжённого состояния в оболочке. В. В. Новожиловым был дан общий подход к проблеме деформаций гибких тел, в том числе оболочек.

Подход автора послужил толчком к интенсивному развитию геометрически нелинейных теорий оболочек.

В основе итерационной теории оболочек, описанной в 1957 году С. А. Амбарцумяном в [5], были заложены более жёсткие гипотезы. В ней не учитывались поперечная деформация и поперечное нормальное напряжение, при определении деформации сдвига использовались касательные напряжения, которые определялись по теории Кирхгофа – Лява. В работе [6] 1974 года С. А. Амбарцумян описал теорию для анизотропных оболочек, основываясь на гипотезах, предложенных В. В. Новожиловым [89].

Работа П. М. Огибалова [91] 1963 года была посвящена исследованию совместного воздействия температурных факторов и сверхзвукового потока на тонкостенные оболочки. Рассматривались динамические задачи и вопросы устойчивости оболочек в пределах и за пределом упругости материала. Разработан метод расчёта армированных конструкций, основанный на пренебрежении работой связующего и замене поверхности оболочки сеткой гибких несвязанных нитей.

Э. И. Григолюк и П. П. Чулков исследовали в [29] (1973 г.) трёхслойные конструкции и методы их расчёта при помощи теории прямых трёхслойных стержней и теории оболочек. В работе разрабатывалась теория пологих оболочек конечного прогиба, которая является обобщением классической теории пологих оболочек. Авторами развивалась теория полубезмоментных цилиндрических трёхслойных оболочек.

В своих исследованиях 1976 года А. А. Гольденвейзер [26] предложил новую формулировку кинематических и статических положений при помощи асимптотического анализа уравнений теории упругости. Автор получил отличные от А. И. Лурье соотношения упругости с учётом поперечной сжимаемости оболочки. Также А. А. Гольденвейзер ввёл основополагающие понятия показателя изменяемости напряжённо–деформированного состояния по пространственным координатам. В работах вводился малый безразмерный параметр отношения толщины оболочки к её характерному размеру при

построении двумерной теории оболочек. Это легло в основу итерационного процесса построения основных уравнений и соотношений, который приводит к двумерным теориям оболочек. В результате появилась возможность для асимптотической оценки погрешности двумерной теории пластин и оболочек, связанной со значениями показателей изменяемости напряжённо–деформированного состояния.

К. З. Галимов совместно с В.Н. Паймушиным и И. Г. Терегуловым в своём труде [25] 1996 года посвятили внимание разработке теорий и подходов к формулировкам и решениям краевых задач теории оболочек в геометрически нелинейной постановке. Была представлена теория конечных деформаций тонких оболочек при произвольных перемещениях. Значительное место уделено вариационным методам решения задач теории оболочек при больших прогибах. Были изложены основные группы соотношений нелинейной механики деформируемого твёрдого тела, выведены физические соотношения при конечных деформациях на основе термодинамических потенциалов. Также решались вопросы построения физических соотношений для анизотропных и композиционных материалов.

Будучи учеником А. И. Лурье, автор работы [47], П.А. Жилин, в 2006 году рассмотрел общую теорию простых оболочек, построил модели термоупругих оболочек постоянной толщины, двухслойных и трёхслойных тонких оболочек с симметрией строения из изотропных и ортотропных материалов. Приведённый в работе метод построения теории оболочек позволил исследовать оболочки сложного внутреннего строения в тех случаях, когда не применимы традиционные методы. Также автором было введено дополнение в алгебру тензоров – понятие ориентированных тензоров, то есть объектов, зависящих от выбора ориентации в трёхмерном пространстве и его подпространствах. Была сформулирована теория симметрии для ориентированных тензоров, обобщающая классическую теорию симметрии для евклидовых тензоров. Автор, сравнивая свой метод с некоторыми вариантами теории оболочек, показал, что для действительно тонких оболочек все варианты теории сопоставимы.

В работе В. П. Шмакова [111] 2011 года были изложены методики для расчёта свободных и вынужденных колебаний упругих оболочек, частично заполненных жидкостью и без неё. Условия закрепления оболочек принимались произвольными. Автор, опираясь на метод Бубнова – Галеркина, модифицировал метод решения краевой задачи при любых граничных условиях.

Исследованием процесса воздействия сил на цилиндрические оболочки занимались многие учёные двадцатого и двадцать первого века. Активная фаза этих исследований началась во второй половине двадцатого века, а интерес к подобному виду исследований не угасает у учёных и по сей день. Анализ работ по этому направлению показал, что преобладающее большинство исследований посвящено оболочкам, выполненным из изотропных, трансверсально–изотропных и ортотропных материалов.

Ю. П. Жигалко в своих работах [41, 42, 43] (1962, 1966 г), опираясь на изыскания В. З. Власова, А. Л. Гольденвейзера, В. М. Даревского, В. В. Новожилова, привёл некоторые возможные методы интегрирования уравнений равновесия тонких цилиндрических оболочек под действием локального и радиального нагружения, распределённого по направляющей окружности цилиндра. Также были приведены решения, полученные с применением аппарата дельта – функции и решения в двойных тригонометрических рядах для исследования изгиба изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек. В работе [44] автором были получены решения задачи об изгибе свободно опёртой цилиндрической оболочки, нагруженной различными по величине радиальными сосредоточенными силами, приложенными по концам одного диаметра. В дальнейших работах, совместно с Л. М. Дмитриевой [45, 46] (1971, 1975 г.), исследовалась реакция ортотропной слоистой цилиндрической оболочки на воздействие моментально приложенного давления, распределённого по малой прямоугольной площадке. Авторы в работах учитывали только поперечную составляющую сил инерции, а для нахождения прогиба в центре области приложения давления использовали функцию влияния. В работах также рассматривалось воздействие на оболочки из трансверсально–изотропных

материалов. Было замечено, что частоты и амплитуды возмущённого движения оболочки в значительной степени зависят от величины податливости к поперечному сдвигу, а ортотропия материала оказывает существенное влияние на величину напряжений.

Исследования Н. З. Якушева [113 – 115] (1960 – 1976 г.) были посвящены общим вопросам динамики тонких оболочек. В них были выведены динамические уравнения теории тонких оболочек при малых деформациях и произвольных изгибах исходя из принципа Гаусса – Остроградского. Также были получены динамические уравнения методом Бубнова – Галеркина. Из предположения, что изначально оболочка находится в безмоментном состоянии, автором был дан вывод уравнений динамической устойчивости, также была произведена оценка членов уравнения для различных типов колебаний. Был приведён интеграл уравнения движения непологих цилиндрических оболочек для различных граничных условий, учитывая тангенциальные силы инерции и скорости.

В. А. Никитин в своём исследовании [88] 1960 года вывел аналитические зависимости для определения перемещений, усилий и моментов, которые возникают в длинной цилиндрической оболочке при воздействии пары сосредоточенных сил, используя аппарат функции Грина. В качестве исходного уравнения автор использовал разрешающее уравнение в комплексной форме, соответствующее полубезмоментной теории. Для описания нагрузки использовалась дельта – функция.

Основываясь на работы В. М. Даревского, А. С. Христенко [110] в 1962 году получил асимптотические формулы для ортотропных цилиндрических оболочек, находящихся под действием сосредоточенных нагрузок, характеризующие поведения искомых функций. Для решения неоднородных уравнений автор использовал интеграл Фурье.

А. В. Агафоновым [3] в 1965 году была решена задача о воздействии радиальной сосредоточенной нагрузки, движущейся с постоянной скоростью вдоль образующей бесконечно длинной пологой цилиндрической оболочки в

линейной постановке. Результаты были получены в точках приложения нагрузок.

В своих работах [7 – 9] Ю. П. Артюхин (1966 – 1967 г.) представил метод расчёта пологих однослойных и многослойных ортотропных оболочек при действии на них локальных нагрузок. Метод подразумевал представление основных уравнений теории многослойных ортотропных оболочек в комплексной форме, нагрузка описывалась с помощью дельта – функции, решение уравнений строилось с помощью интегральных преобразований Фурье и Ханкеля. Были посчитаны максимальные прогибы ортотропных цилиндрических оболочек, возникающие от действия радиальной сосредоточенной силы, дан вывод асимптотических формул, характеризующих их напряжённо – деформированное состояние в точках приложения сил. Также автором показано, что при определении прогибов для достаточно тонких протяжённых цилиндрических оболочек можно вводить специальный модуль сдвига. Была установлена физическая аналогия между изотропным и ортотропным материалом: усреднённые механические характеристики ортотропного материала, соответствуют механическим характеристикам изотропного. Совместно с П. Г. Великановым в работах [16, 17] 2022 года авторами был описан метод комплексного представления уравнений общей теории ортотропных оболочек. Были существенно сокращены число неизвестных и порядок системы дифференциальных уравнений при помощи ввода комплексно–сопряжённых неизвестных функций. В случаях осесимметричного деформирования данные функции обнуляются, а в других случаях их влиянием можно пренебречь. Проверка предложенных методик была продемонстрирована на примере ортотропной сферической оболочки при воздействии распределённой нагрузки.

Работа 1968 года Н. А. Кильчевского [51] посвящена теории нестационарных динамических процессов в оболочках, основанной на методе Коши – Пуассона. Автор рассматривал аналитические методы построения эластостатических и эластодинамических систем уравнений теории оболочек, не

используя дополнительные предположения о деформировании оболочки и методы решения систем интегральных уравнений, приводя их к системам обыкновенных дифференциальных и алгебраических уравнений.

Х. М. Муштари и И. Г. Терегулов исследовали поведение ортотропных цилиндрических оболочек при внешнем воздействии. В работе [87] 1969 года описана теория пологих ортотропных оболочек. Авторы занимались качественными исследованиями и классификацией решений задач.

В исследовании Я. М. Григоренко [30] 1973 года развивался численный метод расчёта изотропных и конструктивно анизотропных слоистых оболочек вращения переменной жёсткости, находящихся под воздействием локальных нагрузок. Метод решения основан на использовании дельтаобразных последовательностей. Автором было установлено соответствие напряжённого состояния оболочки при разном подходе к заданию локальной нагрузки: с помощью ступенчатой функции и элемента дельтаобразной последовательности. Было исследовано влияние эффекта Гиббса на величины прогибов и напряжений в оболочке. Уравнения, полученные Я. М. Григоренко, решаются непрерывно при произвольной форме меридиана и не включают его кривизну и произвольную толщину оболочки. Граничные же условия накладываются прямо на перемещения и соответствующие усилия.

Вопросам воздействия локального и контактного нагружения на изотропные и ортотропные оболочки и пластинки посвящена монография С. Лукаевича [79] (1982 г.). Автором разработаны математические модели для описания поведения многослойных пластин и оболочек, находящихся под нагрузкой. Модели представлены системами уравнений в частных производных.

А. Е. Богданович [14, 15] (1983, 1987 г.) в своих работах изучал широкий круг проблем динамики ортотропных цилиндрических оболочек, их осесимметричное и неосесимметричное деформирование при продольном ударе. Также им было рассмотрено неосесимметричное деформирование при нестационарном внешнем давлении. Большое внимание в работах уделено выводу и анализу нелинейных уравнений движения ортотропных оболочек,

исследованию применимости модели Кирхгофа–Лява в задачах динамики. Изложены методы решения геометрически нелинейных задач динамики несовершенных цилиндрических оболочек. На их основе дана постановка задачи и разработаны методики анализа прочности цилиндрических оболочек из слоистых композитов при динамических сжимающих нагрузках.

Основываясь на работы своего учителя Ю. П. Артюхина, С. А. Кузнецов занимался решением контактных динамических задач. В работе [60] 1983 года, используя теорию оболочек с учётом местного поперечного обжатия тонкостенных элементов, автором предлагается метод решения интегральных уравнений двумерных контактных задач. Строится фундаментальное решение для неосесимметричной деформации круглой пластины, лежащей на упругом основании и осесимметричной неограниченной цилиндрической оболочки, при взаимодействии с жёсткой втулкой. Материал рассматриваемых элементов предполагался изотропным.

Работая над исследованием деформирования и прочности подкреплённых оболочек Т. Б. Кошкина [58] в 1984 году особое внимание уделила проблеме деформирования подкреплённых цилиндрических оболочек при действии динамических сжимающих нагрузок (осевого сжатия и внешнего давления). В работе были рассмотрены основные уравнения нелинейной теории слоистых ортотропных цилиндрических оболочек, подкреплённых рёбрами жёсткости и решены неосесимметричные задачи динамического выпучивания несовершенных ортотропных цилиндрических оболочек с кольцевыми рёбрами жёсткости с помощью метода Бубнова–Галеркина на основе многочисленной аппроксимации перемещений. Были разработаны методики решения неосесимметричных задач деформирования ортотропных цилиндрических оболочек, подкреплённых кольцевыми или продольными рёбрами жёсткости.

Р. А. Багдасарян [11] в 1985 году проводил исследования волновых процессов и напряжённо–деформированного состояния в конструктивно анизотропных цилиндрических оболочках, изготовленных из монослоёв ортотропного композиционного материала. В работе было определено поле

напряжений во вращающейся полубесконечной конструктивно анизотропной цилиндрической оболочке при её продольном ударе о жёсткую стенку.

В. П. Ольшанский в [93] (1989 г.) занимался разработкой эффективных аналитических методик расчёта перемещений и напряжений пологих оболочек при воздействии на них локализованных нагрузок. Обосновывалось применение интегральных преобразований Фурье для приближенного аналитического суммирования тригонометрических рядов. Полученные автором формулы учитывают размеры и форму области нагружения, форму срединной поверхности оболочки и закон распределения нагрузки. Также было доказана связь фундаментальных решений и функций Грина для свободно опертой цилиндрической панели.

В трудах В. А. Иванова и В. Н. Паймушина [48, 49] 1995 года были разработаны методики решения задач динамики оболочек типа Кирхгофа–Лява с трансверсально–мягким заполнителем, основанные на использовании численно–аналитических методов. Уравнения движения были построены при помощи вариационного принципа Остроградского–Гамильтона.

Исследования Ш. Д. Бердиева [13] 2000 года посвящены проблеме разработки новых моделей динамического деформирования упругих и вязкоупругих материалов с учётом ряда механических эффектов (частоты колебаний, фазовой скорости распространения волн в различных телах). Прделана работа по исследованию осесимметричных колебаний круговых цилиндрических оболочек с учётом влияния вращения и деформаций поперечного сдвига. Для реализации задач использовались уточнённые уравнения колебания относительно некоторого числа искомым функций времени, определённых в точках произвольной промежуточной поверхности слоя.

А. В. Сибиряков [101] в своей работе 2002 года по изучению динамики оболочек рассматривал тонкостенные однородные цилиндрические оболочки из композиционных материалов при импульсном воздействии. При поперечном динамическом нагружении компоненты напряжённо–деформированного

состояния имеют ярко выраженный волновой характер. Учёт его и являлся целью исследования. За модель композиционного материала принималась ограниченная слоистая среда, составленная из ортотропных упругих слоёв неизменной толщины. Нагрузкой являлся импульс внешнего или внутреннего давления.

Н. А. Абросимовым и В. Г. Баженовым [2] в 2002 году исследовалось физически–нелинейное динамическое поведение композитных оболочек, рассматривались теоретические основы построения неклассических математических моделей динамики однослойных и многослойных пластин и оболочек из традиционных и композитных материалов.

Труды Б. М. Сойкина [102, 103] (2004, 2012) посвящены исследованию напряжённно–деформированного состояния тонкостенных цилиндрических ортотропных оболочек при воздействии радиальной сосредоточенной нагрузки со стороны индентора. Была установлена бóльшая зависимость прогиба ортотропной оболочки от относительной толщины R/h , чем от относительной длины R/l . Также было выявлено, что при неизменных параметрах оболочки, прогиб тем меньше, чем больше отношение модулей упругости материала E_2/E_1 . Было определено, что напряжения в осевом направлении становятся пренебрежимо малыми уже на расстоянии более 5 толщин оболочки, а окружные – на расстоянии более 30 толщин.

О. И. Поддаева [98] в своей работе 2005 года затрагивала тему влияния продольно–радиальных колебаний на вязкоупругую цилиндрическую оболочку. Были сформулированы приближенные уравнения продольных колебаний цилиндрической оболочки и определена область их применения. В основе подхода к исследованию лежала концепция рассмотрения цилиндра как трёхмерного деформируемого тела. Решение трёхмерных уравнений динамики такого тела велось посредством применения интегральных преобразований Фурье и Лапласа, построения общих решений краевых задач в преобразованиях, разложения напряжённно–деформируемого состояния тела по степени радиальной координаты, определения искомым функций из трёхмерных

граничных условий при заданных внешних нестационарных усилиях и напряжениях.

И. Е. Козьма [53] в своих исследованиях 2007 года рассматривал метод расчёта неоднородных по толщине и трёхслойных цилиндрических оболочек средней толщины при нестационарном осесимметричном динамическом воздействии. В результате проделанных работ были получены точные аналитические решения осесимметричных нестационарных несамосопряжённых начально–краевых задач динамики для непрерывно неоднородных по толщине и трёхслойных (дискретно неоднородных) ортотропных круговых цилиндрических оболочек средней толщины при общих упругих условиях защемления торцов и произвольных осесимметричных динамических воздействиях. Подробно рассмотрен случай воздействия на внутреннюю поверхность оболочки внезапно приложенного равномерно распределённого скачка давления постоянной интенсивности.

Разработкой методов определения критических динамических нагрузок в ортотропных оболочках при сложном динамическом термосиловом нагружении в своей работе [61] занимались Е. А. Ларичев, В. С. Сафронов и И. К. Туркин в 2007 году. Авторами были представлены результаты численного решения дифференциальных уравнений для исследования динамического поведения цилиндрических оболочек.

Л. Ю. Коссович в [57] (2008 г.) исследовал асимптотические методы для построения математической модели нестационарных процессов в изотропных оболочках при ударных торцевых воздействиях. Были даны и описаны классификации асимптотических приближений и схемы расчленения нестационарного напряжённо–деформированного состояния в случаях ударных торцевых продольных воздействий нормального, изгибающего и тангенциального типа.

В работе [1] Р. А. Абрикаримовым и В. М. Жгутовым в 2010 году были разработаны математические модели и алгоритмы для решения нелинейных динамических задач колебаний ортотропных вязкоупругих пластин и оболочек с

переменной жёсткостью. Учитывалась геометрическая нелинейность и возможное развитие деформаций ползучести.

И. В. Викторов, используя гипотезы Кирхгофа–Лява, рассмотрел в [19] (2010 г.) осесимметричную деформацию тонкой композитной цилиндрической оболочки, имеющей изотропную упругую матрицу и нелинейно упругие нити в качестве армирования.

Вопросами воздействия нестационарных волн на изотропную цилиндрическую оболочку при поверхностных и торцевых ударах занимался О. В. Таранов [105] в 2010 году. В его работе развивается асимптотический подход к решению задач на основе символического метода А. И. Лурье [80] о нестационарных волновых процессах в оболочках. Проводились исследования при воздействиях торцевых на полубесконечную и ударных нормальных на лицевые поверхности бесконечной оболочки нагрузках. Автор описывал нестационарное волновое НДС оболочки при воздействии указанных нагрузок, в момент приложения которых в оболочке возникает система первичных продольных и поперечных волн, которые начинают распространяться вглубь неё. При этом первичные волны, взаимодействуя с лицевыми поверхностями, отражаются от них и порождают вторичные волны, таким образом, возникает сложная система волн, распространение которых и описывается в работе. Решение уравнений искалось с помощью метода двукратных интегральных преобразований (Лапласа по времени и Фурье по продольной координате).

В работе 2011 года Ю. П. Дьяченко, Э. Я. Еленицкого и Д. В. Петрова [39] предлагается методика точного, в рамках сформулированных в работе допущений, расчёта нестационарного динамического поведения пластин и цилиндрических оболочек, имеющих ступенчатое сечение. Авторами был предложен подход решения нестационарных задач динамики пластин и оболочек ступенчато–переменной толщины, позволяющий получать решение в замкнутой форме. Математически задача для составной конструкции описывалась как сумма задач для каждого отдельного её элемента.

Интегрирование начально–краевой задачи велось при помощи метода начальных параметров и метода конечных интегральных преобразований.

Ле Чунг Хиеу [62] в своём исследовании 2012 года рассматривал построение математических моделей определения НДС изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек переменной толщины на основе уточнённой, по отношению к классическим теориям Кирхгофа–Лява и Тимошенко–Рейснера, теории. Он также занимался исследованием НДС круговой цилиндрической оболочки постоянной и переменной толщины с типовыми краевыми условиями при действии локальных и распределённых нагрузок. Работа направлена на усовершенствование классических теорий типа Кирхгофа–Лява и Тимошенко–Рейснера, не пренебрегая поперечными деформациями. Автором сравнены результаты, полученные в его работе, с классической теорией оболочек. Также автором проведено сравнение результатов расчёта оболочек переменной толщины, изменяющейся симметрично и несимметрично относительно срединной поверхности. На основании полученных результатов установлено, что для оболочек одинаковой толщины, способ изменения толщины незначительно влияет на перемещения и максимальные значения нормальных напряжений, но существенно влияет на распределение напряжений по толщине оболочки.

А. Н. Тюреходжаев и В. Б. Рыстыгулова в работе [108] 2012 года занимались исследованием напряжённо–деформированного состояния изотропных цилиндрических оболочек постоянной и переменной толщины под действием распределённой по произвольной области нагрузки. Были получены аналитические решения задачи осесимметричного нагружения методом частичной дискретизации нелинейных дифференциальных уравнений и с помощью функции Мейснера–Лурье.

Работы Ю. И. Виноградова [20, 21] (2013, 2015 г.) посвящены исследованию деформирования изотропных и ортотропных оболочек локальными и радиальными силами. Проводилась оценка погрешности применения при расчётах сосредоточенных нагрузок вместо локального

воздействия на оболочку. Данная замена связана с упрощением расчёта, так как отпадает необходимость решения дифференциальных уравнений с правой частью, которая появляется при рассмотрении поверхностной нагрузки. Были получены формулы оценки погрешности, экспериментальные результаты и сделан вывод, что аналитический метод решения краевых задач при сосредоточенном воздействии на цилиндрические оболочки позволяет получать достоверные результаты с погрешностью не более 3 процентов на расстоянии от точки воздействия, не превышающего трёх толщин оболочки.

С. К. Ельмуратов и А. Е. Джахаев, работая над [40] в 2013 году, исследовали поведение гибких ортотропных пологих пластин и оболочек при действии на них поперечных динамических нагрузок. Расчёт производился при помощи метода конечных разностей, было показано увеличение прогибов и напряжений в местах приложения возмущающих сил.

Предметом исследования в работе 2014 года [50] В. В Карпова, А. А Семенова и Д. В. Холода являлась пологая ортотропная цилиндрическая оболочка из углепластика, находящаяся под действием равномерно распределённой поперечной нагрузки. Авторами исследовалась оболочка, шарнирно–неподвижно закреплённая по контуру. Исследование проводилось на основе математической модели с учётом поперечных сдвигов. Было замечено, что с ростом параметра кривизны оболочки уменьшается радиус кривизны, из-за чего происходит уменьшение амплитуд прогибов и напряжений.

Исследованием напряжённого состояния ортотропных цилиндрических оболочек при локальной нормальной нагрузке занимался Ву Ба Зуи [24] в 2015 году. В работе дан систематический анализ влияния показателя ортотропии на напряжённо–деформированное состояние оболочки при различных случаях нагружения. До этого стояла проблема определения НДС оболочек при произвольных нагрузках, так как она приводилась к решению дифференциальных уравнений восьмого порядка в частных производных. Высокий порядок служил тормозом на пути решения многих краевых задач для оболочечных конструкций, особенно из анизотропных материалов.

Воздействием подвижного радиального нагружения на изотропную цилиндрическую оболочку типа Тимошенко, подкреплённую кольцевыми рёбрами, занимался Ю. В. Мастиновский в работе [81] (2015 г.). Проведённые автором расчёты показали, что форма волнообразования существенно зависит от скорости движения нагрузки и параметров подкрепления.

Е. А. Коровайцева, Д. В. Тарлаковский и Г. В. Федотенков в своих работах 2016 года [56, 107] исследовали нестационарные задачи о воздействии давления на внешнюю поверхность изотропной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. Для решения задач использовались функции влияния.

В. В. Фирсановым и А. Х. Во в [109] (2018 г.) был рассмотрен вариант уточнённой теории расчёта напряжённо–деформированного состояния продольно подкреплённых ортотропных цилиндрических оболочек, находящихся под воздействием локальной осесимметричной нагрузки. В рассматриваемой теории перемещения оболочек аппроксимировались полиномами более высокой степени относительно классических теорий оболочек. Решение краевой задачи проводилось операционными методами с применением преобразований Лапласа. Авторами было исследовано влияние толщины оболочки, зоны локального нагружения и самой нагрузки на напряжённое состояние оболочки. Выявлено сильное влияние размеров зоны нагружения на напряжённо–деформированное состояние оболочки в зоне погранслоя, где поперечные нормальные напряжения возрастают в несколько раз.

Д. В. Тарлаковский и Г. В. Федотенков совместно с А. Ю. Митиным в [82] (2019 г.) и А. С. Оконечниковым в [92] (2020 г.) исследовали пространственные нестационарные контактные задачи для круговых изотропных цилиндрических оболочек и твёрдого тела. Подход к решению основывался на принципе суперпозиции и методе функции влияния.

К. А. Кудачёва, А. А. Сопенко и А. Г. Теряев, работая над [59] в 2020 году, рассмотрели задачи о колебаниях пологих изотропных оболочек типа Кирхгофа–Лява при действии на них распределённой нагрузки. Предполагалось, что

оболочка шарнирно опёрта на гибкие и нерастяжимые в касательной плоскости ребра. Показано, что форма колебаний в оболочках существенно зависит от их геометрии, в частности их кривизны.

Касательно исследования изотропных и ортотропных оболочек также стоит отметить некоторые англоязычные работы. J. C. Yao в [146] (1966 г.) занимался аналитическими и экспериментальными исследованиями ортотропных цилиндрических оболочек при локальных ударных нагрузках. I. K. McIvor и E. G. Lovell в [133] (1968 г.) исследовали воздействие нестационарного радиального импульсного нагружения на цилиндрическую оболочку конечной длины.

Работа M. G. Cottis [118] 1968 года посвящена рассмотрению динамического отклика тонкой, ортотропной цилиндрической оболочки конечной длины на внешнее давление, которое прикладывалось произвольным пространственным распределением и временной зависимостью. Ядром решения являлась функция Грина, которая имела ту же форму, что и для изотропной оболочки. Был сделан вывод, что благодаря данной инвариантности функции Грина по отношению к свойствам материала, любое решение о воздействии на оболочку нагрузки справедливо как для изотропной, так и для ортотропной оболочки при замене некоторых констант.

В работе R. Z. Chaudhuri, K. Balaraman и V. X. Kunukkasseril [117] 1986 года рассматривалась произвольная анизотропная цилиндрическая оболочка конечной длины, находящаяся под равномерным внутренним давлением. Исследование проводилось с использованием кинематических соотношений классических теорий оболочек. Было показано, что решение для несимметрично слоистых ортотропных оболочек является частным случаем решения в замкнутой форме, полученного в данной статье.

Исследование T. Kant [126] (1991 г.) затрагивало поведение симметричных и несимметричных ортотропных слоистых цилиндрических оболочек при внешнем воздействии. Была разработана теория, учитывающая реалистичное

нелинейное изменение перемещений по толщине оболочки и исключая поправки сдвига. Решения были получены для тонких и толстых оболочек.

Hung Sying Jing, Kuan Goang Tzeng в работе [124] (1993 г.) и M. Ganapathi, T. K. Varadan в [120] (1995 г.) рассматривали осесимметричные задачи композитных оболочек конечной длины с произвольными углами укладки слоёв. Предполагалось, что оболочка свободно оперта с обоих концов и на её внешнюю поверхность действует произвольная, равномерно распределённая нагрузка. Дифференциальные уравнения сводились к обыкновенным с переменными коэффициентами с помощью выбора решения, состоящего из тригонометрических функций вдоль оси и разбиения по слоям. Было выявлено заметное влияние эффекта сдвига в краевой области и существенное влияние начальной кривизны на распределение напряжений.

Работая над [141], V. P. Singh, J. P. Dwivedi и P. C. Upadhyay в 1999 году исследовали неосесимметричный динамический отклик ортотропных цилиндрических оболочек, находящихся в однородной упругой изотропной среде, при воздействии движущейся вдоль оси нагрузки. Было выявлено влияние ортотропии оболочки путём варьирования безразмерных параметров материала. R. Okhovat и A. Boström в своей работе [136] 2014 года определяли уравнения динамики для ортотропных цилиндрических оболочек методом разложения в степенной ряд по координате толщины оболочки для компонент перемещений.

X. Nan и D.L. Xu в [123] (2001 г.) занимались методами анализа переходных волн в композитных цилиндрических оболочках, возбуждаемых ударным точечным нагружением. Был предложен метод, соединивший в себе метод конечных элементов и интегральных преобразований Фурье. Для построения приближенных уравнений динамического равновесия был использован принцип Гамильтона.

Динамическим нагружением ортотропных круговых цилиндрических оболочек, находящихся под действием внешнего гидростатического давления занимались X. Li, Y. Chen в [127] (2002 г.). Были получены уравнения движения для переходного процесса, также было выявлено, что в более коротких

оболочках наблюдается большая реакция на внешнее воздействие и то, что в начальный момент отклика на воздействие существует стадия нарастания.

Работа [135] А. Okasha Elnady и Н. М. Negm 2004 года посвящена анализу воздействия внутреннего давления на слоистые композитные цилиндрические оболочки конечной длины в рамках классических теорий оболочек. Аналитическое решение было представлено с помощью простой матричной формулировки рядов Чебышева для функций перемещений и их производных.

Е. А. Magliula совместно с J. G. McDaniel в работе 2012 года [131] занимались разработкой волнового анализа функции Грина для слоистых композитных цилиндрических оболочек. Отклик задавался в виде суммы волн, распространяющихся в осевом направлении. Каждый слой оболочки предполагался линейным и упругим. Использовалась дискретизация по радиальной координате и разложение в ряд Фурье по окружной координате. Полученный подход применим для оболочек произвольной толщины. Авторами было выявлено влияние ориентации укладки волокон на функцию Грина.

J. M. Renno, B. R. Mace [140], Isa Ahmadi, Mahsa Najafi [125], P. Z. Lugovoi, V. F. Meish, S. P. Orlenko [130] в 2014 – 2020 годах занимались в своих работах разработкой численных методов решения задач о динамическом воздействии на изотропные, трансверсально–изотропные и ортотропные цилиндрические оболочки. Были приведены результаты расчёта перемещений, напряжений, деформаций и сравнение с экспериментальными данными.

Трудов, посвящённых исследованию оболочек из анизотропных материалов, существенно меньше. Среди отечественных учёных, занимавшихся анизотропными оболочками и пластинками, стоит выделить С. А. Амбарцумяна [6], Р. А. Багдасаряна [11], С. Г. Лехницкого [63] и Л. А. Мовсисяна [85], заложивших фундамент для будущих исследований в этом направлении.

В своей работе 1959 года Л. А. Мовсисян [85] занимался решением задач прочности симметрично нагруженной анизотропной цилиндрической оболочки. Были произведены сравнения характера результатов для изотропных и ортотропных оболочек. Выявлено, что при полной симметрии задачи, при

действии симметричной нагрузки по нормали, цилиндрическая оболочка претерпевает деформации кручения и сдвига.

Р. М. Алоян [4] в своей работе 1998 года проводил исследования поведения анизотропных пластин, оболочек цилиндрической и сферической формы при воздействии на их наружную поверхность кратковременной нагрузки, закон изменения которой в каждой точке образующих одинаков. Также автором рассматривалась задача о деформации кругового анизотропного кольца (в его плоскости) под действием ударно-импульсного нагружения заданной формы, представляемой в виде тригонометрического ряда Фурье по угловой координате с известными числовыми коэффициентами. Так же было рассмотрено влияние осесимметричного нагружения внутренней поверхности на удлиненную цилиндрическую оболочку.

Работа К. А. Моисеева и Ю. Н. Панова [86] (2011 г.) посвящалась исследованию динамического поведения подкреплённой анизотропной цилиндрической оболочки, находящейся под действием осесимметричной нагрузки. Нагрузка предполагалась движущейся по внутренней поверхности оболочки вдоль образующей. Исследование проводилось комбинационным методом, который позволил получить аналитическое решение системы дифференциальных уравнений в частных производных. Авторами сделаны выводы о том, что влияние подвижной сосредоточенной нагрузки на динамику подкреплённой тонкой цилиндрической оболочки нужно учитывать, когда отношение радиуса оболочки к её длине находится в пределах $1/20$.

N. J. Paganò в 1972 году в своей работе [137] рассматривал напряжённо-деформированное состояние полой цилиндрической анизотропной оболочки при постоянном нагружении. Полученное автором решение является достаточно общим и его можно распространить на цилиндрические оболочки из композитных материалов.

Исследования А. М. Zenkour [147] 2004 года касались статических и динамических реакций тонких и умеренно толстых оболочек из моноклинного анизотропного материала на действие равномерно распределённой поперечной

нагрузки. Были представлены решения задач с использованием смешанной вариационной формулы и модели смешанного сдвигового деформирования. Произведено сравнение численных результатов уточнённой автором теории с результатами, полученными по классической теории оболочек.

В работе М. Rajabi, М. Behzad [139] 2014 года рассматривалось взаимодействие плоской поступательной волны, падающей под произвольным углом на анизотропную цилиндрическую оболочку. Оболочка полагалась погруженной в идеальную жидкость. Для верификации полученного решения были рассмотрены характеристики распространения волн в анизотропной оболочке и имеющиеся решения других авторов.

Л. Aghalovyan в [116] (2015 г.) разработал последовательную теорию для тонких анизотропных оболочек на основе асимптотического анализа трёхмерных уравнений линейной упругости. В монографии исследованы общие краевые задачи, в том числе, связанные с упругими основаниями.

Работа М. V. Marchuk и R. I. Tucharskii [132] 2017 года посвящалась динамике геометрически нелинейных упругих анизотропных оболочек переменной толщины. Авторами была построена теория динамического упругого геометрически нелинейного деформирования. Предполагалось, что оболочки несимметричны относительно срединной поверхности. Уравнения движения и соответствующие граничные условия были получены с помощью вариационного принципа Остроградского–Гамильтона с учётом изменения метрики по толщине.

В статье Х. Ху, В. Karami, М. Janghorban [145] (2021 г.) авторами уделялось внимание динамике анизотропных наноболочек. Рассматривалась наноболочка, изготовленная из арагонита с орторомбической кристаллической системой. Управляющие уравнения и граничные условия получены с использованием принципа Гамильтона. Динамическая задача решалась аналитически на основании метода Навье. Для удовлетворения граничных условий на рёбрах был применён двойной ряд Фурье.

Вывод. Приведённый обзор не претендует на полноту включённых работ, однако демонстрирует широкий спектр проведённых исследований и полученных результатов, касающихся процессов деформирования в изотропных, трансверсально–изотропных и ортотропных цилиндрических оболочках. Из обзора видно, что большинство работ посвящено осесимметричному нестационарному деформированию ортотропных оболочек или изотропных оболочек с подкреплениями. Также много работ посвящено ортотропным и изотропным оболочкам при торцевом нестационарном нагружении. Случай воздействия нормальной подвижной нагрузки на анизотропную оболочку рассмотрен в осесимметричной постановке. Исследование нестационарного деформированного состояния анизотропных оболочек в двумерной постановке существуют и построены с применением метода конечных элементов (МКЭ). В целом, вопросы нестационарной динамики для упругих анизотропных оболочек остаются недостаточно хорошо изученными.

1.2. Постановка задачи нестационарной динамики анизотропных упругих оболочек

Объектами исследования являются:

– Неограниченная тонкая упругая цилиндрическая оболочка постоянной толщины на основе гипотез Кирхгофа–Лява (далее оболочка Кирхгофа–Лява) (Рисунок 1).

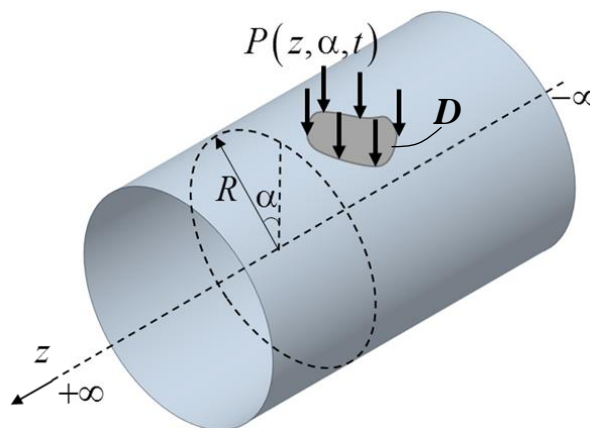


Рисунок 1 – Неограниченная цилиндрическая оболочка

– Участок тонкой упругой цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява постоянной толщины, образованный последовательностью произвольно расположенных локальных опор (Рисунок 2).

В качестве локальных опор выступают шарнирно подвижные опоры и скользящие заделки.

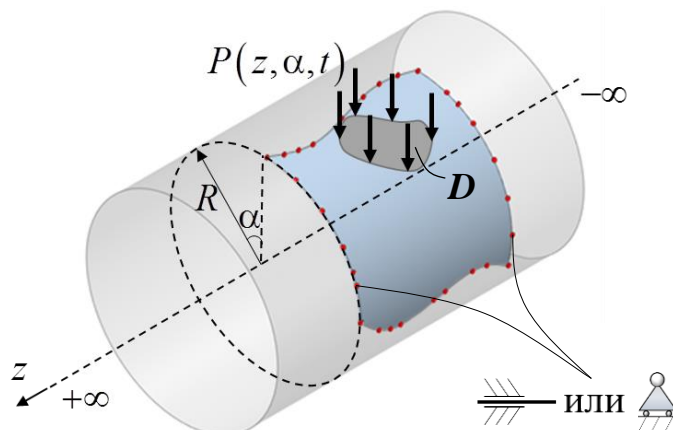


Рисунок 2 – Участок цилиндрической оболочки

Примером приведённой на рисунке 2 расчётной схемы может служить конструкция цилиндрической оболочки, представленная на рисунке 3.

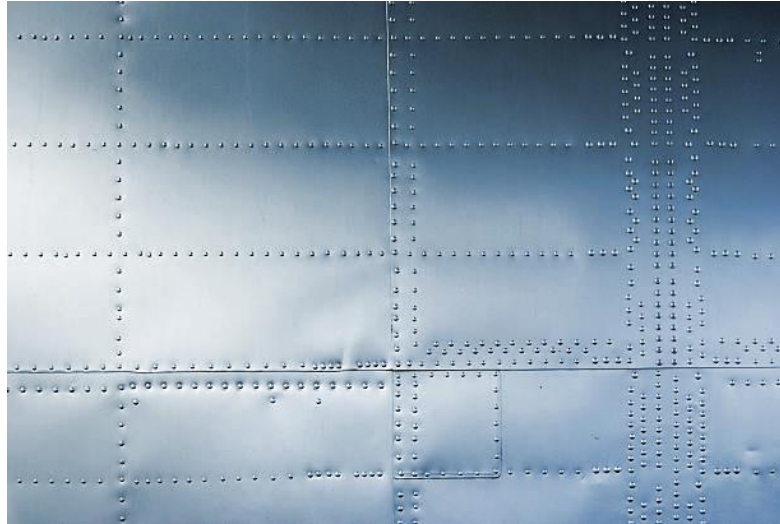


Рисунок 3 – Конструкция цилиндрической оболочки с локальными опорами

Материал цилиндрической оболочки упругий и анизотропный. Рассматривается случай анизотропии, при котором упругая среда имеет одну поверхность симметрии, совпадающую со срединной поверхностью оболочки.

На внешнюю поверхность оболочки воздействует нестационарная нагрузка $p(\alpha, z, t)$, распределённая по произвольной области D , принадлежащей внешней поверхности оболочки.

$$p(\alpha, z, t) = P(\alpha, z, t)H(t)\theta(D), \quad (1.2.1)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда, а $\theta(D)$ – характеристическая функция множества D :

$$\theta(D) = \begin{cases} 1, M \in D \\ 0, M \notin D, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

где $M(\alpha, z)$ – точка внешней поверхности оболочки.

В работе рассматривается несколько вариантов нестационарного нагружения: неподвижная и движущаяся сосредоточенная нагрузка, совокупности неподвижных и движущихся сосредоточенных нагрузок, неподвижная и движущаяся распределённая по прямоугольной области нагрузка.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругих оболочек Кирхгофа–Лява, соответствующие геометрические и физические соотношения с учётом анизотропии материала, начальные и граничные условия.

Основными целями работы являются:

- разработка математической модели, методов и алгоритмов решения задач для исследования нестационарной динамики анизотропных упругих цилиндрических оболочек с локальными опорами;

- определение нормальных перемещений, напряжений и деформаций в рассматриваемых конструктивных вариантах цилиндрических оболочек в зависимости от времени при воздействии нестационарного нагружения $p(\alpha, z, t)$.

1.3. Уравнения движения анизотропной цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява

Будем полагать, что срединная поверхность оболочки задана параметрически:

$$\Pi: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2), (\xi^1, \xi^2) \in D_\xi, \quad (1.3.1)$$

где ξ^1, ξ^2 – криволинейные координаты, \mathbf{r} – радиус–вектор, D_ξ – область в двумерном пространстве R_ξ^2 , которое в каждой точке $M(\xi^1, \xi^2) \in \Pi$ характеризуется базисом

$$\mathfrak{a}_i = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi^i}, \quad i = 1, 2, \quad (1.3.2)$$

метрическим тензором

$$g_{ij} = (\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_j), \quad i, j = 1, 2, \quad (1.3.3)$$

и тензором кривизны

$$b_{ij} = \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_i}{\partial \xi^j}, \mathbf{n} \right) = \left(\frac{\partial \mathfrak{a}_j}{\partial \xi^i}, \mathbf{n} \right), \quad (1.3.4)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к срединной поверхности.

Предполагаем, что толщина цилиндрической оболочки h постоянная:

$$h = \text{const}, \quad (1.3.5)$$

и оболочка является тонкой, то есть:

$$\frac{h}{L} \ll 1, \quad (1.3.6)$$

где L – характерный линейный размер цилиндрической оболочки.

Будем считать, что материал цилиндрической оболочки является упругим и анизотропным и обладает симметрией относительно срединной поверхности, что эквивалентно следующим равенствам для компонентов тензора упругих постоянных:

$$C^{3jkl} = C^{333l} = 0. \quad (1.3.7)$$

Кроме того, компоненты тензора упругих постоянных имеют симметрию по верхним индексам:

$$C^{ijkl} = C^{jikl} = C^{ijlk} = C^{klij}. \quad (1.3.8)$$

С учётом (1.3.7) и свойств симметрии тензор упругих постоянных для среды обладающей симметрией относительно срединной поверхности оболочки примет вид:

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & c_{36} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{54} & c_{55} & 0 \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (1.3.9)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= C^{1111}, c_{12} = C^{1122}, c_{13} = C^{1133}, c_{16} = C^{1112}, \\ c_{21} &= C^{2211}, c_{22} = C^{2222}, c_{23} = C^{2233}, c_{26} = C^{2212}, \\ c_{31} &= C^{3311}, c_{32} = C^{3322}, c_{33} = C^{3333}, c_{36} = C^{3312}, \\ c_{44} &= C^{2323}, c_{45} = C^{2313}, c_{54} = C^{1323}, c_{55} = C^{1313}, \\ c_{61} &= C^{1211}, c_{62} = C^{1222}, c_{63} = C^{1233}, c_{66} = C^{1212}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Здесь C^{ijkl} – компоненты этого тензора в системе координат $\xi^1, \xi^2, \xi^3 = \zeta$, которая вводится следующим образом:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\xi^1, \xi^2) + \zeta \mathbf{n}, \quad (\xi^1, \xi^2) \in D_\xi, \quad -\frac{h}{2} \leq \zeta \leq \frac{h}{2}, \quad (1.3.11)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к срединной поверхности Π :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}, \quad \mathbf{N} = [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2], \quad |\mathbf{N}|^2 = g = \det(g_{ij}). \quad (1.3.12)$$

Далее рассмотрим модель тонких линейно упругих однородных оболочек типа Кирхгофа–Лява. При этом ограничимся изотермическими и адиабатическими процессами.

В этой модели предполагается, что прямолинейное нормальное к срединной поверхности волокно остаётся прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности, а скорость поворота нормального волокна и обусловленные поворотом инерционные силы пренебрежимо малы.

Система уравнений Кирхгофа–Лява включает:

– уравнения движения [27]

$$\begin{aligned}\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b_{ij} T^{ij} + \nabla_j \nabla_k M^{kj} + p, \\ \rho h \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} &= \nabla_j T^{ji} - b_j^i \nabla_k M^{kj} + q^i;\end{aligned}\tag{1.3.13}$$

– физические соотношения для анизотропного материала [27]

$$M^{ij} = IC^{ijkl} \kappa_{kl}, \quad T^{ij} = \tilde{T}^{ij} + b_k^i M^{kj}, \quad \tilde{T}^{ij} = hC^{ijkl} \varepsilon_{kl};\tag{1.3.14}$$

– кинематические соотношения [27]

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - b_{ij} w, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i) + \frac{1}{2} (b_i^k \nabla_k u_j + b_j^k \nabla_k u_i) - c_{ij} w, \\ c_{ij} &= b_i^k b_{kj}, \quad \vartheta_i = -\nabla_i w - b_i^k u_k.\end{aligned}\tag{1.3.15}$$

К этой системе добавляем связь перерезывающих сил с изгибающими моментами [27]

$$Q^i = \nabla_j M^{ij}.\tag{1.3.16}$$

В формулах (1.3.13) – (1.3.16):

ρ – плотность материала;

h – толщина оболочки;

w – нормальное перемещение;

t – время;

∇_i – оператор ковариантного дифференцирования в касательном пространстве R_ξ^2 ;

Q^i – компоненты вектора перерезывающей силы;

p – нагрузка;

q^i – компоненты вектора тангенциальной нагрузки;

$I = \frac{h^3}{12}$ – погонный момент инерции;

\mathfrak{g}_i – компоненты вектора углов отклонения нормального к деформированной срединной поверхности вектора в тонкой оболочке;

M^{ij} – компоненты тензора погонных изгибающих моментов;

C^{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных;

κ_{ij} – компоненты тензора изменения кривизны;

ε_{ij} – компоненты тангенциальных деформаций;

T^{ij} – компоненты тензора тангенциальных усилий;

\tilde{T}^{ij} – компоненты симметричного тензора тангенциальных усилий;

u_i – компоненты вектора тангенциальных перемещений;

b_{ij} – компонент тензора кривизны.

При этом:

$\mathbf{Q} = Q^i \mathfrak{e}_i$ – вектор перерезывающих сил;

$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^i \mathfrak{e}_i$ – вектор отклонения нормального к деформированной срединной

поверхности вектора \mathbf{n}_* от вектора \mathbf{n} ;

$\mathbf{M} = M^{ij} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_j$ – тензор погонных изгибающих моментов;

$\mathbf{\kappa} = \kappa_{ij} \mathfrak{e}^i \mathfrak{e}^j$ – тензор изменения кривизны;

$\mathbf{T} = T^{ij} \mathfrak{e}_i \mathfrak{e}_j$ – тензор тангенциальных усилий.

Система уравнений (1.3.13) – (1.3.16) имеет параболический тип. Для постановки соответствующей начальной задачи к ней необходимо добавить начальные условия:

$$u_i|_{t=0} = u_{0i}, \quad \frac{\partial u_i}{\partial t}\bigg|_{t=0} = u_{0i}, \quad w|_{t=0} = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}\bigg|_{t=0} = w_0. \quad (1.3.17)$$

Уравнения движения упругих оболочек с учётом симметрии материала.

Уравнения движения:

Первое уравнение из (1.3.13) представим как:

$$\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = b_{11}T^{11} + b_{12}T^{12} + b_{21}T^{21} + b_{22}T^{22} + \nabla_1 \nabla_1 M^{11} + 2\nabla_1 \nabla_2 M^{12} + \nabla_2 \nabla_2 M^{22} + p. \quad (1.3.18)$$

Так как, согласно [28]

$$\nabla_k \nabla_l M^{ij} = \frac{\partial \nabla_l M^{ij}}{\partial \xi^k} + \Gamma_{mk}^i \nabla_l M^{mj} + \Gamma_{mk}^j \nabla_l M^{im} - \Gamma_{kl}^m \nabla_m M^{ij},$$

или при $k = j, l = i$:

$$\nabla_j \nabla_i M^{ij} = \frac{\partial \nabla_i M^{ij}}{\partial \xi^j} + \Gamma_{mj}^i \nabla_i M^{mj} + \Gamma_{mj}^j \nabla_i M^{im} - \Gamma_{ij}^m \nabla_m M^{ij},$$

где Γ_{jk}^i – символы Кристоффеля второго рода.

Двойные ковариантные производные в (1.3.18) примут вид:

$$\nabla_1 \nabla_1 M^{11} = \frac{\partial \nabla_1 M^{11}}{\partial \xi^1} + 2\Gamma_{21}^1 \nabla_1 M^{12} + \Gamma_{11}^1 \nabla_1 M^{11} - \Gamma_{11}^2 \nabla_2 M^{11}, \quad (1.3.19)$$

$$\nabla_1 \nabla_2 M^{21} = \frac{\partial \nabla_2 M^{21}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^2 \nabla_2 M^{11} + \Gamma_{11}^1 \nabla_2 M^{21} + \Gamma_{21}^1 \nabla_2 M^{22} - \Gamma_{21}^1 \nabla_1 M^{21}, \quad (1.3.20)$$

$$\nabla_2 \nabla_1 M^{12} = \frac{\partial \nabla_1 M^{12}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{22}^1 \nabla_1 M^{22} + \Gamma_{12}^2 \nabla_1 M^{11} + \Gamma_{22}^2 \nabla_1 M^{12} - \Gamma_{12}^2 \nabla_2 M^{12}, \quad (1.3.21)$$

$$\nabla_2 \nabla_2 M^{22} = \frac{\partial \nabla_2 M^{22}}{\partial \xi^2} + 2\Gamma_{12}^2 \nabla_2 M^{12} + \Gamma_{22}^2 \nabla_2 M^{22} - \Gamma_{22}^1 \nabla_1 M^{22}, \quad (1.3.22)$$

где, согласно [28], ковариантные производные контравариантного тензора

$$\nabla_l M^{ik} = \frac{\partial M^{ik}}{\partial \xi^l} + \Gamma_{ml}^i M^{mk} + \Gamma_{ml}^k M^{im}.$$

Тогда ковариантные производные в (1.3.19) – (1.3.22) примут вид:

$$\begin{aligned} \nabla_1 M^{11} &= \frac{\partial M^{11}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^1 M^{11} + \Gamma_{21}^1 M^{21} + \Gamma_{11}^1 M^{11} + \Gamma_{21}^1 M^{12}, \\ \nabla_2 M^{22} &= \frac{\partial M^{22}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 M^{12} + \Gamma_{22}^2 M^{22} + \Gamma_{12}^2 M^{21} + \Gamma_{22}^2 M^{22}, \\ \nabla_1 M^{12} &= \frac{\partial M^{12}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^1 M^{12} + \Gamma_{21}^1 M^{22} + \Gamma_{11}^2 M^{11} + \Gamma_{21}^2 M^{12}, \\ \nabla_2 M^{21} &= \frac{\partial M^{21}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 M^{11} + \Gamma_{22}^2 M^{21} + \Gamma_{12}^1 M^{21} + \Gamma_{22}^1 M^{22}, \\ \nabla_1 M^{22} &= \frac{\partial M^{22}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^2 M^{12} + \Gamma_{21}^2 M^{22} + \Gamma_{11}^2 M^{21} + \Gamma_{21}^2 M^{22}, \\ \nabla_2 M^{11} &= \frac{\partial M^{11}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 M^{11} + \Gamma_{22}^2 M^{21} + \Gamma_{12}^2 M^{21} + \Gamma_{22}^2 M^{22}. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Второе уравнение из (1.3.13) представим как:

$$\rho h \frac{\partial^2 u^1}{\partial t^2} = \nabla_1 T^{11} + \nabla_2 T^{21} - \left(b_1^1 \nabla_1 M^{11} + b_1^1 \nabla_2 M^{21} + b_2^1 \nabla_1 M^{12} + b_2^1 \nabla_2 M^{22} \right) + q^1, \quad (1.3.24)$$

где

$$\nabla_1 T^{11} = \frac{\partial T^{11}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \Gamma_{21}^1 T^{21} + \Gamma_{11}^1 T^{11} + \Gamma_{21}^1 T^{12}, \quad (1.3.25)$$

$$\nabla_2 T^{21} = \frac{\partial T^{21}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 T^{11} + \Gamma_{22}^2 T^{21} + \Gamma_{12}^1 T^{21} + \Gamma_{22}^1 T^{22}.$$

Третье уравнение:

$$\rho h \frac{\partial^2 u^2}{\partial t^2} = \nabla_1 T^{12} + \nabla_2 T^{22} - b_1^2 \nabla_1 M^{11} - b_1^2 \nabla_2 M^{21} - b_2^2 \nabla_1 M^{12} - b_2^2 \nabla_2 M^{22} + q^2, \quad (1.3.26)$$

где

$$\begin{aligned} \nabla_1 T^{12} &= \frac{\partial T^{12}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^1 T^{12} + \Gamma_{21}^1 T^{22} + \Gamma_{11}^2 T^{11} + \Gamma_{21}^2 T^{12}, \\ \nabla_2 T^{22} &= \frac{\partial T^{22}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 T^{12} + \Gamma_{22}^2 T^{22} + \Gamma_{12}^1 T^{21} + \Gamma_{22}^1 T^{22}. \end{aligned} \quad (1.3.27)$$

Кинематические соотношения согласно [27]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i u_j + \nabla_j u_i) - b_{ij} w, \\ \kappa_{ij} &= \frac{1}{2} (\nabla_i \vartheta_j + \nabla_j \vartheta_i) + \frac{1}{2} (b_i^k \nabla_k u_j + b_j^k \nabla_k u_i) - a_{ij} w, \\ a_{ij} &= b_i^k b_{kj}, \quad \vartheta_i = -\nabla_i w - b_i^k u_k. \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Тангенциальные деформации из (1.3.28) представим как:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{2} (\nabla_1 u_1 + \nabla_1 u_1) - b_{11} w, \quad \varepsilon_{12} = \frac{1}{2} (\nabla_1 u_2 + \nabla_2 u_1) - b_{12} w, \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{2} (\nabla_2 u_1 + \nabla_1 u_2) - b_{21} w, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{2} (\nabla_2 u_2 + \nabla_2 u_2) - b_{22} w. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Так как, согласно [28]:

$$\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j}{\partial \xi^i} - \Gamma_{ji}^k u_k, \quad (1.3.30)$$

ковариантные производные из (1.3.29) примут вид:

$$\begin{aligned}\nabla_1 u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2, & \nabla_1 u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \Gamma_{21}^1 u_1 - \Gamma_{21}^2 u_2, \\ \nabla_2 u_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} - \Gamma_{12}^1 u_1 - \Gamma_{12}^2 u_2, & \nabla_2 u_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2.\end{aligned}\tag{1.3.31}$$

Тангенциальные деформации с учётом (1.3.31) примут вид (с учётом симметрии символов Кристоффеля второго рода по нижним индексам $\Gamma_{ji}^k = \Gamma_{ij}^k$):

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 - b_{11} w, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} - 2\Gamma_{12}^1 u_1 - 2\Gamma_{12}^2 u_2 \right) - b_{12} w, \\ \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2 - b_{22} w.\end{aligned}\tag{1.3.32}$$

Компоненты тензора изменения кривизны из (1.3.28) представим:

$$\begin{aligned}\kappa_{11} &= \frac{1}{2} (\nabla_1 \vartheta_1 + \nabla_1 \vartheta_1) + \frac{1}{2} (b_1^1 \nabla_1 u_1 + b_1^1 \nabla_1 u_1 + b_1^2 \nabla_2 u_1 + b_1^2 \nabla_2 u_1) - a_{11} w, \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{2} (\nabla_1 \vartheta_2 + \nabla_2 \vartheta_1) + \frac{1}{2} (b_1^1 \nabla_1 u_2 + b_2^1 \nabla_1 u_1 + b_1^2 \nabla_2 u_2 + b_2^2 \nabla_2 u_1) - a_{12} w, \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{2} (\nabla_2 \vartheta_2 + \nabla_2 \vartheta_2) + \frac{1}{2} (b_2^1 \nabla_1 u_2 + b_2^1 \nabla_1 u_2 + b_2^2 \nabla_2 u_2 + b_2^2 \nabla_2 u_2) - a_{22} w,\end{aligned}\tag{1.3.33}$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= b_1^1 b_{11} + b_1^2 b_{21}, & a_{12} &= b_1^1 b_{12} + b_1^2 b_{22}, & a_{22} &= b_2^1 b_{12} + b_2^2 b_{22}, \\ \vartheta_1 &= -\nabla_1 w - b_1^1 u_1 - b_1^2 u_2, & \vartheta_2 &= -\nabla_2 w - b_2^1 u_1 - b_2^2 u_2.\end{aligned}\tag{1.3.34}$$

Ковариантные производные, входящие в (1.3.33) и (1.3.34):

$$\begin{aligned}\nabla_1 \vartheta_1 &= \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{11}^1 \vartheta_1 - \Gamma_{11}^2 \vartheta_2, & \nabla_1 \vartheta_2 &= \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^1} - \Gamma_{21}^1 \vartheta_1 - \Gamma_{21}^2 \vartheta_2, \\ \nabla_2 \vartheta_1 &= \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^2} - \Gamma_{12}^1 \vartheta_1 - \Gamma_{12}^2 \vartheta_2, & \nabla_2 \vartheta_2 &= \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^2} - \Gamma_{22}^1 \vartheta_1 - \Gamma_{22}^2 \vartheta_2.\end{aligned}\tag{1.3.35}$$

$$\nabla_1 w = \frac{\partial w}{\partial \xi^1}, \quad \nabla_2 w = \frac{\partial w}{\partial \xi^2}. \quad (1.3.36)$$

Компоненты вектора углов отклонения нормального к деформированной срединной поверхности вектора в тонкой оболочке с учётом (1.3.36) примут вид:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial \xi^1} - b_1^1 u_1 - b_1^2 u_2, \\ \vartheta_2 &= -\frac{\partial w}{\partial \xi^2} - b_2^1 u_1 - b_2^2 u_2. \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

Тогда компоненты тензора изменения кривизны с учётом (1.3.31), (1.3.35) и свойств симметрии символов Кристоффеля по нижним индексам:

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{11}^1 \vartheta_1 - \Gamma_{11}^2 \vartheta_2 + b_1^1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 \right) + b_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} - \Gamma_{12}^1 u_1 - \Gamma_{12}^2 u_2 \right) - a_{11} w, \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^1} + \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \xi^2} - 2\Gamma_{12}^1 \vartheta_1 - 2\Gamma_{12}^2 \vartheta_2 \right) + \frac{1}{2} \left(b_1^1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \Gamma_{21}^1 u_1 - \Gamma_{21}^2 u_2 \right) + \right. \\ &+ b_1^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^1} - \Gamma_{11}^1 u_1 - \Gamma_{11}^2 u_2 \right) + b_1^1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2 \right) + b_2^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi^2} - \Gamma_{12}^1 u_1 - \Gamma_{12}^2 u_2 \right) \left. \right) - a_{12} w, \\ \kappa_{22} &= \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \xi^2} - \Gamma_{22}^1 \vartheta_1 - \Gamma_{22}^2 \vartheta_2 + b_2^1 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^1} - \Gamma_{21}^1 u_1 - \Gamma_{21}^2 u_2 \right) + b_2^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \xi^2} - \Gamma_{22}^1 u_1 - \Gamma_{22}^2 u_2 \right) - a_{22} w. \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

Физические соотношения из (1.3.14) перепишем как:

– компоненты тензора изгибающих моментов

$$\begin{aligned} M^{11} &= IC^{11kl} \kappa_{kl} = I \left(C^{1111} \kappa_{11} + 2C^{1112} \kappa_{12} + C^{1122} \kappa_{22} \right), \\ M^{12} &= IC^{12kl} \kappa_{kl} = I \left(C^{1211} \kappa_{11} + 2C^{1212} \kappa_{12} + C^{1222} \kappa_{22} \right), \\ M^{21} &= M^{12} = I \left(C^{1211} \kappa_{11} + 2C^{1212} \kappa_{12} + C^{1222} \kappa_{22} \right), \\ M^{22} &= IC^{22kl} \kappa_{kl} = I \left(C^{2211} \kappa_{11} + 2C^{2212} \kappa_{12} + C^{2222} \kappa_{22} \right). \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

– компоненты тензора тангенциальных усилий

$$\begin{aligned} T^{11} &= \tilde{T}^{11} + b_1^1 M^{11} + b_2^1 M^{21}, \\ \tilde{T}^{11} &= hC^{1111} \varepsilon_{11} + hC^{1112} \varepsilon_{12} + hC^{1121} \varepsilon_{21} + hC^{1122} \varepsilon_{22}, \end{aligned} \quad (1.3.40)$$

$$\begin{aligned}
T^{12} &= \tilde{T}^{12} + b_1^1 M^{12} + b_2^1 M^{22}, \\
\tilde{T}^{12} &= hC^{1211} \varepsilon_{11} + hC^{1212} \varepsilon_{12} + hC^{1221} \varepsilon_{21} + hC^{1222} \varepsilon_{22}, \\
T^{21} &= \tilde{T}^{21} + b_1^2 M^{11} + b_2^2 M^{21}, \\
\tilde{T}^{21} &= hC^{2111} \varepsilon_{11} + hC^{2112} \varepsilon_{12} + hC^{2121} \varepsilon_{21} + hC^{2122} \varepsilon_{22}, \\
T^{22} &= \tilde{T}^{22} + b_1^2 M^{12} + b_2^2 M^{22}, \\
\tilde{T}^{22} &= hC^{2211} \varepsilon_{11} + hC^{2212} \varepsilon_{12} + hC^{2221} \varepsilon_{21} + hC^{2222} \varepsilon_{22}.
\end{aligned}$$

Представим (1.3.40) в виде

$$\begin{aligned}
T^{11} &= h(C^{1111} \varepsilon_{11} + 2C^{1112} \varepsilon_{12} + C^{1122} \varepsilon_{22}) + b_1^1 M^{11} + b_2^1 M^{21}, \\
T^{12} &= h(C^{1211} \varepsilon_{11} + 2C^{1212} \varepsilon_{12} + C^{1222} \varepsilon_{22}) + b_1^1 M^{12} + b_2^1 M^{22}, \\
T^{21} &= h(C^{2111} \varepsilon_{11} + 2C^{2112} \varepsilon_{12} + C^{2122} \varepsilon_{22}) + b_1^2 M^{11} + b_2^2 M^{21}, \\
T^{22} &= h(C^{2211} \varepsilon_{11} + 2C^{2212} \varepsilon_{12} + C^{2222} \varepsilon_{22}) + b_1^2 M^{12} + b_2^2 M^{22}.
\end{aligned} \tag{1.3.41}$$

Связь перерезывающих сил с изгибающими моментами из (1.3.16) примет вид:

$$\begin{aligned}
Q^1 &= \frac{\partial M^{11}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^1 M^{11} + \Gamma_{21}^1 M^{21} + \Gamma_{11}^1 M^{11} + \Gamma_{21}^1 M^{12} + \\
&\quad + \frac{\partial M^{21}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 M^{11} + \Gamma_{22}^2 M^{21} + \Gamma_{12}^1 M^{21} + \Gamma_{22}^1 M^{22}, \\
Q^2 &= \frac{\partial M^{12}}{\partial \xi^1} + \Gamma_{11}^1 M^{12} + \Gamma_{21}^1 M^{22} + \Gamma_{11}^2 M^{11} + \Gamma_{21}^2 M^{12} + \\
&\quad + \frac{\partial M^{22}}{\partial \xi^2} + \Gamma_{12}^2 M^{12} + \Gamma_{22}^2 M^{22} + \Gamma_{12}^2 M^{21} + \Gamma_{22}^2 M^{22}.
\end{aligned} \tag{1.3.42}$$

Уравнения движения в цилиндрической системе координат.

Для круговой цилиндрической оболочки её срединная поверхность задаётся следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Pi: x_1 &= R \cos(\alpha), \quad x_2 = R \sin(\alpha), \quad x_3 = z, \\
\xi^1 &= \alpha, \quad \xi^2 = z, \quad (\alpha, z) \in D_{\alpha z} \subset (-\pi, \pi] \times R,
\end{aligned} \tag{1.3.43}$$

где x_i – прямоугольные декартовы координаты, R – радиус–вектор оболочки.

Эта система координат поверхности является ортогональной. Соответствующее касательное пространство имеет следующие характеристики:

$$\begin{aligned} g_{11} = H_1^2 = R^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = H_2^2 = 1, \quad g = R^2, \\ g^{11} = \frac{1}{R^2}, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = 1; \end{aligned} \quad (1.3.44)$$

$$\begin{aligned} b_{11} = -R, \quad b_{12} = b_{22} = 0, \quad b_1^1 = -\frac{1}{R}, \quad b_2^1 = b_1^2 = b_2^2 = 0, \\ b^{11} = -\frac{1}{R^3}, \quad b^{12} = b^{22} = 0, \quad a_{11} = 1, \quad a_{12} = a_{22} = 0; \end{aligned} \quad (1.3.45)$$

$$k_1 = -\frac{1}{R}, \quad k_0 = 0, \quad R_1 = R, \quad R_2 = \infty. \quad (1.3.46)$$

Все символы Кристоффеля второго рода в этой системе координат нулевые:

$$\Gamma_{ij}^k = 0. \quad (1.3.47)$$

Соотношения (1.3.18) – (1.3.42) с учётом формул (1.3.43) – (1.3.46) примут вид:

Уравнения движения:

$$\begin{aligned} \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\frac{T_{\alpha\alpha}}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial^2 M_{\alpha z}}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial^2 M_{zz}}{\partial z^2} + p, \\ \rho h \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{z\alpha}}{\partial z} + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial z} \right) + q_\alpha, \\ \rho h \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} &= \frac{1}{R} \frac{\partial T_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + q_z. \end{aligned} \quad (1.3.48)$$

Кинематические соотношения:

– тангенциальные деформации согласно (1.3.32)

$$\varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + w \right), \quad \varepsilon_{\alpha z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.3.49)$$

– компоненты тензора изменения кривизны согласно (1.3.33), с учётом

$$\vartheta_\alpha = -\frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{1}{R} u_\alpha, \quad \vartheta_z = -\frac{\partial w}{\partial z}, \quad (1.3.50)$$

примут вид

$$\kappa_{\alpha\alpha} = -\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w \right), \quad \kappa_{\alpha z} = -\frac{1}{R} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) \right], \quad \kappa_{zz} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \quad (1.3.51)$$

Физические соотношения:

– компоненты тензора изгибающих моментов

$$\begin{aligned} M_{\alpha\alpha} &= I \left(c_{11} \kappa_{\alpha\alpha} + 2c_{16} \kappa_{\alpha z} + c_{12} \kappa_{zz} \right), \\ M_{\alpha z} &= M_{z\alpha} = I \left(c_{61} \kappa_{\alpha\alpha} + 2c_{66} \kappa_{\alpha z} + c_{62} \kappa_{zz} \right), \\ M_{zz} &= I \left(c_{21} \kappa_{\alpha\alpha} + 2c_{26} \kappa_{\alpha z} + c_{22} \kappa_{zz} \right). \end{aligned} \quad (1.3.52)$$

– компоненты тензора тангенциальных усилий

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha} &= h \left(c_{11} \varepsilon_{\alpha\alpha} + 2c_{16} \varepsilon_{\alpha z} + c_{12} \varepsilon_{zz} \right) - \frac{1}{R} M_{\alpha\alpha}, \\ T_{\alpha z} &= h \left(c_{61} \varepsilon_{\alpha\alpha} + 2c_{66} \varepsilon_{\alpha z} + c_{62} \varepsilon_{zz} \right) - \frac{1}{R} M_{\alpha z}, \\ T_{z\alpha} &= h \left(c_{61} \varepsilon_{\alpha\alpha} + 2c_{66} \varepsilon_{\alpha z} + c_{62} \varepsilon_{zz} \right), \\ T_{zz} &= h \left(c_{21} \varepsilon_{\alpha\alpha} + 2c_{26} \varepsilon_{\alpha z} + c_{22} \varepsilon_{zz} \right). \end{aligned} \quad (1.3.53)$$

– компоненты симметричного тензора тангенциальных усилий

$$\begin{aligned}
\tilde{T}_{\alpha\alpha} &= h(c_{11}\varepsilon_{\alpha\alpha} + 2c_{16}\varepsilon_{\alpha z} + c_{12}\varepsilon_{zz}), \\
\tilde{T}_{\alpha z} = \tilde{T}_{z\alpha} &= h(c_{61}\varepsilon_{\alpha\alpha} + 2c_{66}\varepsilon_{\alpha z} + c_{62}\varepsilon_{zz}), \\
\tilde{T}_{zz} &= h(c_{21}\varepsilon_{\alpha\alpha} + 2c_{26}\varepsilon_{\alpha z} + c_{22}\varepsilon_{zz}).
\end{aligned} \tag{1.3.54}$$

Связь перерезывающих сил с изгибающими моментами следующая:

$$Q_\alpha = \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial z}, \quad Q_z = \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\alpha z}}{\partial \alpha} + \frac{\partial M_{zz}}{\partial z}. \tag{1.3.55}$$

Уравнения движения в перемещениях.

Из соотношений (1.3.48) – (1.3.53) вытекают уравнения движения в перемещениях, имеющие следующую структуру [27]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} = K(\mathbf{W}) + \mathbf{P}, \quad K = (K_{ij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{W} = (u_\alpha, u_z, w)^T, \quad \mathbf{P} = \frac{1}{\rho h} (q_\alpha, q_z, p)^T. \tag{1.3.56}$$

В (1.3.56) K_{ij} – дифференциальные операторы следующего вида с учётом (1.3.8) и (1.3.10):

$$\begin{aligned}
K_{11}(u_\alpha) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{hc_{11}}{R^2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{16}}{R} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + \left(hc_{66} + \frac{Ic_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} \right], \\
K_{12}(u_z) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{hc_{16}}{R^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{hc_{12}}{R} + \frac{hc_{66}}{R} - \frac{Ic_{66}}{R^3} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{62} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\
K_{13}(w) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{hc_{11}}{R^2} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{2Ic_{66}}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} - \frac{Ic_{61}}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + \left(\frac{hc_{61}}{R} - \frac{Ic_{61}}{R^3} \right) \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{Ic_{62}}{R} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \right], \\
K_{21}(u_\alpha) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{hc_{61}}{R^2} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + \left(\frac{hc_{66}}{R} - \frac{Ic_{66}}{R^3} + \frac{hc_{21}}{R} \right) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + hc_{26} \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2} \right], \\
K_{22}(u_z) &= \frac{1}{\rho h} \left[\left(\frac{Ic_{66}}{R^4} + \frac{hc_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + \frac{2hc_{26}}{R} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + hc_{22} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right], \\
K_{23}(w) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{Ic_{61}}{R^4} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + \frac{2Ic_{66}}{R^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{Ic_{62}}{R^2} \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} + \frac{hc_{21}}{R} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{hc_{61}}{R^2} + \frac{Ic_{61}}{R^4} \right) \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right],
\end{aligned} \tag{1.3.57}$$

$$\begin{aligned}
K_{31}(u_\alpha) &= \frac{1}{\rho h} \left[\frac{Ic_{26}}{R} \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial z^3} + \frac{Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial \alpha^2 \partial z} + \frac{2Ic_{66}}{R^2} \frac{\partial^3 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z^2} + \left(\frac{Ic_{16}}{R^3} - \frac{hc_{16}}{R} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} - \frac{hc_{11}}{R^2} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \right], \\
K_{32}(u_z) &= \frac{1}{\rho h} \left[-\frac{Ic_{16}}{R^4} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \alpha^3} - \frac{2Ic_{66}}{R^3} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \alpha^2 \partial z} - \frac{Ic_{26}}{R^2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial \alpha \partial z^2} - \left(\frac{Ic_{16}}{R^4} + \frac{hc_{16}}{R^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} - \frac{hc_{12}}{R} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right], \\
K_{33}(w) &= \frac{1}{\rho h} \left[-\frac{4Ic_{62}}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha \partial z^3} - \frac{4Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^3 \partial z} - \left(\frac{2Ic_{21}}{R^2} + \frac{4Ic_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - \frac{Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - \right. \\
&\quad \left. -Ic_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \frac{2Ic_{21}}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{4Ic_{16}}{R^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} - \frac{2Ic_{11}}{R^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \left(\frac{hc_{11}}{R^2} + \frac{Ic_{11}}{R^4} \right) w \right].
\end{aligned}$$

В уравнениях (1.3.57) прослеживаются следующие равенства:

$$K_{21}(u_\alpha) = K_{12}(u_\alpha), \quad K_{31}(u_\alpha) = -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z). \quad (1.3.58)$$

Выполним обезразмеривание уравнений (1.3.56) – (1.3.57). Для этой цели введём систему безразмерных величин:

$$\begin{aligned}
u'_\alpha &= \frac{u_\alpha}{L}, \quad u'_z = \frac{u_z}{L}, \quad w' = \frac{w}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad c_*^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, \quad \tau = \frac{c_* t}{L}, \\
q'_\alpha &= \frac{q_\alpha L}{hc_{11}}, \quad q'_z = \frac{q_z L}{hc_{11}}, \quad p' = \frac{pL}{hc_{11}}, \quad d = \frac{L}{R}, \quad f = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{h}{R}, \\
C'_1 &= \frac{c_{12}}{c_{11}}, \quad C'_2 = \frac{c_{16}}{c_{11}}, \quad C'_3 = \frac{c_{22}}{c_{11}}, \quad C'_4 = \frac{c_{26}}{c_{11}}, \quad C'_5 = \frac{c_{66}}{c_{11}}.
\end{aligned} \quad (1.3.59)$$

В соотношениях (1.3.59): τ – безразмерное время, L – характерный размер, c_* – характерная скорость, f – коэффициент отношения толщины оболочки к её радиусу.

Уравнения движения в безразмерной форме имеют вид (штрихи в безразмерных величинах здесь и далее опущены):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \tau^2} &= K_{11}(u_\alpha) + K_{12}(u_z) + K_{13}(w) + q_\alpha, \\
\frac{\partial^2 u_z}{\partial \tau^2} &= K_{21}(u_\alpha) + K_{22}(u_z) + K_{23}(w) + q_z, \\
\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} &= K_{31}(u_\alpha) + K_{32}(u_z) + K_{33}(w) + p,
\end{aligned} \tag{1.3.60}$$

где

$$\begin{aligned}
K_{11}(u_\alpha) &= d^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + 2C_2 d \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + (C_5 + C_5 f^2) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2}, \\
K_{12}(u_z) &= C_2 d^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + (C_1 d + C_5 d - C_5 d f^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + C_4 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2},
\end{aligned} \tag{1.3.61}$$

$$K_{13}(w) = d^2 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - 2C_5 f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} - C_2 d f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + (C_2 d - C_2 d f^2) \frac{\partial w}{\partial z} - C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3},$$

$$K_{21}(u_\alpha) = K_{12}(u_\alpha),$$

$$K_{22}(u_z) = (C_5 d^2 f^2 + C_5 d^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + 2C_4 d \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z} + C_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \tag{1.3.62}$$

$$K_{23}(w) = C_2 d^2 f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^3} + 2C_5 d f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + C_4 f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2} + C_1 d \frac{\partial w}{\partial z} + (C_2 d^2 + C_2 d^2 f^2) \frac{\partial w}{\partial \alpha},$$

$$K_{31}(u_\alpha) = -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z),$$

$$\begin{aligned}
K_{33}(w) &= -4C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha \partial z^3} - 4C_2 d f^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^3 \partial z} - (2C_1 f^2 + 4C_5 f^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - d^2 f^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - \\
&\quad - C_3 \frac{f^2}{d^2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 2C_1 f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 4C_2 d f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} - 2d^2 f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - (d^2 + d^2 f^2) w.
\end{aligned} \tag{1.3.63}$$

В соотношениях (1.3.61) – (1.3.63):

$$u_\alpha = u_\alpha(\alpha, z, \tau), \quad u_z = u_z(\alpha, z, \tau), \quad w = w(\alpha, z, \tau).$$

ГЛАВА 2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

2.1. Постановка задачи о фундаментальных решениях для анизотропной оболочки

Исследуется неограниченная тонкая цилиндрическая оболочка радиуса R и постоянной толщины h . Материал оболочки упругий и анизотропный. Упругая среда, в рассматриваемом случае анизотропии, имеет одну плоскость симметрии, которая геометрически совпадает со срединной поверхностью оболочки.

Материал, применительно к тонкой оболочке типа Кирхгофа–Лява согласно (1.3.7) – (1.3.10), характеризуется шестью независимыми упругими постоянными:

$$c_{11} = C^{1111}, c_{12} = C^{1122}, c_{16} = C^{1112}, c_{22} = C^{2222}, c_{26} = C^{1222}, c_{66} = C^{1212}. \quad (2.1.1)$$

Задача рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$, связанной с осью z цилиндрической оболочки.

Определим фундаментальные решения для нормального перемещения $G(\alpha, z, \tau)$ и для тангенциальных перемещений $G_\alpha(\alpha, z, \tau)$, $G_z(\alpha, z, \tau)$ как решение задачи следующего вида [70, 72]:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}}{\partial \tau^2} = \mathbf{K}(\mathbf{G}) + \mathbf{P}, \quad \mathbf{K} = (K_{ij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{G} = (G_\alpha, G_z, G)^T, \quad \mathbf{P} = (0, 0, p)^T. \quad (2.1.2)$$

В соотношениях (2.1.2) приняты нулевыми тангенциальные нагрузки, а нормальная нагрузка представлена в следующем виде:

$$p = \delta(\alpha, z)\delta(\tau). \quad (2.1.3)$$

Здесь $\delta(*)$ – дельта-функция Дирака.

Дифференциальные операторы согласно (1.3.61) – (1.3.63) примут вид:

$$\begin{aligned}
K_{11}(G_\alpha) &= d^2 \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial \alpha^2} + 2C_2 d \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial \alpha \partial z} + (C_5 + C_5 f^2) \frac{\partial^2 G_\alpha}{\partial z^2}, \\
K_{12}(G_z) &= C_2 d^2 \frac{\partial^2 G_z}{\partial \alpha^2} + (C_1 d + C_5 d - C_5 d f^2) \frac{\partial^2 G_z}{\partial \alpha \partial z} + C_4 \frac{\partial^2 G_z}{\partial z^2}, \\
K_{13}(G) &= d^2 \frac{\partial G}{\partial \alpha} - 2C_5 f^2 \frac{\partial^3 G}{\partial \alpha \partial z^2} - C_2 d f^2 \frac{\partial^3 G}{\partial \alpha^2 \partial z} + (C_2 d - C_2 d f^2) \frac{\partial G}{\partial z} - C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^3 G}{\partial z^3},
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

$$\begin{aligned}
K_{21}(G_\alpha) &= K_{12}(G_\alpha), \\
K_{22}(G_z) &= (C_5 d^2 f^2 + C_5 d^2) \frac{\partial^2 G_z}{\partial \alpha^2} + 2C_4 d \frac{\partial^2 G_z}{\partial \alpha \partial z} + C_3 \frac{\partial^2 G_z}{\partial z^2}, \\
K_{23}(G) &= C_2 d^2 f^2 \frac{\partial^3 G}{\partial \alpha^3} + (C_2 d^2 + C_2 d^2 f^2) \frac{\partial G}{\partial \alpha} + 2C_5 d f^2 \frac{\partial^3 G}{\partial \alpha^2 \partial z} + \\
&\quad + C_4 f^2 \frac{\partial^3 G}{\partial \alpha \partial z^2} + C_1 d \frac{\partial G}{\partial z},
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

$$\begin{aligned}
K_{31}(G_\alpha) &= -K_{13}(G_\alpha), \quad K_{32}(G_z) = -K_{23}(G_z), \\
K_{33}(G) &= -4C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^4 G}{\partial \alpha \partial z^3} - 4C_2 d f^2 \frac{\partial^4 G}{\partial \alpha^3 \partial z} - (2C_1 f^2 + 4C_5 f^2) \frac{\partial^4 G}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - \\
&\quad - d^2 f^2 \frac{\partial^4 G}{\partial \alpha^4} - C_3 \frac{f^2}{d^2} \frac{\partial^4 G}{\partial z^4} - 2C_1 f^2 \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - 4C_2 d f^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial z} - \\
&\quad - 2d^2 f^2 \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} - (d^2 + d^2 f^2) G.
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Начальные условия для фундаментальных решений принимаем нулевыми, аналогично соотношениям (1.3.17):

$$G_\alpha \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G_\alpha}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad G_z \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G_z}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad G \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial G}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \tag{2.1.7}$$

Целью является построение фундаментальных решений для нормального $G(\alpha, z, \tau)$ и тангенциальных $G_\alpha(\alpha, z, \tau)$, $G_z(\alpha, z, \tau)$ перемещений неограниченной упругой анизотропной цилиндрической оболочки.

2.2. Фундаментальные решения для неограниченной анизотропной оболочки

Представим входящие в (2.1.2) функции в виде экспоненциальных рядов:

$$\begin{aligned}
 G_\alpha(\alpha, z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{\alpha n}(z, \tau) e^{in\alpha}, \quad G_z(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{zn}(z, \tau) e^{in\alpha}, \\
 G(\alpha, z, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_n(z, \tau) e^{in\alpha}, \quad p(\alpha, z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_n(z, \tau) e^{in\alpha}, \\
 p_n(z, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \delta(z) \delta(\tau).
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Подставим (2.2.1) в (2.1.2), возьмём производные по углу α в соотношениях для дифференциальных операторов, опустим знаки суммирования и сократим на экспоненциальный множитель. В результате чего получим систему дифференциальных уравнений в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 G_{\alpha n}}{\partial \tau^2} &= K_{11}(G_{\alpha n}) + K_{12}(G_{zn}) + K_{13}(G_n) \\
 \frac{\partial^2 G_{zn}}{\partial \tau^2} &= K_{21}(G_{\alpha n}) + K_{22}(G_{zn}) + K_{23}(G_n)
 \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

$$\frac{\partial^2 G_n}{\partial \tau^2} = K_{31}(G_{\alpha n}) + K_{32}(G_{zn}) + K_{33}(G_n) + \frac{1}{2\pi} \delta(z) \delta(\tau).$$

$$K_{11}(G_{\alpha n}) = (C_5 + C_5 f^2) \frac{\partial^2 G_{\alpha n}}{\partial z^2} + i2C_2 dn \frac{\partial G_{\alpha n}}{\partial z} - d^2 n^2 G_{\alpha n},$$

$$K_{12}(G_{zn}) = C_4 \frac{\partial^2 G_{zn}}{\partial z^2} + (iC_1 dn + iC_5 dn - iC_5 df^2 n) \frac{\partial G_{zn}}{\partial z} - C_2 d^2 n^2 G_{zn}, \tag{2.2.3}$$

$$K_{13}(G_n) = -C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^3 G_n}{\partial z^3} - i2C_5 f^2 n \frac{\partial^2 G_n}{\partial z^2} + (C_2 d - C_2 df^2 + n^2 C_2 df^2) \frac{\partial G_n}{\partial z} + id^2 n G_n,$$

$$K_{21}(G_{an}) = K_{12}(G_{zn}),$$

$$K_{22}(G_{zn}) = C_3 \frac{\partial^2 G_{zn}}{\partial z^2} + i2C_4 dn \frac{\partial G_{zn}}{\partial z} - (C_5 d^2 f^2 n^2 + C_5 d^2 n^2) G_{zn}, \quad (2.2.4)$$

$$K_{23}(G_n) = iC_4 f^2 n \frac{\partial G_n}{\partial z^2} + (C_1 d - 2C_5 df^2 n^2) \frac{\partial G_n}{\partial z} + (iC_2 d^2 n + iC_2 d^2 f^2 n(1-n^2)) G_n,$$

$$K_{31}(G_{an}) = -K_{13}(G_{an}), \quad K_{32}(G_{zn}) = -K_{23}(G_{zn}),$$

$$K_{33}(G_n) = -C_3 \frac{f^2}{d^2} \frac{\partial^4 G_n}{\partial z^4} - i4C_4 n \frac{f^2}{d} \frac{\partial^3 G_n}{\partial z^3} + (2C_1 f^2 (n^2 - 1) + 4C_5 f^2 n^2) \frac{\partial^2 G_n}{\partial z^2} + (i4C_2 df^2 n(n^2 - 1)) \frac{\partial G_n}{\partial z} + (d^2 f^2 (2n^2 - n^4 - 1) - d^2) G_n. \quad (2.2.5)$$

Здесь i – мнимая единица, n – коэффициент ряда.

Применим к соотношениям (2.2.2) – (2.2.5) интегральное преобразование Лапласа по времени τ с учётом начальных условий (2.1.7) [97]. У функций верхний индекс « L » обозначает её трансформанту по Лапласу, s – параметр интегрального преобразования Лапласа.

$$s^2 G_{an}^L = K_{11}(G_{an}^L) + K_{12}(G_{zn}^L) + K_{13}(G_n^L)$$

$$s^2 G_{zn}^L = K_{21}(G_{an}^L) + K_{22}(G_{zn}^L) + K_{23}(G_n^L)$$

$$(2.2.6)$$

$$s^2 G_n^L = K_{31}(G_{an}^L) + K_{32}(G_{zn}^L) + K_{33}(G_n^L) + \frac{1}{2\pi} \delta(z).$$

$$K_{11}(G_{an}^L) = (C_5 + C_5 f^2) \frac{\partial^2 G_{an}^L}{\partial z^2} + i2C_2 dn \frac{\partial G_{an}^L}{\partial z} - d^2 n^2 G_{an}^L,$$

$$K_{12}(G_{zn}^L) = C_4 \frac{\partial^2 G_{zn}^L}{\partial z^2} + (iC_1 dn + iC_5 dn - iC_5 df^2 n) \frac{\partial G_{zn}^L}{\partial z} - C_2 d^2 n^2 G_{zn}^L,$$

$$(2.2.7)$$

$$K_{13}(G_n^L) = -C_4 \frac{f^2}{d} \frac{\partial^3 G_n^L}{\partial z^3} - i2C_5 f^2 n \frac{\partial^2 G_n^L}{\partial z^2} +$$

$$+ (C_2 d - C_2 df^2 + n^2 C_2 df^2) \frac{\partial G_n^L}{\partial z} + id^2 n G_n^L,$$

$$\begin{aligned}
K_{21}(G_{\alpha n}^L) &= K_{12}(G_{\alpha n}^L), \\
K_{22}(G_{zn}^L) &= C_3 \frac{\partial^2 G_{zn}^L}{\partial z^2} + i2C_4 dn \frac{\partial G_{zn}^L}{\partial z} - (C_5 d^2 f^2 n^2 + C_5 d^2 n^2) G_{zn}^L, \\
K_{23}(G_n^L) &= iC_4 f^2 n \frac{\partial G_n^L}{\partial z^2} + (C_1 d - 2C_5 d f^2 n^2) \frac{\partial G_n^L}{\partial z} + \\
&\quad + (iC_2 d^2 n + iC_2 d^2 f^2 n(1 - n^2)) G_n^L,
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

$$\begin{aligned}
K_{31}(G_{\alpha n}^L) &= -K_{13}(G_{\alpha n}^L), \quad K_{32}(G_{zn}^L) = -K_{23}(G_{zn}^L), \\
K_{33}(G_n^L) &= -C_3 \frac{f^2}{d^2} \frac{\partial^4 G_n^L}{\partial z^4} - 4C_4 i n \frac{f^2}{d} \frac{\partial^3 G_n^L}{\partial z^3} + (2C_1 f^2 (n^2 - 1) + 4C_5 f^2 n^2) \frac{\partial^2 G_n^L}{\partial z^2} + \\
&\quad + 4C_2 d f^2 i n (n^2 - 1) \frac{\partial G_n^L}{\partial z} + (d^2 f^2 (2n^2 - n^4 - 1) - d^2) G_n^L.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

В соотношениях (2.2.6) – (2.2.9):

$$G_{\alpha n}^L = G_{\alpha n}^L(z, s), \quad G_{zn}^L = G_{zn}^L(z, s), \quad G_n^L = G_n^L(z, s).$$

Применим к соотношениям (2.2.6) – (2.2.9) интегральное преобразование Фурье по координате z . У функций верхний индекс « F » обозначает её трансформанту по Фурье, q – параметр интегрального преобразования Фурье.

$$\begin{aligned}
s^2 G_{\alpha n}^{LF} &= K_{11}(G_{\alpha n}^{LF}) + K_{12}(G_{zn}^{LF}) + K_{13}(G_n^{LF}) \\
s^2 G_{zn}^{LF} &= K_{21}(G_{\alpha n}^{LF}) + K_{22}(G_{zn}^{LF}) + K_{23}(G_n^{LF}) \\
s^2 G_n^{LF} &= K_{31}(G_{\alpha n}^{LF}) + K_{32}(G_{zn}^{LF}) + K_{33}(G_n^{LF}) + \frac{1}{2\pi}.
\end{aligned} \tag{2.2.10}$$

$$\begin{aligned}
K_{11}(G_{\alpha n}^{LF}) &= -(1 + f^2) C_5 q^2 G_{\alpha n}^{LF} - 2C_2 q dn G_{\alpha n}^{LF} - d^2 n^2 G_{\alpha n}^{LF}, \\
K_{12}(G_{zn}^{LF}) &= -C_4 q^2 G_{zn}^{LF} - (C_1 + C_5 (1 - f^2)) q dn G_{zn}^{LF} - C_2 d^2 n^2 G_{zn}^{LF}, \\
K_{13}(G_n^{LF}) &= \left(C_4 \frac{1}{d} q^3 + 2C_5 q^2 n \right) f^2 i G_n^{LF} + (1 + f^2 (n^2 - 1)) C_2 i q d G_n^{LF} + i d^2 n G_n^{LF},
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

$$\begin{aligned}
K_{21}(G_{\alpha n}^{LF}) &= K_{12}(G_{\alpha n}^{LF}), \\
K_{22}(G_{zn}^{LF}) &= -C_3 q^2 G_{zn}^{LF} - 2C_4 q dn G_{zn}^{LF} - (f^2 + 1) C_5 d^2 n^2 G_{zn}^{LF}, \\
K_{23}(G_n^{LF}) &= -C_4 f^2 i q^2 n G_n^{LF} + (C_1 - 2C_5 f^2 n^2) i q d G_n^{LF} + (1 + f^2 (1 - n^2)) C_2 i d^2 n G_n^{LF},
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\begin{aligned}
& K_{31}(G_{\alpha n}^{LF}) = -K_{13}(G_{\alpha n}^{LF}), \quad K_{32}(G_{zn}^{LF}) = -K_{23}(G_{zn}^{LF}), \\
& K_{33}(G_n^{LF}) = -C_3 \frac{f^2}{d^2} q^4 G_n^{LF} - 4C_4 n \frac{f^2}{d} q^3 G_n^{LF} - \left(2C_1 f^2 (n^2 - 1) + 4C_5 f^2 n^2\right) q^2 G_n^{LF} - \\
& - 4nC_2 d f^2 (n^2 - 1) q G_n^{LF} + \left(d^2 f^2 (2n^2 - n^4 - 1) - d^2\right) G_n^{LF}.
\end{aligned} \quad (2.2.13)$$

В соотношениях (2.2.10) – (2.2.13):

$$G_{\alpha n}^{LF} = G_{\alpha n}^{LF}(q, s), \quad G_{zn}^{LF} = G_{zn}^{LF}(q, s), \quad G_n^{LF} = G_n^{LF}(q, s).$$

Получим систему из трёх алгебраических уравнений относительно изображений $G_{\alpha n}^{LF}$, G_{zn}^{LF} , G_n^{LF} фундаментальных решений в пространстве преобразований Фурье и Лапласа в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
& (s^2 + Q_1)G_{\alpha n}^{LF} + Q_2 G_{zn}^{LF} + Q_3 G_n^{LF} = 0 \\
& Q_2 G_{\alpha n}^{LF} + (s^2 + Q_4)G_{zn}^{LF} + Q_5 G_n^{LF} = 0 \\
& -Q_3 G_{\alpha n}^{LF} - Q_5 G_{zn}^{LF} + (s^2 + Q_6)G_n^{LF} = \frac{1}{2\pi},
\end{aligned} \quad (2.2.14)$$

где в (2.2.14):

$$\begin{aligned}
& Q_1 = (1 + f^2)C_5 q^2 + 2C_2 q d n + d^2 n^2, \\
& Q_2 = C_4 q^2 + (C_1 + C_5 (1 - f^2)) q d n + C_2 d^2 n^2, \\
& Q_3 = -\left(C_4 \frac{1}{d} q^3 + 2C_5 q^2 n\right) f^2 i - (1 + f^2 (n^2 - 1)) C_2 i q d - i d^2 n, \\
& Q_4 = C_3 q^2 + 2C_4 q d n + (f^2 + 1) C_5 d^2 n^2, \\
& Q_5 = C_4 f^2 i q^2 n - (C_1 - 2C_5 f^2 n^2) i q d - (1 + f^2 (1 - n^2)) C_2 i d^2 n, \\
& Q_6 = C_3 \frac{f^2}{d^2} q^4 + 4C_4 n \frac{f^2}{d} q^3 + (2C_1 f^2 (n^2 - 1) + 4C_5 f^2 n^2) q^2 + \\
& + 4nC_2 d f^2 (n^2 - 1) q - (d^2 f^2 (2n^2 - n^4 - 1) - d^2).
\end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Система (2.2.14) имеет структуру:

$$\mathbf{AG} = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s^2 + Q_1 & Q_2 & Q_3 \\ Q_2 & s^2 + Q_4 & Q_5 \\ -Q_3 & -Q_5 & s^2 + Q_6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{an}^{LF} \\ G_{zn}^{LF} \\ G_n^{LF} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Решение системы для функций G_n^{LF} , G_{an}^{LF} , G_{zn}^{LF} с применением метода обратной матрицы

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

где \mathbf{A}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{A} , даст следующий результат:

$$G_n^{LF}(q, s) = \frac{1}{2\pi} \frac{s^4 + s^2 R_1 + R_2}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}, \quad (2.2.16)$$

$$G_{an}^{LF}(q, s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{s^2 Q_3 + R_6}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}, \quad (2.2.17)$$

$$G_{zn}^{LF}(q, s) = -\frac{1}{2\pi} \frac{s^2 Q_5 + R_7}{s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5}.$$

В (2.2.16), (2.2.17):

$$\begin{aligned} R_1 &= R_{1n}(q) = Q_1 + Q_4, & R_2 &= R_{2n}(q) = Q_1 Q_4 - Q_2^2, \\ R_3 &= R_{3n}(q) = Q_1 + Q_4 + Q_6, \\ R_4 &= R_{4n}(q) = Q_1 Q_4 + Q_1 Q_6 - Q_2^2 + Q_3^2 + Q_4 Q_6 + Q_5^2, \\ R_5 &= R_{5n}(q) = Q_1 Q_4 Q_6 + Q_1 Q_5^2 - Q_6 Q_2^2 - 2Q_2 Q_3 Q_5 + Q_4 Q_3^2, \\ R_6 &= R_{6n}(q) = Q_3 Q_4 - Q_2 Q_5, & R_7 &= R_{7n}(q) = Q_1 Q_5 - Q_2 Q_3. \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

Построим оригиналы фундаментальных решений (2.2.16), (2.2.17).

Одним из вариантов численно–аналитического построения оригиналов функций является численное обращение преобразования Фурье совместно с аналитическим обращением преобразования Лапласа.

Сперва выполним обратное интегральное преобразование Лапласа.

Оригиналы функций (2.2.16) и (2.2.17) по Лапласу зависят от характера нулей знаменателя бикубического уравнения:

$$x^3 + x^2 R_3 + x R_4 + R_5 = 0, \quad x = s^2. \quad (2.2.19)$$

Согласно формулам Кардано [31] кубическое уравнение (2.2.19) с помощью замены переменной

$$x = y - \frac{R_3}{3}, \quad (2.2.20)$$

приводится к каноническому трёхчленному виду:

$$y^3 + Py + Q = 0, \quad (2.2.21)$$

где

$$P = P(q, n) = \frac{3R_4 - R_3^2}{3}, \quad Q = Q(q, n) = \frac{2R_3^3 - 9R_3R_4 + 27R_5}{27}. \quad (2.2.22)$$

Дискриминант многочлена (2.2.21) определяется выражением

$$D = D(q, n) = -4P^3 - 27Q^2 = -108 \left(\tilde{D} \right), \quad \tilde{D} = \left(\frac{P}{3} \right)^3 + \left(\frac{Q}{2} \right)^2, \quad (2.2.23)$$

при анализе которого опознаётся тип корней уравнения (2.2.21) согласно следующим правилам:

- если $D(q, n) < 0$, то уравнение имеет один действительный корень и два комплексно–сопряжённых корня,
- если $D(q, n) > 0$, то уравнение имеет три различных действительных корня,
- если $D(q, n) = 0$, то уравнение имеет три действительных корня, два из которых равны.

В случае $D(q,n) < 0$ корни уравнения (2.2.21) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha + \beta, \quad y_{2,3} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{\alpha - \beta}{2}, \\ \alpha &= \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\tilde{D}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\tilde{D}}}, \quad \alpha\beta = -\frac{P}{3}. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

В случае $D(q,n) > 0$ корни уравнения (2.2.21) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} y_{1,2,3} &= \alpha + \beta, \\ \alpha &= \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\tilde{D}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\tilde{D}}}, \quad \alpha\beta = -\frac{P}{3}. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Формулы для нахождения трёх действительных корней уравнения (2.2.21) представляются в виде:

$$\begin{aligned} y_1 &= 2 \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) \sqrt{-\frac{P}{3}}, \\ y_2 &= 2 \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \sqrt{-\frac{P}{3}}, \quad y_3 = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right) \sqrt{-\frac{P}{3}}. \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

Здесь φ определяется как

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3Q}{2P} \sqrt{-\frac{3}{P}}\right). \quad (2.2.27)$$

В случае $D(q,n) = 0$ корни уравнения (2.2.21) определяются следующими соотношениями:

$$\alpha = \beta,$$

$$y_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}}, \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}}, \quad \text{если } P \neq 0 \text{ и } Q \neq 0, \quad (2.2.28)$$

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0, \quad \text{если } P = Q = 0.$$

Определив корни уравнения (2.2.21) и подставив в (2.2.20) получим корни бикубического уравнения (2.2.19):

$$x_1 = y_1 - \frac{R_3}{3}, \quad x_2 = y_2 - \frac{R_3}{3}, \quad x_3 = y_3 - \frac{R_3}{3}. \quad (2.2.29)$$

Знаменатель функций (2.2.16), (2.2.17) можно представить как:

$$s^6 + s^4 R_3 + s^2 R_4 + R_5 = \prod_{k=1}^6 (s - s_k) =$$

$$= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_3)(s + s_3)(s - s_5)(s + s_5), \quad (2.2.30)$$

где

$$s_1 = \sqrt{x_1}, \quad s_2 = -s_1, \quad s_3 = \sqrt{x_2}, \quad s_4 = -s_3, \quad s_5 = \sqrt{x_3}, \quad s_6 = -s_5, \quad (2.2.31)$$

а оригиналы фундаментальных решений (2.2.16) и (2.2.17) по Лапласу построить аналитически с применением второй теоремы разложения для преобразования Лапласа [38] (с помощью вычетов):

$$G_n^F(q, n, \tau) = \sum_{k=1}^6 A_k e^{s_k \tau}, \quad A_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_n^{LF}(q, n, s_k),$$

$$G_{an}^F(q, n, \tau) = \sum_{k=1}^6 B_k e^{s_k \tau}, \quad B_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{an}^{LF}(q, n, s_k), \quad (2.2.32)$$

$$G_{zn}^F(q, n, \tau) = \sum_{k=1}^6 C_k e^{s_k \tau}, \quad C_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{zn}^{LF}(q, n, s_k),$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2\pi} \frac{s_1^4 + s_1^2 R_1 + R_2}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, A_2 = -A_1, \\
A_3 &= \frac{1}{2\pi} \frac{s_3^4 + s_3^2 R_1 + R_2}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, A_4 = -A_3, \\
A_5 &= \frac{1}{2\pi} \frac{s_5^4 + s_5^2 R_1 + R_2}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, A_6 = -A_5, \\
B_1 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s_1^2 Q_3 + R_6}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, B_2 = -B_1, \\
B_3 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s_3^2 Q_3 + R_6}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, B_4 = -B_3, \\
B_5 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s_5^2 Q_3 + R_6}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, B_6 = -B_5, \\
C_1 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s_1^2 Q_5 + R_7}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, C_2 = -C_1, \\
C_3 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s_3^2 Q_5 + R_7}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, C_4 = -C_3, \\
C_5 &= -\frac{1}{2\pi} \frac{s_5^2 Q_5 + R_7}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, C_6 = -C_5.
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

С учётом характера корней s_i фундаментальные решения в изображении по Фурье примут вид:

$$\begin{aligned}
G_n^F(q, n, \tau) &= 2[A_1 \text{sh}(s_1 \tau) + A_3 \text{sh}(s_3 \tau) + A_5 \text{sh}(s_5 \tau)], \\
G_{\alpha n}^F(q, n, \tau) &= 2[B_1 \text{sh}(s_1 \tau) + B_3 \text{sh}(s_3 \tau) + B_5 \text{sh}(s_5 \tau)], \\
G_{zn}^F(q, n, \tau) &= 2[C_1 \text{sh}(s_1 \tau) + C_3 \text{sh}(s_3 \tau) + C_5 \text{sh}(s_5 \tau)].
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Оригиналы по Фурье фундаментальных решений для нормальных и тангенциальных перемещений (2.2.34) построим с применением формул обращения [27]:

$$\begin{aligned}
G_n(z, n, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_n^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq, \\
G_{\alpha n}(z, n, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{\alpha n}^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq, \\
G_{zn}(z, n, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{zn}^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq.
\end{aligned} \tag{2.2.35}$$

Задаваясь некоторым большим числом J_l , заменим несобственные интегралы из (2.2.35) определёнными интегралами:

$$\begin{aligned}
G_n(z, n, \tau) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-J_1}^{J_1} G_n^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq, \\
G_{\alpha n}(z, n, \tau) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-J_2}^{J_2} G_{\alpha n}^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq, \\
G_{zn}(z, n, \tau) &\approx \frac{1}{2\pi} \int_{-J_3}^{J_3} G_{zn}^F(q, n, \tau) e^{iqz} dq.
\end{aligned} \tag{2.2.36}$$

Рассмотрим два варианта взятия интегралов (2.2.36).

Вариант 1. В первом варианте применим численный метод интегрирования быстро осциллирующих функций [12]:

$$\int_a^b f(x) e^{iwx} dx = \frac{b-a}{2} e^{\frac{iw}{2}(a+b)} (D_1(p) f(a) + D_2(p) f(b)), \tag{2.2.37}$$

где

$$p = w \frac{b-a}{2}, \quad D_{1,2}(p) = \frac{\sin p}{p} \pm \frac{p \cos p - \sin p}{p^2} i.$$

Тогда оригиналы фундаментальных решений в коэффициентах рядов предстанут в следующем виде:

$$G_n(z, n, \tau) = \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_1-1} \left\{ e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^1 + q_k^1)} \left[D_1^1 G_n^F(q_k^1, n, \tau) + D_2^1 G_n^F(q_{k+1}^1, n, \tau) \right] \right\}, \tag{2.2.38}$$

$$G_{\alpha n}(z, n, \tau) = \frac{\Delta_2}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_2-1} \left\{ e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^2 + q_k^2)} \left[D_1^2 G_{\alpha n}^F(q_k^2, n, \tau) + D_2^2 G_{\alpha n}^F(q_{k+1}^2, n, \tau) \right] \right\},$$

$$G_{zn}(z, n, \tau) = \frac{\Delta_3}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_3-1} \left\{ e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^3 + q_k^3)} \left[D_1^3 G_{zn}^F(q_k^3, n, \tau) + D_2^3 G_{zn}^F(q_{k+1}^3, n, \tau) \right] \right\}.$$

С учётом разложения в экспоненциальные ряды (2.2.1) и соотношений (2.2.38) нестационарные фундаментальные решения для нормального прогиба и тангенциальных перемещений анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява примут вид:

$$G(\alpha, z, \tau) = \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^1 + q_k^1)} \left(D_1^1 G_n^F(q_k^1, \tau) + D_2^1 G_n^F(q_{k+1}^1, \tau) \right) \right),$$

$$G_\alpha(\alpha, z, \tau) = \frac{\Delta_2}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^2 + q_k^2)} \left(D_1^2 G_{\alpha n}^F(q_k^2, \tau) + D_2^2 G_{\alpha n}^F(q_{k+1}^2, \tau) \right) \right), \quad (2.2.39)$$

$$G_z(\alpha, z, \tau) = \frac{\Delta_3}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_3-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^3 + q_k^3)} \left(D_1^3 G_{zn}^F(q_k^3, \tau) + D_2^3 G_{zn}^F(q_{k+1}^3, \tau) \right) \right).$$

При проведении численных расчётов бесконечные ряды в (2.2.39) заменяются конечными суммами:

$$G(\alpha, z, \tau) = \frac{\Delta_1}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{n=-R_1}^{R_1} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^1 + q_k^1)} \left(D_1^1 G_n^F(q_k^1, \tau) + D_2^1 G_n^F(q_{k+1}^1, \tau) \right) \right),$$

$$G_\alpha(\alpha, z, \tau) = \frac{\Delta_2}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_2-1} \sum_{n=-R_2}^{R_2} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^2 + q_k^2)} \left(D_1^2 G_{\alpha n}^F(q_k^2, \tau) + D_2^2 G_{\alpha n}^F(q_{k+1}^2, \tau) \right) \right), \quad (2.2.40)$$

$$G_z(\alpha, z, \tau) = \frac{\Delta_3}{4\pi} \sum_{k=0}^{N_3-1} \sum_{n=-R_3}^{R_3} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^3 + q_k^3)} \left(D_1^3 G_{zn}^F(q_k^3, \tau) + D_2^3 G_{zn}^F(q_{k+1}^3, \tau) \right) \right).$$

$$\Delta = \frac{2J_l}{N_l}, \quad m_l = \frac{\Delta_l}{2}, \quad D_{1,2}^l = \frac{\sin m_l}{m_l} \pm \frac{m_l \cos m_l - \sin m_l}{m_l^2} i, \quad (2.2.41)$$

$$q_k^l = -J_l + k_l \Delta_l, \quad q_{k+1}^l = -J_l + (k_l + 1) \Delta_l, \quad k_l = 0..N_l - 1, \quad l = 1, 2, 3.$$

В (2.2.40), (2.2.41) J_l – границы интегрирования, N_l – число шагов интегрирования, Δ_l – шаг интегрирования, R_l – параметр суммирования по углу α .

Параметры численного интегрирования N_l и J_l , а также параметр суммирования по углу α – R_l определяются итерационно до обеспечения построения решения с заданной точностью.

Соответствующий алгоритм представлен соотношениями (2.2.42) – (2.2.44) и описан ниже:

1. Произвольно задаются начальные значения границ интегрирования J_{l1} , число шагов интегрирования N_{l1} , параметр суммирования R_{l1} , шаги приращения ΔJ_l , ΔN_l и ΔR_l .

2. При заданных значениях проводится анализ фундаментальных решений G_j и G_{j+1} для определения удовлетворяющего значения количества шагов интегрирования для функций G_j с границами интегрирования J_{lj} и G_{j+1} с границами интегрирования $J_{lj+1} = J_{lj} + \Delta J_l$. Анализ функций для определения удовлетворяющего значения количества шагов интегрирования проводится по непрерывной норме до выполнения критерия:

$$\begin{aligned} & \frac{\|G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj} + \Delta N, R_{l1}) - G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})\|}{\|G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})\|} \cdot 100 = \\ & = \frac{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj} + \Delta N, R_{l1}) - G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})|}{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})|} \cdot 100 \leq \delta\%, \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

в результате чего определяется количество шагов интегрирования N_{lj} для функции G_j с границами интегрирования J_{lj} и N_{lj+1} для функции G_{j+1} с границами интегрирования J_{lj+1} .

3. При достижении выполнения критерия двух функций G_j и G_{j+1} проводится анализ фундаментальных решений для определения удовлетворяющего значения границ интегрирования по непрерывной норме до выполнения критерия:

$$\begin{aligned} & \frac{\|G_{j+1}(\alpha, z, \tau; J_{lj+1}, N_{lj+1}, R_{l1}) - G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})\|}{\|G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})\|} \cdot 100 = \\ & \frac{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_{j+1}(\alpha, z, \tau; J_{lj+1}, N_{lj+1}, R_{l1}) - G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})|}{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_j(\alpha, z, \tau; J_{lj}, N_{lj}, R_{l1})|} \cdot 100 \leq \delta\%, \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

в результате чего определяются границы интегрирования $J_l = J_{lj}$.

4. После определения шага интегрирования из (2.2.42) и границ интегрирования из (2.2.43) проводится анализ фундаментального решения G с этими параметрами для определения удовлетворяющего значения параметра суммирования по углу $\alpha - R_{lj}$ по непрерывной норме до выполнения критерия:

$$\begin{aligned} & \frac{\|G_j(\alpha, z, \tau; J_l, N_l, R_{lj} + \Delta R_l) - G_j(\alpha, z, \tau; J_l, N_l, R_{lj})\|}{\|G_j(\alpha, z, \tau; J_l, N_l, R_{lj})\|} \cdot 100 = \\ & \frac{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_j(\alpha, z, \tau; J_l, N_l, R_{lj} + \Delta R_l) - G_j(\alpha, z, \tau; J_l, N_l, R_{lj})|}{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_j(\alpha, z, \tau; J_l, N_l, R_{lj})|} \cdot 100 \leq \delta\%. \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

В (2.2.42) – (2.2.44) δ – требуемое значение погрешности результатов (заданная точность). Пространственно–временная область для поиска решения: $\Omega = \{(\alpha, z, \tau) : \alpha \in (a_1, a_2], z \in [b_1, b_2], \tau \in [0, \tau_{\max}]\}$.

Построенный тройной цикл итерационного алгоритма (2.2.42), (2.2.43) и (2.2.44) позволяет определить границы интегрирования, рассчитать шаг

интегрирования и значение параметра суммирования по углу α для получения фундаментальных решений с заранее установленной точностью.

Фундаментальные решения из (2.2.39) в размерном виде примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
 G(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_1}{4\pi\rho h} \sum_{k=0}^{N_1-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^1 + q_k^1)} \left(D_1^1 G_n^F(q_k^1, \tau) + D_2^1 G_n^F(q_{k+1}^1, \tau) \right) \right), \\
 G_\alpha(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_2}{4\pi\rho h} \sum_{k=0}^{N_2-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^2 + q_k^2)} \left(D_1^2 G_{\alpha n}^F(q_k^2, \tau) + D_2^2 G_{\alpha n}^F(q_{k+1}^2, \tau) \right) \right), \\
 G_z(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_3}{4\pi\rho h} \sum_{k=0}^{N_3-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(e^{\frac{iz}{2}(q_{k+1}^3 + q_k^3)} \left(D_1^3 G_{zn}^F(q_k^3, \tau) + D_2^3 G_{zn}^F(q_{k+1}^3, \tau) \right) \right).
 \end{aligned} \tag{2.2.45}$$

где под τ подразумевается размерное время, а вместо соотношений (2.2.15) необходимо использовать следующие:

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \left(\frac{c_{66}}{\rho} + \frac{c_{66}h^2}{12R^2\rho} \right) q^2 + \frac{2nc_{16}}{\rho R} q + \frac{n^2c_{11}}{\rho R^2}, \\
 Q_2 &= \frac{c_{62}}{\rho} q^2 + \left(\frac{nc_{12} + nc_{66}}{\rho R} - \frac{nc_{66}h^2}{12R^3\rho} \right) q + \frac{n^2c_{16}}{\rho R^2}, \\
 Q_3 &= -\frac{ic_{62}h^2}{12R\rho} q^3 - \frac{inc_{66}h^2}{6R^2\rho} q^2 - \left(\frac{n^2c_{61}h^2 - c_{61}h^2}{12R^3\rho} + \frac{c_{61}}{R\rho} \right) iq - \frac{inc_{11}}{\rho R^2}, \\
 Q_4 &= \frac{c_{22}}{\rho} q^2 + \frac{2nc_{26}}{R\rho} q + \frac{n^2c_{66}h^2}{12R^4\rho} + \frac{n^2c_{66}}{R^2\rho}, \\
 Q_5 &= \frac{inc_{62}h^2}{12R^2\rho} q^2 - \left(\frac{c_{21}}{R\rho} - \frac{n^2c_{66}h^2}{6R^3\rho} \right) iq - \frac{inc_{61}}{R^2\rho} - \frac{inc_{61}h^2 - in^3c_{61}h^2}{12R^4\rho}, \\
 Q_6 &= \frac{c_{22}h^2}{12\rho} q^4 + \frac{nc_{62}h^2}{3R\rho} q^3 + \left(\frac{n^2c_{21}h^2 - c_{21}h^2}{6R^2\rho} + \frac{n^2c_{66}h^2}{3R^2\rho} \right) q^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{n^3c_{16}h^2 - nc_{16}h^2}{3R^3\rho} \right) q - \frac{n^2c_{11}h^2}{6R^4\rho} + \frac{n^4c_{11}h^2 + c_{11}h^2}{12R^4\rho} + \frac{c_{11}}{R^2\rho}.
 \end{aligned} \tag{2.2.46}$$

Вариант 2. Во втором варианте взятия интегралов из (2.2.36) используем квадратурную формулу Симпсона [12]:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right). \quad (2.2.47)$$

Тогда оригиналы в коэффициентах рядов для фундаментальных решений предстанут в виде:

$$\begin{aligned} G_n^s(z, n, \tau) &= \frac{\Delta_1}{12\pi} \sum_{-N_1}^{N_1} \left\{ G_n^F(q_k^1, n, \tau) e^{iq_k^1 z} + 4G_n^F\left(\frac{q_k^1 + q_{k+1}^1}{2}, n, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^1 + q_{k+1}^1)} + \right. \\ &\quad \left. + G_n^F(q_{k+1}^1, n, \tau) e^{iq_{k+1}^1 z} \right\}, \\ G_{an}^s(z, n, \tau) &= \frac{\Delta_2}{12\pi} \sum_{-N_2}^{N_2} \left\{ G_{an}^F(q_k^2, n, \tau) e^{iq_k^2 z} + 4G_{an}^F\left(\frac{q_k^2 + q_{k+1}^2}{2}, n, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^2 + q_{k+1}^2)} + \right. \\ &\quad \left. + G_{an}^F(q_{k+1}^2, n, \tau) e^{iq_{k+1}^2 z} \right\}, \\ G_{zn}^s(z, n, \tau) &= \frac{\Delta_3}{12\pi} \sum_{-N_3}^{N_3} \left\{ G_{zn}^F(q_k^3, n, \tau) e^{iq_k^3 z} + 4G_{zn}^F\left(\frac{q_k^3 + q_{k+1}^3}{2}, n, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^3 + q_{k+1}^3)} + \right. \\ &\quad \left. + G_{zn}^F(q_{k+1}^3, n, \tau) e^{iq_{k+1}^3 z} \right\}. \end{aligned} \quad (2.2.48)$$

С учётом разложения в экспоненциальные ряды (2.2.1) и соотношений (2.2.48) нестационарные фундаментальные решения для нормального прогиба и тангенциальных перемещений анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява примут вид:

$$\begin{aligned} G^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_1}{12\pi} \sum_{-N_1}^{N_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(G_n^F(q_k^1, \tau) e^{iq_k^1 z} + 4G_n^F\left(\frac{q_k^1 + q_{k+1}^1}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^1 + q_{k+1}^1)} + \right. \\ &\quad \left. + G_n^F(q_{k+1}^1, \tau) e^{iq_{k+1}^1 z} \right), \\ G_\alpha^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_2}{12\pi} \sum_{-N_2}^{N_2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(G_{an}^F(q_k^2, \tau) e^{iq_k^2 z} + 4G_{an}^F\left(\frac{q_k^2 + q_{k+1}^2}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^2 + q_{k+1}^2)} + \right. \\ &\quad \left. + G_{an}^F(q_{k+1}^2, \tau) e^{iq_{k+1}^2 z} \right), \\ G_z^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_3}{12\pi} \sum_{-N_3}^{N_3} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\alpha} \left(G_{zn}^F(q_k^3, \tau) e^{iq_k^3 z} + 4G_{zn}^F\left(\frac{q_k^3 + q_{k+1}^3}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^3 + q_{k+1}^3)} + \right. \\ &\quad \left. + G_{zn}^F(q_{k+1}^3, \tau) e^{iq_{k+1}^3 z} \right). \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

При проведении численных расчётов бесконечные ряды в (2.2.49) заменяются конечными суммами:

$$\begin{aligned}
 G^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_1}{12\pi} \sum_{-N_1}^{N_1} \sum_{n=-R_1}^{R_1} e^{in\alpha} \left(G_n^F(q_k^1, \tau) e^{iq_k^1 z} + 4G_n^F\left(\frac{q_k^1 + q_{k+1}^1}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^1 + q_{k+1}^1)} + \right. \\
 &\quad \left. + G_n^F(q_{k+1}^1, \tau) e^{iq_{k+1}^1 z} \right), \\
 G_\alpha^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_2}{12\pi} \sum_{-N_2}^{N_2} \sum_{n=-R_2}^{R_2} e^{in\alpha} \left(G_{\alpha n}^F(q_k^2, \tau) e^{iq_k^2 z} + 4G_{\alpha n}^F\left(\frac{q_k^2 + q_{k+1}^2}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^2 + q_{k+1}^2)} + \right. \\
 &\quad \left. + G_{\alpha n}^F(q_{k+1}^2, \tau) e^{iq_{k+1}^2 z} \right), \\
 G_z^s(\alpha, z, \tau) &= \frac{\Delta_3}{12\pi} \sum_{-N_3}^{N_3} \sum_{n=-R_3}^{R_3} e^{in\alpha} \left(G_{zn}^F(q_k^3, \tau) e^{iq_k^3 z} + 4G_{zn}^F\left(\frac{q_k^3 + q_{k+1}^3}{2}, \tau\right) e^{\frac{iz}{2}(q_k^3 + q_{k+1}^3)} + \right. \\
 &\quad \left. + G_{zn}^F(q_{k+1}^3, \tau) e^{iq_{k+1}^3 z} \right).
 \end{aligned} \tag{2.2.50}$$

В (2.2.48) – (2.2.50):

$$\Delta_l = \frac{2J_l}{N_l}, \quad q_k^l = -J_l + k_l \Delta_l, \quad q_{k+1}^l = -J_l + (k_l + 1) \Delta_l, \quad k = -N_l..N_l, \quad l = 1, 2, 3.$$

где J_l – границы интегрирования, N_l – число шагов интегрирования, Δ_l – шаг интегрирования, R_l – параметр суммирования по углу α .

Параметры численного интегрирования и суммирования определяются по алгоритму, описанному выше соотношениями (2.2.42) – (2.2.44).

Построенные новые фундаментальные решения (2.2.39) и (2.2.49) позволяют исследовать нестационарную динамику тонких упругих неограниченных анизотропных цилиндрических оболочек по гипотезам Кирхгофа–Лява.

2.3. Вспомогательные фундаментальные решения

Для оценки достоверности новых фундаментальных решений для нормального и тангенциальных перемещений анизотропной оболочки решена вспомогательная задача о нестационарном деформировании ортотропной свободно опёртой круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины h и радиуса R (см. Рисунок 4) [95, 96]. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$. В качестве математической модели оболочки принята модель Кирхгофа–Лява. Упругие свойства материала характеризуются четырьмя независимыми упругими постоянными $c_{11} = C^{1111}$, $c_{12} = C^{1122}$, $c_{22} = C^{2222}$, $c_{66} = C^{1212}$.

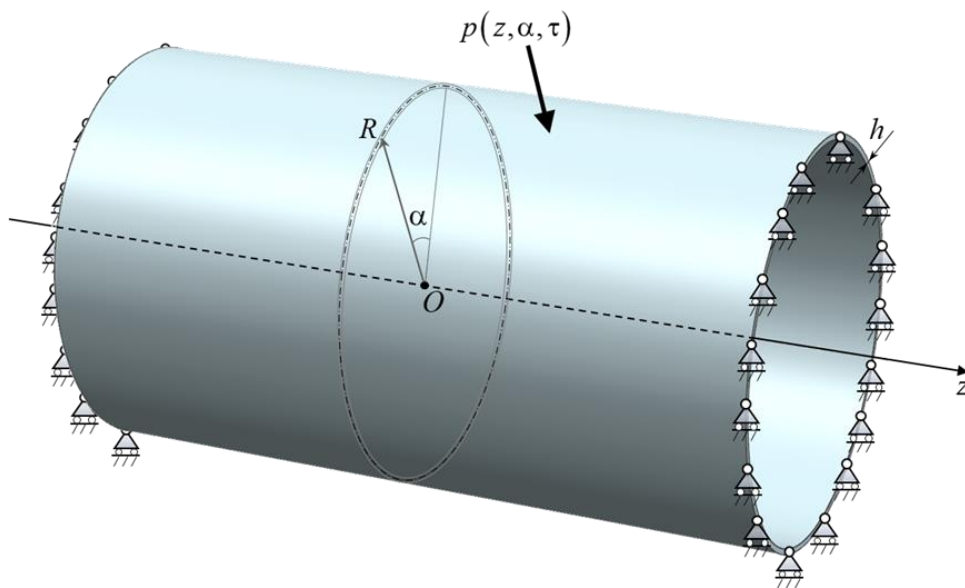


Рисунок 4 – Свободно опёртая цилиндрическая оболочка под воздействием нестационарной нагрузки

На внешнюю поверхность оболочки воздействует нестационарная нагрузка $p(\alpha, z, \tau)$, распределённая по произвольной области D , принадлежащей внешней поверхности оболочки.

Нестационарные нормальное и тангенциальные перемещения свободно опёртой цилиндрической оболочки могут быть найдены с помощью фундаментальных решений:

$$\begin{aligned}
w_l(\alpha, z, \tau) &= G_l(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau) = \\
&= \int_{\pi}^{-\pi} \int_0^l \int_0^{\tau} G_l(\alpha - \zeta, z, \xi, \tau - t) p(\zeta, \xi, t) dt d\xi d\zeta, \\
u_{l\alpha}(\alpha, z, \tau) &= G_{l\alpha}(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau) = \\
&= \int_{\pi}^{-\pi} \int_0^l \int_0^{\tau} G_{l\alpha}(\alpha - \zeta, z, \xi, \tau - t) p(\zeta, \xi, t) dt d\xi d\zeta, \\
u_{lz}(\alpha, z, \tau) &= G_{lz}(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau) = \\
&= \int_{\pi}^{-\pi} \int_0^l \int_0^{\tau} G_{lz}(\alpha - \zeta, z, \xi, \tau - t) p(\zeta, \xi, t) dt d\xi d\zeta.
\end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Определим фундаментальные решения для нормального перемещения $G_l(\alpha, z, \tau)$ и для тангенциальных перемещений $G_{l\alpha}(\alpha, z, \tau)$, $G_{lz}(\alpha, z, \tau)$ как решение задачи:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_l}{\partial \tau^2} = K(\mathbf{G}_l) + \mathbf{P}, \quad K = (K_{ij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{G}_l = (G_{l\alpha}, G_{lz}, G_l)^T, \quad \mathbf{P} = (0, 0, p)^T, \tag{2.3.2}$$

где в соотношениях (2.3.2) приняты нулевыми тангенциальные нагрузки, а нормальная нагрузка представлена в следующем виде:

$$p(\alpha, z, \tau) = \delta(z - \xi) \delta(\alpha) \delta(\tau). \tag{2.3.3}$$

В (2.3.3) ξ – координата расположения дельта-функции Дирака по оси z , $\delta(*)$ – дельта-функция Дирака.

Постановка задачи включает в себя уравнения движения упругой оболочки Кирхгофа–Лява, начальные и граничные условия.

Безразмерные уравнения движения в перемещениях имеют структуру (1.3.60), где дифференциальные операторы вытекают из (1.3.61) – (1.3.63) с условием того, что $C_2 = C_4 = 0$:

$$\begin{aligned}
K_{11}(u_\alpha) &= d^2 \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial \alpha^2} + (C_5 + C_5 f^2) \frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial z^2}, \\
K_{12}(u_z) &= (C_1 d + C_5 d - C_5 d f^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha \partial z},
\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

$$K_{13}(w) = d^2 \frac{\partial w}{\partial \alpha} - 2C_5 f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha \partial z^2},$$

$$K_{21}(u_\alpha) = K_{12}(u_\alpha),$$

$$K_{22}(u_z) = (C_5 d^2 f^2 + C_5 d^2) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \alpha^2} + C_3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}, \tag{2.3.5}$$

$$K_{23}(w) = 2C_5 d f^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \alpha^2 \partial z} + C_1 d \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$K_{31}(u_\alpha) = -K_{13}(u_\alpha), \quad K_{32}(u_z) = -K_{23}(u_z),$$

$$\begin{aligned}
K_{33}(w) &= -(2C_1 f^2 + 4C_5 f^2) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial z^2} - d^2 f^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} - \\
&- C_3 \frac{f^2}{d^2} \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - 2C_1 f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 2d^2 f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - (d^2 + d^2 f^2) w.
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Начальные условия принимаются следующие:

$$u_i|_{\tau=0} = \frac{\partial u_i}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \tag{2.3.7}$$

Граничные условия свободного опирания:

$$w|_{z=0,l} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{z=0,l} = 0. \tag{2.3.8}$$

Постановка задачи о фундаментальных решениях свободно опертой ортотропной цилиндрической оболочки следует из (2.3.1) – (2.3.8):

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 G_{l\alpha}}{\partial \tau^2} &= K_{11}(G_{l\alpha}) + K_{12}(G_{lz}) + K_{13}(G_l), \\ \frac{\partial^2 G_{lz}}{\partial \tau^2} &= K_{21}(G_{l\alpha}) + K_{22}(G_{lz}) + K_{23}(G_l),\end{aligned}\quad (2.3.9)$$

$$\frac{\partial^2 G_l}{\partial \tau^2} = K_{31}(G_{l\alpha}) + K_{32}(G_{lz}) + K_{33}(G_l) + \delta(z - \xi)\delta(\alpha)\delta(\tau).$$

Начальные условия:

$$G_{lu_i}|_{\tau=0} = \frac{\partial G_{lu_i}}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \quad G_l|_{\tau=0} = \frac{\partial G_l}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0. \quad (2.3.10)$$

Граничные условия:

$$G_l|_{z=0,l} = \frac{\partial^2 G_l}{\partial z^2}\Big|_{z=0,l} = 0. \quad (2.3.11)$$

Дифференциальные операторы в (2.3.9) имеют вид:

$$\begin{aligned}K_{11}(G_{l\alpha}) &= a_1 \frac{\partial^2 G_{l\alpha}}{\partial \alpha^2} + a_2 \frac{\partial^2 G_{l\alpha}}{\partial z^2}, \\ K_{12}(G_{lz}) &= a_3 \frac{\partial^2 G_{lz}}{\partial \alpha \partial z}, \quad K_{13}(G_l) = a_1 \frac{\partial G_l}{\partial \alpha} - a_4 \frac{\partial^3 G_l}{\partial \alpha \partial z^2},\end{aligned}\quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned}K_{21}(G_{l\alpha}) &= K_{12}(G_{l\alpha}), \\ K_{22}(G_{lz}) &= a_5 \frac{\partial^2 G_{lz}}{\partial \alpha^2} + a_6 \frac{\partial^2 G_{lz}}{\partial z^2}, \quad K_{23}(G_l) = a_7 \frac{\partial^3 G_l}{\partial \alpha^2 \partial z} + a_8 \frac{\partial G_l}{\partial z},\end{aligned}\quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned}K_{31}(G_{l\alpha}) &= -K_{13}(G_{l\alpha}), \quad K_{32}(G_{lz}) = -K_{23}(G_{lz}), \\ K_{33}(w) &= -a_9 \frac{\partial^4 G_l}{\partial \alpha^4} - a_{10} \frac{\partial^4 G_l}{\partial z^2 \partial \alpha^2} - a_{11} \frac{\partial^4 G_l}{\partial z^4} - a_{12} \frac{\partial^2 G_l}{\partial \alpha^2} - a_{13} \frac{\partial^2 G_l}{\partial z^2} - a_{14} G_l.\end{aligned}\quad (2.3.14)$$

В соотношениях (2.3.12) – (2.3.14) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a_1 &= d^2, \quad a_2 = C_5(1 + f^2), \quad a_3 = d(C_1 + C_5(1 - f^2)), \quad a_4 = 2C_5f^2, \\
a_5 &= C_5d^2(1 + f^2), \quad a_6 = C_3, \quad a_7 = 2C_5df^2, \quad a_8 = C_1d, \quad a_9 = d^2f^2, \\
a_{10} &= 2f^2(C_1 + 2C_5), \quad a_{11} = C_3\frac{f^2}{d^2}, \quad a_{12} = 2d^2f^2, \quad a_{13} = 2C_1f^2, \quad a_{14} = d^2(1 + f^2).
\end{aligned} \tag{2.3.15}$$

Представим искомые функции, входящие в (2.3.9), в виде двойных тригонометрических рядов Фурье:

$$\begin{aligned}
G_{l\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} G_{l\alpha nm}(\tau) \sin(\lambda_n z) \sin(\mu_m \alpha), \\
G_{lz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{lzm}(\tau) \cos(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\
G_l &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} G_{lnm}(\tau) \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\
\delta(z - \xi) \delta(\alpha) \delta(\tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \delta_{nm}(\xi) \delta_{nm}(\tau) \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha),
\end{aligned} \tag{2.3.16}$$

где

$$\begin{aligned}
\delta_{nm}(\xi) &= \frac{2}{\pi l} \sin(\lambda_n \xi), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad \mu_m = m, \quad m \neq 0, \\
\delta_{n0}(\xi) &= \frac{1}{\pi l} \sin(\lambda_n \xi), \quad z \in [0, l], \quad \alpha \in [-\pi, \pi],
\end{aligned}$$

здесь l – длина оболочки, n, m – коэффициенты рядов, ξ – координата приложения дельта-функции Дирака.

Подставим (2.3.16) в (2.3.9), возьмём производные, опустим знаки суммирования, сократим на тригонометрические множители и сгруппируем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} G_{l\alpha nm}(\tau) &= (-a_1 \mu_m^2 - a_2 \lambda_n^2) G_{l\alpha nm}(\tau) + a_3 \lambda_n \mu_m G_{lznm}(\tau) + \\
&\quad + (-a_1 \mu_m - a_4 \lambda_n^2 \mu_m) G_{lnm}(\tau), \\
\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} G_{lznm}(\tau) &= a_3 \lambda_n \mu_m G_{l\alpha nm}(\tau) + (-a_5 \mu_m^2 - a_6 \lambda_n^2) G_{lznm}(\tau) + \\
&\quad + (-a_7 \lambda_n \mu_m^2 + a_8 \lambda_n) G_{lnm}(\tau), \\
\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} G_{lnm}(\tau) &= (-a_1 \mu_m - a_4 \lambda_n^2 \mu_m) G_{l\alpha nm}(\tau) + (-a_7 \lambda_n \mu_m^2 + a_8 \lambda_n) G_{lznm}(\tau) + \\
&\quad + (-a_9 \mu_m^4 - a_{10} \lambda_n^2 \mu_m^2 - a_{11} \lambda_n^4 + a_{12} \mu_m^2 + a_{13} \lambda_n^2 - a_{14}) G_{lnm}(\tau) + \delta_{nm}(\xi) \delta_{nm}(\tau).
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

Применим к соотношениям из (2.3.17) преобразования Лапласа по времени τ с учётом начальных условий (2.3.10) [97]. У функций верхний индекс « L » обозначает её трансформанту по Лапласу, s – параметр интегрального преобразования Лапласа.

$$\begin{aligned}
s^2 G_{l\alpha nm}^L &= (-a_1 \mu_m^2 - a_2 \lambda_n^2) G_{l\alpha nm}^L + a_3 \lambda_n \mu_m G_{lznm}^L + (-a_1 \mu_m - a_4 \lambda_n^2 \mu_m) G_{lnm}^L, \\
s^2 G_{lznm}^L &= a_3 \lambda_n \mu_m G_{l\alpha nm}^L + (-a_5 \mu_m^2 - a_6 \lambda_n^2) G_{lznm}^L + (-a_7 \lambda_n \mu_m^2 + a_8 \lambda_n) G_{lnm}^L, \\
s^2 G_{lnm}^L &= (-a_1 \mu_m - a_4 \lambda_n^2 \mu_m) G_{l\alpha nm}^L + (-a_7 \lambda_n \mu_m^2 + a_8 \lambda_n) G_{lznm}^L + \\
&\quad + (-a_9 \mu_m^4 - a_{10} \lambda_n^2 \mu_m^2 - a_{11} \lambda_n^4 + a_{12} \mu_m^2 + a_{13} \lambda_n^2 - a_{14}) G_{lnm}^L + \delta_{nm}(\xi).
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

Приведём соотношения (2.3.18) к виду:

$$\begin{aligned}
(s^2 + \Lambda_1) G_{l\alpha nm}^L + \Lambda_2 G_{lznm}^L + \Lambda_3 G_{lnm}^L &= 0, \\
\Lambda_2 G_{l\alpha nm}^L + (s^2 + \Lambda_4) G_{lznm}^L + \Lambda_5 G_{lnm}^L &= 0, \\
\Lambda_3 G_{l\alpha nm}^L + \Lambda_5 G_{lznm}^L + (s^2 + \Lambda_6) G_{lnm}^L &= \delta_{nm}(\xi),
\end{aligned} \tag{2.3.19}$$

где

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= a_1 \mu_m^2 + a_2 \lambda_n^2, \quad \Lambda_2 = -a_3 \lambda_n \mu_m, \quad \Lambda_3 = a_1 \mu_m + a_4 \lambda_n^2 \mu_m, \\
\Lambda_4 &= a_5 \mu_m^2 + a_6 \lambda_n^2, \quad \Lambda_5 = a_7 \lambda_n \mu_m^2 - a_8 \lambda_n, \\
\Lambda_6 &= a_9 \mu_m^4 + a_{10} \lambda_n^2 \mu_m^2 + a_{11} \lambda_n^4 - a_{12} \mu_m^2 - a_{13} \lambda_n^2 + a_{14}.
\end{aligned}$$

Система (2.3.19) имеет следующую структуру:

$$\mathbf{A}\mathbf{G} = \mathbf{B},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} s^2 + \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_2 & s^2 + \Lambda_4 & \Lambda_5 \\ \Lambda_3 & \Lambda_5 & s^2 + \Lambda_6 \end{pmatrix}, \mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{l\alpha nm}^L \\ G_{lznm}^L \\ G_{lnm}^L \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta_{nm}(\xi) \end{pmatrix}. \quad (2.3.20)$$

Решение системы относительно функций $G_{lnm}^L, G_{l\alpha nm}^L, G_{lznm}^L$:

$$\mathbf{G} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B},$$

где \mathbf{A}^{-1} – матрица, обратная матрице \mathbf{A} . В результате получаем:

$$G_{lnm}^L = \delta_{nm}(\xi) \frac{s^4 + s^2 T_1 + T_2}{s^6 + s^4 T_3 + s^2 T_4 + T_5}, \quad (2.3.21)$$

$$G_{l\alpha nm}^L = -\delta_{nm}(\xi) \frac{s^2 \Lambda_3 + T_6}{s^6 + s^4 T_3 + s^2 T_4 + T_5}, \quad (2.3.22)$$

$$G_{lznm}^L = -\delta_{nm}(\xi) \frac{s^2 \Lambda_5 + T_7}{s^6 + s^4 T_3 + s^2 T_4 + T_5},$$

где

$$\begin{aligned} T_1 &= \Lambda_1 + \Lambda_4, \quad T_2 = \Lambda_1 \Lambda_4 - \Lambda_2^2, \quad T_3 = \Lambda_1 + \Lambda_4 + \Lambda_6, \\ T_4 &= \Lambda_1 \Lambda_4 + \Lambda_1 \Lambda_6 - \Lambda_2^2 - \Lambda_3^2 + \Lambda_4 \Lambda_6 - \Lambda_5^2, \\ T_5 &= \Lambda_1 \Lambda_4 \Lambda_6 - \Lambda_1 \Lambda_5^2 - \Lambda_2^2 \Lambda_6 + 2\Lambda_2 \Lambda_3 \Lambda_5 - \Lambda_3^2 \Lambda_4, \\ T_6 &= \Lambda_3 \Lambda_4 - \Lambda_2 \Lambda_5, \quad T_7 = \Lambda_1 \Lambda_5 - \Lambda_2 \Lambda_3. \end{aligned}$$

Оригиналы функций (2.3.21), (2.3.22) по Лапласу зависят от характера нулей знаменателя бикубического уравнения

$$v^3 + v^2 T_3 + v T_4 + T_5 = 0, \quad v = s^2. \quad (2.3.23)$$

Согласно формулам Кардано [31] кубическое уравнение (2.3.23) с помощью замены переменной v

$$v = y - \frac{T_3}{3}. \quad (2.3.24)$$

приводится к каноническому трёхчленному виду:

$$y^3 + Py + Q = 0, \quad (2.3.25)$$

где

$$P = P(n, m) = \frac{3T_4 - T_3^2}{3}, \quad Q = Q(n, m) = \frac{2T_3^3 - 9T_3T_4 + 27T_5}{27}. \quad (2.3.26)$$

Дискриминант многочлена (2.3.25) определяется как:

$$D = D(n, m) = -4P^3 - 27Q^2 = -108\left(\tilde{D}\right), \quad \tilde{D} = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{2}\right)^2, \quad (2.3.27)$$

при анализе которого определяется тип корней уравнения (2.3.25) согласно следующим правилам:

- если $D(n, m) < 0$, то уравнение имеет один действительный корень и два комплексно–сопряжённых корня,
- если $D(n, m) > 0$, то уравнение имеет три различных действительных корня,
- если $D(n, m) = 0$, то уравнение имеет три действительных корня, два из которых равны.

В случае $D(n, m) < 0$ корни уравнения (2.3.25) определяются следующими соотношениями:

$$y_1 = \alpha + \beta, \quad y_{2,3} = -\frac{\alpha + \beta}{2} \pm i\sqrt{3} \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (2.3.28)$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\tilde{D}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\tilde{D}}}.$$

Применяя формулы из (2.3.28) следует для каждого значения α выбирать такое значение β , при котором выполняется условие, что

$$\alpha\beta = -\frac{P}{3}. \quad (2.3.29)$$

В случае $D(n, m) > 0$ корни уравнения (2.3.25) определяются следующими соотношениями:

$$y_{1,2,3} = \alpha + \beta, \quad \alpha = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\tilde{D}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\tilde{D}}}, \quad \alpha\beta = -\frac{P}{3}. \quad (2.3.30)$$

Формулы для нахождения трёх действительных корней уравнения (2.3.25) представляются в виде:

$$y_1 = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) \sqrt{-\frac{P}{3}}, \quad y_2 = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) \sqrt{-\frac{P}{3}}, \quad y_3 = 2 \cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{4\pi}{3}\right) \sqrt{-\frac{P}{3}}, \quad (2.3.31)$$

где φ определяется как:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{3Q}{2P} \sqrt{-\frac{3}{P}}\right). \quad (2.3.32)$$

В случае $D(n, m) = 0$ корни уравнения (2.3.25) определяются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ y_1 &= 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}}, \quad y_2 = y_3 = -\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}}, \quad \text{если } P \neq 0 \text{ и } Q \neq 0, \\ y_1 &= y_2 = y_3 = 0, \quad \text{если } P = Q = 0. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Определив корни уравнения (2.3.25) и подставив в (2.3.24) получим корни бикубического уравнения (2.3.23)

$$v_1 = y_1 - \frac{T_3}{3}, v_2 = y_2 - \frac{T_3}{3}, v_3 = y_3 - \frac{T_3}{3}. \quad (2.3.34)$$

Знаменатель функций (2.3.21), (2.3.22) можно представить так:

$$\begin{aligned} s^6 + s^4 T_3 + s^2 T_4 + T_5 &= \prod_{k=1}^6 (s - s_k) = \\ &= (s - s_1)(s + s_1)(s - s_3)(s + s_3)(s - s_5)(s + s_5), \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

где

$$s_1 = \sqrt{v_1}, s_2 = -s_1, s_3 = \sqrt{v_2}, s_4 = -s_3, s_5 = \sqrt{v_3}, s_6 = -s_5, \quad (2.3.36)$$

а оригиналы фундаментальных решений (2.3.21) и (2.3.22) по Лапласу построить аналитически с применением второй теоремы разложения для преобразования Лапласа [38] (с помощью вычетов):

$$\begin{aligned} G_{lmm}(\tau) &= \sum_{k=1}^6 U_k e^{s_k \tau}, \quad U_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{lmm}^L(n, m, s_k), \\ G_{lcnm}(\tau) &= \sum_{k=1}^6 Y_k e^{s_k \tau}, \quad Y_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{lcnm}^L(n, m, s_k), \\ G_{lzm}(\tau) &= \sum_{k=1}^6 V_k e^{s_k \tau}, \quad V_k = \lim_{s \rightarrow s_k} (s - s_k) G_{lzm}^L(n, m, s_k), \end{aligned} \quad (2.3.37)$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= \delta_{nm}(\xi) \frac{s_1^4 + s_1^2 T_1 + T_2}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, \quad U_2 = -U_1, \\ U_3 &= \delta_{nm}(\xi) \frac{s_3^4 + s_3^2 T_1 + T_2}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, \quad U_4 = -U_3, \\ U_5 &= \delta_{nm}(\xi) \frac{s_5^4 + s_5^2 T_1 + T_2}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, \quad U_6 = -U_5, \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

$$\begin{aligned}
Y_1 &= -\delta_{nm}(\xi) \frac{s_1^2 \Lambda_3 - T_6}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, Y_2 = -Y_1, \\
Y_3 &= -\delta_{nm}(\xi) \frac{s_3^2 \Lambda_3 - T_6}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, Y_4 = -Y_3, \\
Y_5 &= -\delta_{nm}(\xi) \frac{s_5^2 \Lambda_3 - T_6}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, Y_6 = -Y_5, \\
V_1 &= -\delta_{nm}(\xi) \frac{s_1^2 \Lambda_5 + T_7}{2s_1(s_1^2 - s_3^2)(s_1^2 - s_5^2)}, V_2 = -V_1, \\
V_3 &= -\delta_{nm}(\xi) \frac{s_3^2 \Lambda_5 + T_7}{2s_3(s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 - s_5^2)}, V_4 = -V_3, \\
V_5 &= -\delta_{nm}(\xi) \frac{s_5^2 \Lambda_5 + T_7}{2s_5(s_5^2 - s_3^2)(s_5^2 - s_1^2)}, V_6 = -V_5.
\end{aligned}$$

Подставив (2.3.38) в (2.3.37) получим выражения для фундаментальных решений в коэффициентах рядов:

$$\begin{aligned}
G_{l_{nm}}(\tau) &= 2[U_1 \text{sh}(s_1 \tau) + U_3 \text{sh}(s_3 \tau) + U_5 \text{sh}(s_5 \tau)], \\
G_{l_{\alpha nm}}(\tau) &= 2[Y_1 \text{sh}(s_1 \tau) + Y_3 \text{sh}(s_3 \tau) + Y_5 \text{sh}(s_5 \tau)], \\
G_{l_{znm}}(\tau) &= 2[V_1 \text{sh}(s_1 \tau) + V_3 \text{sh}(s_3 \tau) + V_5 \text{sh}(s_5 \tau)].
\end{aligned} \tag{2.3.39}$$

Фундаментальные решения для нормального и тангенциальных перемещений свободно опертой ортотропной круговой цилиндрической оболочки с учётом разложения в тригонометрические ряды Фурье (2.3.16) и выражений (2.3.39) примут вид:

$$\begin{aligned}
G_l(\alpha, z, \tau; \xi) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [U_1 \text{sh}(s_1 \tau) + U_3 \text{sh}(s_3 \tau) + U_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \\
&\quad \times \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\
G_{l_{\alpha}}(\alpha, z, \tau; \xi) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [Y_1 \text{sh}(s_1 \tau) + Y_3 \text{sh}(s_3 \tau) + Y_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \\
&\quad \times \sin(\lambda_n z) \sin(\mu_m \alpha),
\end{aligned} \tag{2.3.40}$$

$$G_{lz}(\alpha, z, \tau; \xi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [V_1 \text{sh}(s_1 \tau) + V_3 \text{sh}(s_3 \tau) + V_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \\ \times \cos(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha),$$

где

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \quad \mu_m = m.$$

При проведении численных расчётов бесконечные ряды в (2.3.40) заменяются конечными суммами:

$$G_l(\alpha, z, \tau; \xi) = 2 \sum_{n=1}^{H_1} \sum_{m=0}^{M_1} [U_1 \text{sh}(s_1 \tau) + U_3 \text{sh}(s_3 \tau) + U_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \\ \times \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \\ G_{l\alpha}(\alpha, z, \tau; \xi) = 2 \sum_{n=1}^{H_2} \sum_{m=1}^{M_2} [Y_1 \text{sh}(s_1 \tau) + Y_3 \text{sh}(s_3 \tau) + Y_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \\ \times \sin(\lambda_n z) \sin(\mu_m \alpha), \\ G_{lz}(\alpha, z, \tau; \xi) = 2 \sum_{n=0}^{H_3} \sum_{m=0}^{M_3} [V_1 \text{sh}(s_1 \tau) + V_3 \text{sh}(s_3 \tau) + V_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \\ \times \cos(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha). \quad (2.3.41)$$

Расчёт количества удержанных членов сумм по оси z – H_p , по углу α – M_p , ($p=1, 2, 3$) выполняется на основе анализа сходимости фундаментальных решений по непрерывной норме с заданной точностью. Анализ проводится по алгоритму, заключающемуся в итерационном изменении параметров суммирования и определения относительной погрешности результатов на каждом шаге до достижения заданной точности. На примере определения H_1, M_1 для расчёта $G_l(\alpha, z, \tau)$ в (2.3.40) алгоритм можно описать следующим образом:

– Задаются начальные значения H_{11}, M_{11} , шаги приращения $\Delta H_1, \Delta M_1$ и значение погрешности результатов δ (точность);

– При заданных значениях проводится анализ фундаментальных решений G_{lj} и G_{lj+1} для определения удовлетворяющего значения количества удержанных членов сумм H_{1j} по непрерывной норме до выполнения критерия (j соответствует номеру итерации $j = 1, 2, 3, \dots$):

$$\begin{aligned} & \frac{\|G_{lj+1}(\alpha, z, \tau; H_{1j} + \Delta H_1, M_{11}) - G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_{1j}, M_{11})\|}{\|G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_{1j}, M_{11})\|} \cdot 100 = \\ & \frac{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_{lj+1}(\alpha, z, \tau; H_{1j} + \Delta H_1, M_{11}) - G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_{1j}, M_{11})|}{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_{1j}, M_{11})|} \cdot 100 \leq \delta\%. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

– Определив H_1 как значение H_{1j} на последнем шаге выполнения (2.3.42) производится анализ фундаментальных решений для определения удовлетворяющего значения количества удержанных членов сумм M_{1j} до выполнения критерия:

$$\begin{aligned} & \frac{\|G_{lj+1}(\alpha, z, \tau; H_1, M_{1j} + \Delta M_1) - G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_1, M_{1j})\|}{\|G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_1, M_{1j})\|} \cdot 100 = \\ & \frac{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_{lj+1}(\alpha, z, \tau; H_1, M_{1j} + \Delta M_1) - G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_1, M_{1j})|}{\max_{\substack{a_1 \leq \alpha \leq a_2 \\ b_1 \leq z \leq b_2}} |G_{lj}(\alpha, z, \tau; H_1, M_{1j})|} \cdot 100 \leq \delta\%, \end{aligned} \quad (2.3.43)$$

в результате чего определяется количества удержанных членов сумм M_1 .

В размерном виде фундаментальные решения для нормальных и тангенциальных перемещений свободно опёртой ортотропной круговой цилиндрической оболочки следующие:

$$\begin{aligned} G_l(\alpha, z, \tau; \xi) = & \frac{2}{\rho h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [U_1 \text{sh}(s_1 \tau) + U_3 \text{sh}(s_3 \tau) + U_5 \text{sh}(s_5 \tau)] \times \\ & \times \sin(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha), \end{aligned} \quad (2.3.44)$$

$$G_{I\alpha}(\alpha, z, \tau; \xi) = \frac{2}{\rho h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [Y_1 \operatorname{sh}(s_1 \tau) + Y_3 \operatorname{sh}(s_3 \tau) + Y_5 \operatorname{sh}(s_5 \tau)] \times \\ \times \sin(\lambda_n z) \sin(\mu_m \alpha),$$

$$G_{Iz}(\alpha, z, \tau; \xi) = \frac{2}{\rho h} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [V_1 \operatorname{sh}(s_1 \tau) + V_3 \operatorname{sh}(s_3 \tau) + V_5 \operatorname{sh}(s_5 \tau)] \times \\ \times \cos(\lambda_n z) \cos(\mu_m \alpha),$$

где под τ подразумевается размерное время.

Соотношения (2.3.40) фундаментальных решений для нормального и тангенциальных перемещений ортотропной свободно опертой цилиндрической оболочки универсальны по отношению к свойствам материала оболочки, который также может быть изотропным или трансверсально–изотропным.

2.4. Достоверность фундаментальных решений

В качестве проверки достоверности построенных новых фундаментальных решений (2.2.39) и (2.2.49) для тонкой упругой неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява выполним численные расчёты и сопоставим полученные результаты с результатами расчётов по соотношениям вспомогательных фундаментальных решений (2.3.40).

Материал оболочек Ероху S–glass [142], упругие константы которого (в Па):

$$c_{11} = 5.202 \cdot 10^{10}, c_{12} = 3.746 \cdot 10^9, c_{16} = 0, \\ c_{22} = 9.793 \cdot 10^9, c_{66} = 4.700 \cdot 10^9, c_{26} = 0.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы согласно (1.3.59) таковы:

$$C_1 = 0.072, C_2 = 0, C_3 = 0.188, C_4 = 0, C_5 = 0.090.$$

Геометрические параметры следующие: $R/h = 80$, $l = 4$.

Для получения решения с заданной точностью необходимо провести анализ сходимости. Анализ сходимости проводится по алгоритму, описанному в параграфе 2.2 (см. (2.2.42) – (2.2.44)) для неограниченной и параграфе 2.3 (см. (2.3.42), (2.3.43)) для свободно опертой оболочки.

При построении фундаментальных решений для нормальных перемещений неограниченной оболочки использовались следующие параметры: $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\tau \in [0, 1]$, $\delta = 0.03\%$, $J_1 = 600$, $N_1 = 1600$, $R_1 = 40$ при использовании метода быстро осциллирующих функций, $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\tau \in [0, 1]$, $\delta = 0.03\%$, $J_1 = 440$, $N_1 = 340$, $R_1 = 40$ при использовании квадратурной формулы Симпсона. Для свободно опертой оболочки: $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $z \in [0, 4]$, $\tau \in [0, 1]$, $\xi = 2$, $\delta = 0.03\%$, $H_1 = 300$, $M_1 = 40$.

Для демонстрации сходимости фундаментальных решений нормального перемещения для неограниченной оболочки по количеству членов ряда R_1 в (2.2.40) ниже приведены соответствующие графики. Сплошной линией показано фундаментальное решение для неограниченной оболочки, построенное при $R_1 = 40$, штриховой – при $R_1 = 30$ и штрихпунктирной – при $R_1 = 20$ в моменты безразмерного времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$.

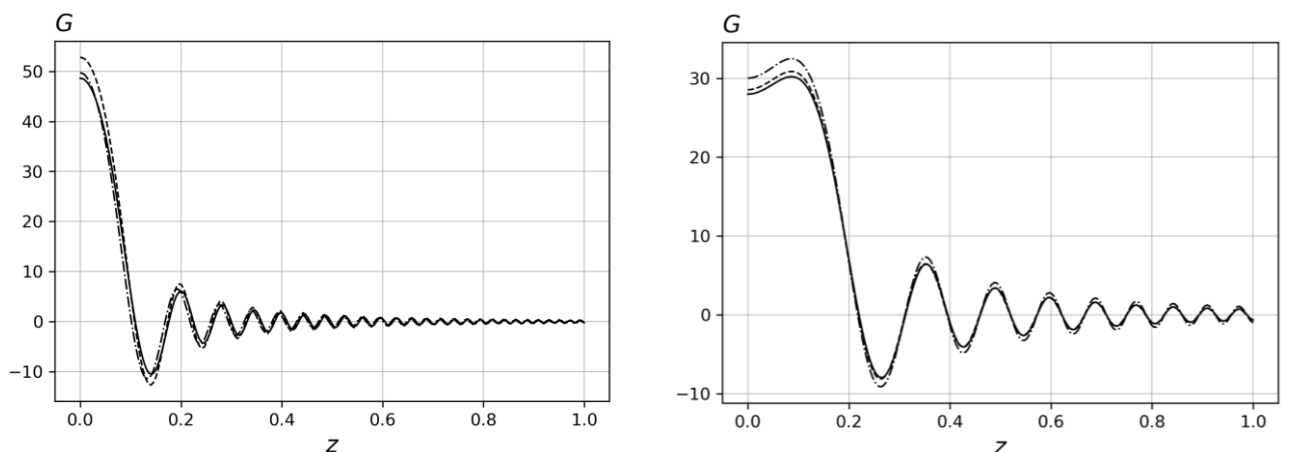


Рисунок 5 – Сопоставление фундаментальных решений нормального перемещения вдоль образующей цилиндрической оболочки в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$ при различных значениях количества членов ряда R_1

Для демонстрации сходимости фундаментальных решений для свободно опёртой оболочки по количеству членов ряда M_1 в (2.3.41) ниже приведены соответствующие графики. Сплошной линией показано фундаментальное решение для свободно опёртой оболочки, построенное при $M_1 = 40$, штриховой – при $M_1 = 30$ и штрихпунктирной – при $M_1 = 20$ в моменты безразмерного времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$.

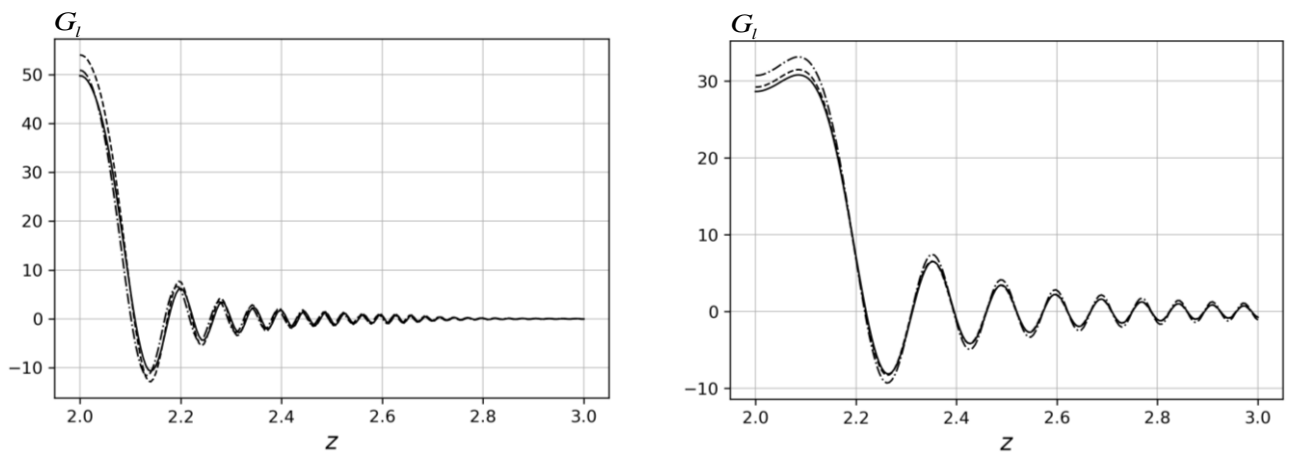


Рисунок 6 – Сопоставление фундаментальных решений вдоль образующей свободно опёртой цилиндрической оболочки в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$ при различных значениях количества членов ряда M_1

На рисунках 7 и 8 представлены графики распределения фундаментальных решений для нормальных перемещений вдоль образующих цилиндрической оболочки при $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{18}$ и по углу α в сечении по $z = 0$, $z = 0.25$ в безразмерный момент времени $\tau = 1$ соответственно. Сплошные линии соответствуют решению согласно формуле (2.2.40), точками обозначено решение по (2.2.50) для неограниченной оболочки, а штриховые согласно формуле (2.3.41) для свободно опёртой оболочки.

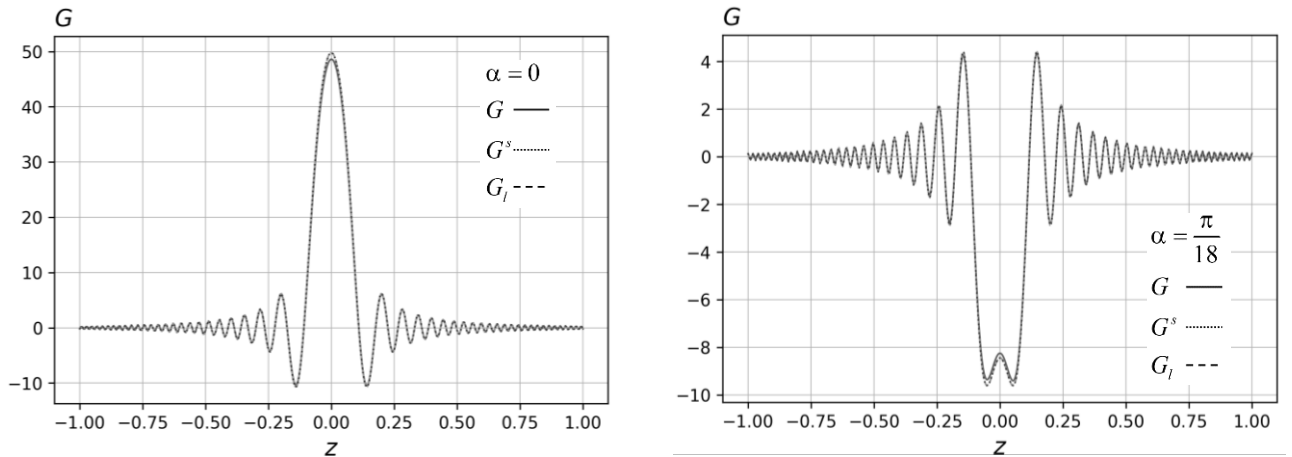


Рисунок 7 – Сопоставление фундаментальных решений для нормальных перемещений вдоль образующих цилиндрической оболочки в момент времени $\tau = 1$

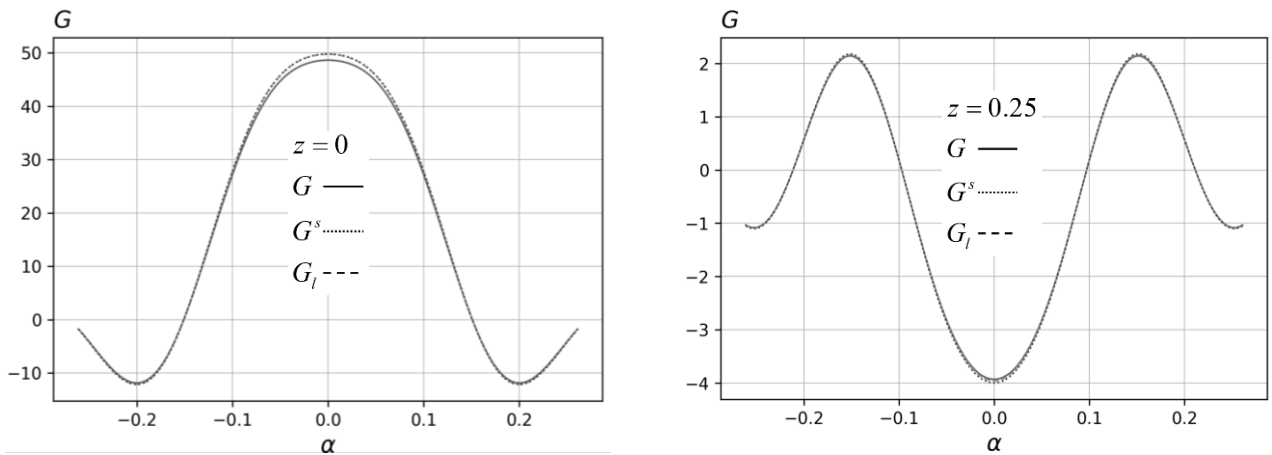


Рисунок 8 – Сопоставление фундаментальных решений для нормальных перемещений по углу цилиндрической оболочки в момент времени $\tau = 1$

Далее на рисунках 9 и 10 представлены графики распределения фундаментальных решений для тангенциальных перемещений вдоль образующей цилиндрической оболочки при $\alpha = \frac{\pi}{18}$ и по углу α в сечении по $z = 0.25$ в безразмерный момент времени $\tau = 1$ соответственно. Сплошные линии соответствуют решениям (2.2.40), точками обозначено решение (2.2.50) для неограниченной оболочки, а штриховые по соотношениям из (2.3.41) для свободно опёртой оболочки.

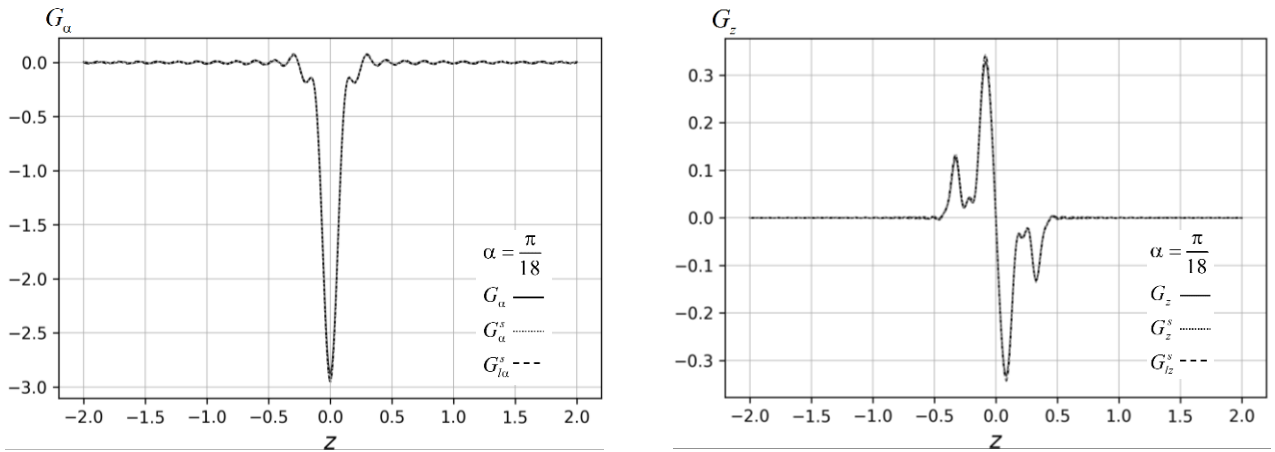


Рисунок 9 – Сопоставление фундаментальных решений для тангенциальных перемещений вдоль образующей цилиндрической оболочки в момент времени $\tau = 1$

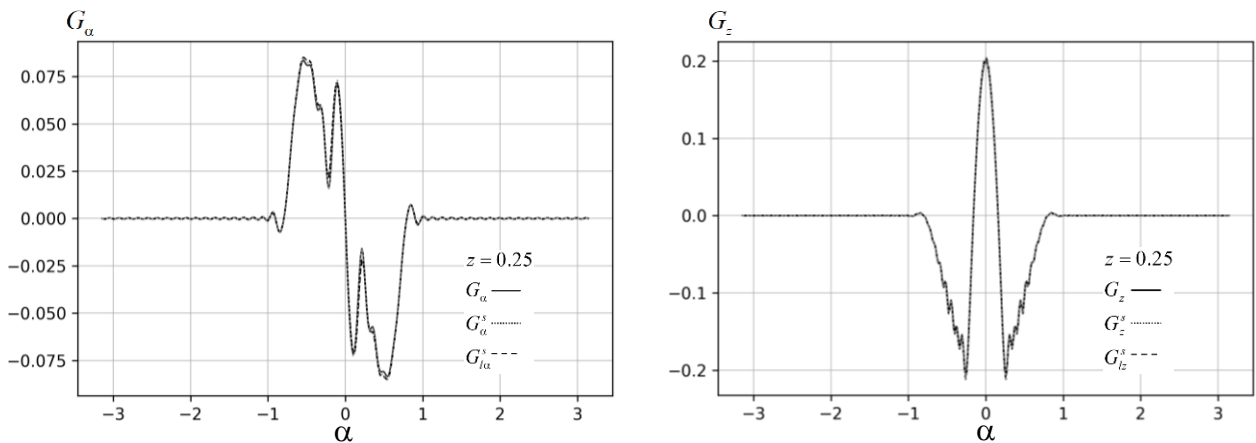


Рисунок 10 – Сопоставление фундаментальных решений для тангенциальных перемещений по углу цилиндрической оболочки в момент времени $\tau = 1$

При построении графиков фундаментальных решений для тангенциальных перемещений неограниченной оболочки G_α по соотношениям (2.2.40) использовались следующие рассчитанные параметры численного интегрирования и суммирования: $J_2 = 60, N_2 = 120, R_2 = 90$, для фундаментальных решений G_α^s по (2.2.50): $J_2 = 60, N_2 = 20, R_2 = 90$, а для свободно опёртой оболочки $G_{l\alpha}$ по (2.3.41): $H_2 = 80, M_2 = 90$. Для построения графиков тангенциальных перемещений G_z по (2.2.40) использовались

следующие параметры: $J_3 = 80$, $N_3 = 170$, $R_3 = 110$, для G_z^s по (2.2.50):
 $J_3 = 110$, $N_3 = 30$, $R_3 = 140$, для G_{lz} по (2.3.41): $H_3 = 90$, $M_3 = 110$.

На рисунках ниже продемонстрированы трёхмерные представления фундаментального решения для нормальных перемещений неограниченной и свободно опертой оболочки в безразмерный момент времени $\tau = 1$.

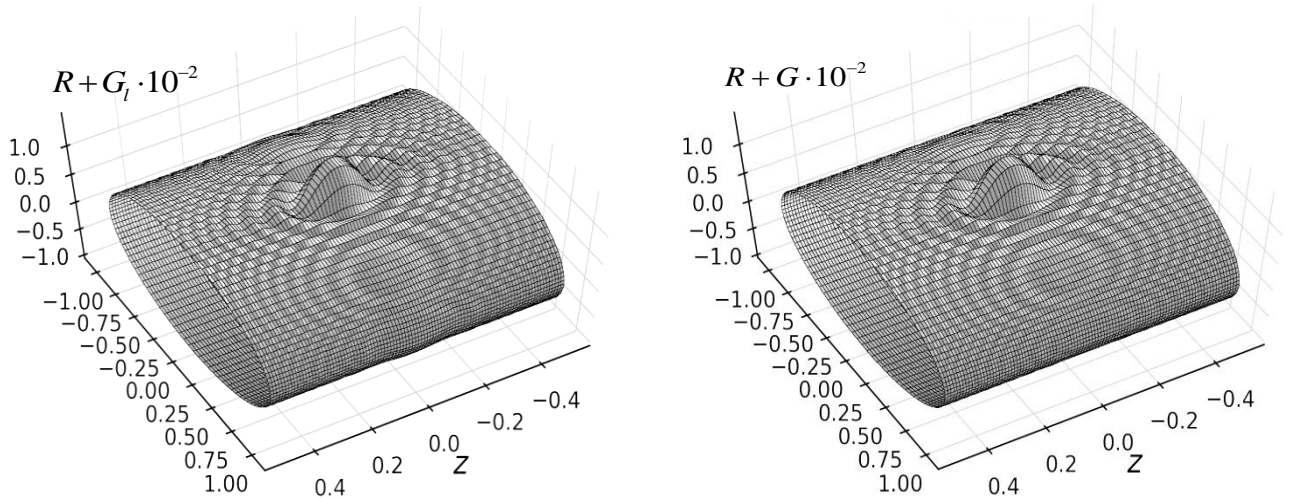


Рисунок 11 – Трёхмерное представление фундаментального решения для нормальных перемещений свободно опертой оболочки (слева) и неограниченной цилиндрической оболочки (справа) в момент времени $\tau = 1$

На рисунках 7 – 11 видно, что характеры нестационарных фундаментальных решений совпадают и близки численно. Относительные погрешности функций составили:

$$\frac{\|G(0, z, 1) - G_l(0, z, 1)\|}{\|G(0, z, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} |G(0, z, 1) - G_l(0, z, 1)|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} |G(0, z, 1)|} \cdot 100 = 2.257\%,$$

$$\frac{\left\| G\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_l\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) \right\|}{\left\| G\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) \right\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left| G\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_l\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) \right|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left| G\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) \right|} \cdot 100 = 2.175\%, \quad (2.4.1)$$

$$\frac{\|G(\alpha, 0, 1) - G_l(\alpha, 0, 1)\|}{\|G(\alpha, 0, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G(\alpha, 0, 1) - G_l(\alpha, 0, 1)|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G(\alpha, 0, 1)|} \cdot 100 = 2.257\%,$$

$$\frac{\|G(\alpha, 0.25, 1) - G_l(\alpha, 0.25, 1)\|}{\|G(\alpha, 0.25, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G(\alpha, 0.25, 1) - G_l(\alpha, 0.25, 1)|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G(\alpha, 0.25, 1)|} \cdot 100 = 0.825\%,$$

$$\frac{\|G^s(0, z, 1) - G_l(0, z, 1)\|}{\|G^s(0, z, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} |G^s(0, z, 1) - G_l(0, z, 1)|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} |G^s(0, z, 1)|} \cdot 100 = 0.567\%,$$

$$\frac{\|G^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_l\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|}{\|G^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_l\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|} \cdot 100 = 0.422\%,$$

$$\frac{\|G^s(\alpha, 0, 1) - G_l(\alpha, 0, 1)\|}{\|G^s(\alpha, 0, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G^s(\alpha, 0, 1) - G_l(\alpha, 0, 1)|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G^s(\alpha, 0, 1)|} \cdot 100 = 0.498\%,$$

$$\frac{\|G^s(\alpha, 0.25, 1) - G_l(\alpha, 0.25, 1)\|}{\|G^s(\alpha, 0.25, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G^s(\alpha, 0.25, 1) - G_l(\alpha, 0.25, 1)|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G^s(\alpha, 0.25, 1)|} \cdot 100 = 0.287\%,$$

$$\frac{\|G_\alpha\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_{l\alpha}\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|}{\|G_\alpha\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G_\alpha\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_{l\alpha}\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G_\alpha\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|} \cdot 100 = 2.428\%,$$

$$\frac{\|G_\alpha(\alpha, 0.25, 1) - G_{l\alpha}(\alpha, 0.25, 1)\|}{\|G_\alpha(\alpha, 0.25, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G_\alpha(\alpha, 0.25, 1) - G_{l\alpha}(\alpha, 0.25, 1)|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G_\alpha(\alpha, 0.25, 1)|} \cdot 100 = 8.162\%,$$

$$\frac{\|G_z\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_{lz}\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|}{\|G_z\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G_z\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_{lz}\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G_z\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|} \cdot 100 = 3.918\%,$$

$$\frac{\|G_z(\alpha, 0.25, 1) - G_{lz}(\alpha, 0.25, 1)\|}{\|G_z(\alpha, 0.25, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G_z(\alpha, 0.25, 1) - G_{lz}(\alpha, 0.25, 1)|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G_z(\alpha, 0.25, 1)|} \cdot 100 = 2.650\%,$$

$$\frac{\|G_\alpha^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_{l\alpha}^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|}{\|G_\alpha^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G_\alpha^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right) - G_{l\alpha}^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left|G_\alpha^s\left(\frac{\pi}{18}, z, 1\right)\right|} \cdot 100 = 1.274\%,$$

$$\frac{\|G_\alpha^s(\alpha, 0.25, 1) - G_{l\alpha}^s(\alpha, 0.25, 1)\|}{\|G_\alpha^s(\alpha, 0.25, 1)\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G_\alpha^s(\alpha, 0.25, 1) - G_{l\alpha}^s(\alpha, 0.25, 1)|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |G_\alpha^s(\alpha, 0.25, 1)|} \cdot 100 = 4.361\%,$$

$$\frac{\left\| G_z^s \left(\frac{\pi}{18}, z, 1 \right) - G_{Iz} \left(\frac{\pi}{18}, z, 1 \right) \right\|}{\left\| G_z^s \left(\frac{\pi}{18}, z, 1 \right) \right\|} \cdot 100 = \frac{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left| G_z^s \left(\frac{\pi}{18}, z, 1 \right) - G_{Iz} \left(\frac{\pi}{18}, z, 1 \right) \right|}{\max_{b_1 \leq z \leq b_2} \left| G_z^s \left(\frac{\pi}{18}, z, 1 \right) \right|} \cdot 100 = 1.787\%,$$

$$\frac{\left\| G_z^s (\alpha, 0.25, 1) - G_{Iz} (\alpha, 0.25, 1) \right\|}{\left\| G_z^s (\alpha, 0.25, 1) \right\|} \cdot 100 = \frac{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} \left| G_z^s (\alpha, 0.25, 1) - G_{Iz} (\alpha, 0.25, 1) \right|}{\max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} \left| G_z^s (\alpha, 0.25, 1) \right|} \cdot 100 = 1.115\%.$$

Вывод. Представленные на рисунках 7 – 11 результаты и вычисленные относительные погрешности (2.4.1) демонстрируют достоверность результатов на этапе построения оригиналов функций по Фурье и в целом успешную верификацию новых фундаментальных решений (2.2.39) и (2.2.49) для тонкой упругой анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява.

Оба варианта построения фундаментальных решений дают хорошую согласованность результатов. Выбор использования того или иного варианта в прикладных задачах обусловлен удобством применения в конкретном случае.

2.5. Численное исследование поведения фундаментального решения

Построим фундаментальные решения для нормального перемещения $G(\alpha, z, \tau)$ неограниченной упругой цилиндрической оболочки (2.2.40) для нескольких вариантов симметрии упругой среды (изотропной, ортотропной, анизотропной) и проанализируем их характер.

Отношение радиуса оболочки к её толщине принято $R/h = 60$.

Тензор упругих постоянных для изотропной упругой среды (Сталь 12Х18Н10Т [104]) следующий (c_{ij} в ГПа):

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 256.7 & 102.7 & 102.7 & 0 & 0 & 0 \\ 102.7 & 256.7 & 102.7 & 0 & 0 & 0 \\ 102.7 & 102.7 & 256.7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 77.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 77.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 77.0 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы согласно (1.3.59) следующие: $C_1 = 0.400$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1.000$, $C_4 = 0$, $C_5 = 0.299$.

Для построения нестационарного фундаментального решения с заданной точностью проведён анализ сходимости по алгоритму, описанному в параграфе 2.2 (см. (2.2.42) – (2.2.44)). В результате чего рассчитаны следующие параметры: $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\tau \in [0, 10]$, $\delta = 0.5\%$, $J_1 = 110$, $N_1 = 265$, $R_1 = 100$.

На рисунке 12 представлены пространственные распределения фундаментального решения в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$ безразмерных секунд.

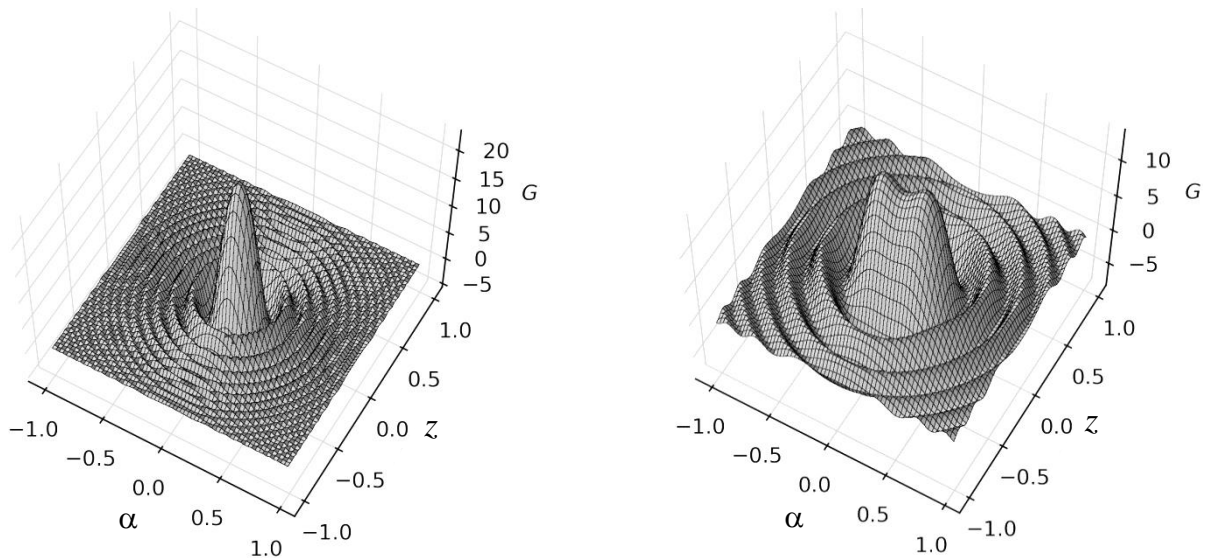


Рисунок 12 – Трёхмерное представление фундаментального решения для изотропной неограниченной цилиндрической оболочки в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$

Тензор упругих постоянных для ортотропной упругой среды (Ероху S–glass [142]) следующий (c_{ij} в ГПа):

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 52.02 & 3.746 & 3.746 & 0 & 0 & 0 \\ 3.746 & 9.793 & 4.079 & 0 & 0 & 0 \\ 3.746 & 4.079 & 9.793 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.700 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.700 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы согласно (1.3.59) таковы: $C_1 = 0.072$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0.188$, $C_4 = 0$, $C_5 = 0.090$.

При построении фундаментального решения для ортотропной неограниченной оболочки использовались следующие рассчитанные параметры: $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\tau \in [0, 10]$, $\delta = 0.5\%$, $J_1 = 150$, $N_1 = 305$, $R_1 = 100$.

На рисунке 13 представлены пространственные распределения фундаментального решения в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$ безразмерных секунд.

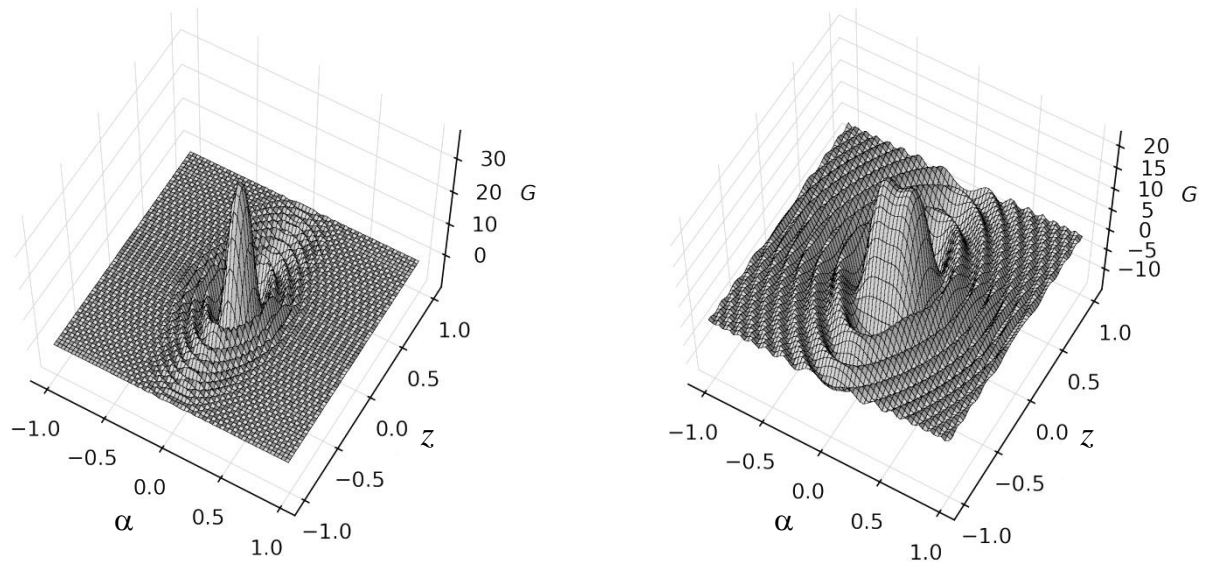


Рисунок 13 – Трёхмерное представление фундаментального решения для ортотропной неограниченной цилиндрической оболочки в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$

Тензор упругих постоянных для анизотропной упругой среды (моноклинный материал [121]) следующий (c_{ij} в ГПа):

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 430.1 & 130.4 & 18.2 & 0 & 0 & 201.3 \\ 130.4 & 116.7 & 21.0 & 0 & 0 & 70.1 \\ 18.2 & 21.0 & 73.6 & 0 & 0 & 2.4 \\ 0 & 0 & 0 & 19.8 & -8.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8.0 & 29.1 & 0 \\ 201.3 & 70.1 & 2.4 & 0 & 0 & 147.3 \end{bmatrix}.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы согласно (1.3.59):
 $C_1 = 0.303$, $C_2 = 0.468$, $C_3 = 0.271$, $C_4 = 0.163$, $C_5 = 0.342$.

При построении фундаментального решения для анизотропной неограниченной оболочки использовались следующие рассчитанные параметры:
 $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\tau \in [0, 10]$, $\delta = 0.5\%$, $J_1 = 140$, $N_1 = 305$, $R_1 = 100$.

На рисунке 14 представлены пространственные распределения фундаментального решения в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$ безразмерных секунд.

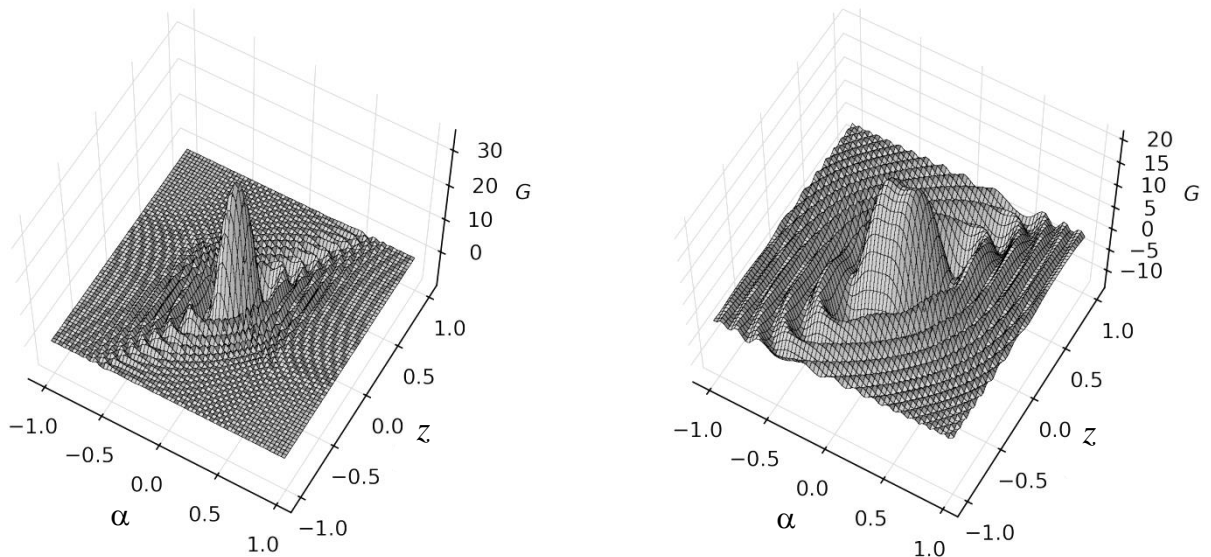


Рисунок 14 – Трёхмерное представление фундаментального решения для анизотропной неограниченной цилиндрической оболочки в моменты времени $\tau = 1$ и $\tau = 3$

Представленные на рисунках 12 – 14 результаты демонстрируют универсальность построенных новых нестационарных фундаментальных

решений (2.2.40) по отношению к частным случаям анизотропии материала. Характеристики распространения возмущений согласуются с рассмотренными типами симметрий упругих сред. Видно, что в случае изотропного материала нормальные возмущения носят концентрический характер, в случае ортотропного – видны две плоскости симметрии распространения возмущений, а в случае анизотропной среды просматривается существенное смещение возмущений относительно основных осей [128].

ГЛАВА 3. НЕСТАЦИОНАРНАЯ ДИНАМИКА АНИЗОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

3.1. Нестационарное напряжённо–деформированное состояние неограниченной цилиндрической оболочки

Объектом исследования является неограниченная тонкая цилиндрическая оболочка (см. Рисунок 15). Оболочка имеет радиус R и постоянную толщину h . Материал оболочки принимается упругим и анизотропным. Упругая среда в рассматриваемом случае анизотропии имеет одну плоскость симметрии. У исследуемой цилиндрической оболочки этой плоскостью является её срединная поверхность.

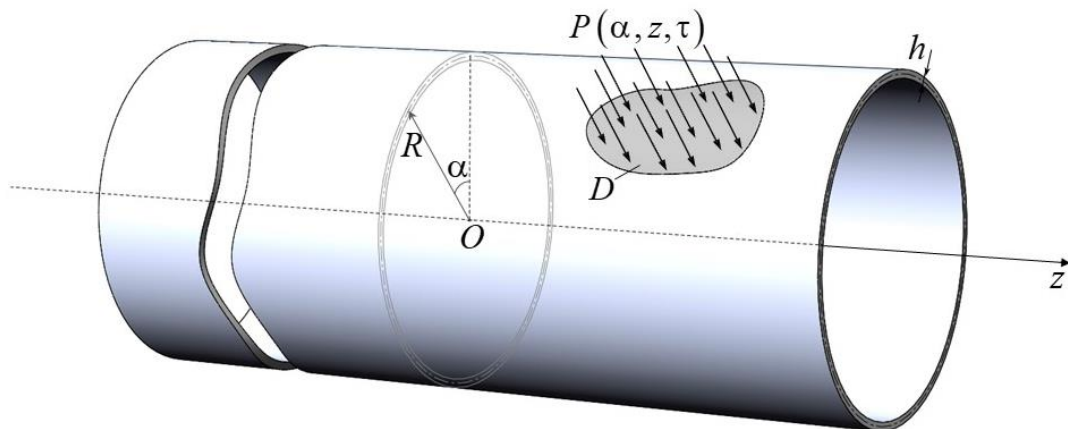


Рисунок 15 – Неограниченная цилиндрическая оболочка под воздействием
нестационарной распределённой нагрузки

Рассматриваемый материал, применительно к тонкой оболочке типа Кирхгофа–Лява согласно (1.3.7) – (1.3.10), характеризуется шестью независимыми упругими постоянными:

$$c_{11} = C^{1111}, \quad c_{12} = C^{1122}, \quad c_{16} = C^{1112}, \quad c_{22} = C^{2222}, \quad c_{26} = C^{1222}, \quad c_{66} = C^{1212}. \quad (3.1.1)$$

Уравнения движения в перемещениях и дифференциальные операторы имеют вид (1.3.60) – (1.3.63).

Данные уравнения, совместно с начальными условиями

$$u_\alpha|_{\tau=0} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad u_z|_{\tau=0} = \frac{\partial u_z}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad w|_{\tau=0} = \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (3.1.2)$$

образуют начальную задачу.

Постановку задачи о нестационарной динамике неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки замыкает условие ограниченности решения на бесконечности:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} w(\alpha, z, \tau) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u_\alpha(\alpha, z, \tau) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} u_z(\alpha, z, \tau) = 0. \quad (3.1.3)$$

Целью является построение функций нормальных перемещений $w(\alpha, z, \tau)$, напряжений $\sigma_\alpha, \sigma_z, \tau_{\alpha z}$ и деформаций $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_z, \gamma_{\alpha z}$ неограниченной упругой анизотропной цилиндрической оболочки при воздействии нестационарного нагружения $p(\alpha, z, \tau)$.

Нестационарные функции нормальных и тангенциальных перемещений неограниченной цилиндрической оболочки представляются в виде тройных свёрток фундаментальных решений (2.2.39) или (2.2.49) с действующей нестационарной нормальной нагрузкой [27]:

$$\begin{aligned} w(\alpha, z, \tau) &= G(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau), \\ u_\alpha(\alpha, z, \tau) &= G_\alpha(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau), \\ u_z(\alpha, z, \tau) &= G_z(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau), \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где через (*) обозначены интегральные операторы типа свёрток по пространственным координатам α, z и времени τ .

Рассматривается несколько видов нестационарного нагружения цилиндрической оболочки. Виды нагрузок и соответствующие им выражения для нестационарной функции нормального прогиба представлены ниже (для функций тангенциальных перемещений необходимо использовать

соответствующие фундаментальные решения $G_\alpha(\alpha, z, \tau)$, $G_z(\alpha, z, \tau)$ из (2.2.39) или (2.2.49) вместо $G(\alpha, z, \tau)$):

— В случае воздействия на внешнюю поверхность оболочки сосредоточенной нагрузки, изменяющейся во времени по закону $P(\tau)$, выражение для нагрузки $p(\alpha, z, \tau)$ из (3.1.4) запишется так:

$$p(\alpha, z, \tau) = P(\tau)H(\tau)\delta(\alpha)\delta(z), \quad (3.1.5)$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда.

Тогда интегральное представление (3.1.4) с учётом (3.1.5) и свойств дельта-функции Дирака преобразуется в следующий вид:

$$w(\alpha, z, \tau) = G(\alpha, z, \tau) *** p(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau G(\alpha, z, \tau - t)P(t)dt. \quad (3.1.6)$$

Для взятия интеграла в (3.1.6) предпочтительно применять аналитические методы. В случае применения численных методов, например, метода правых прямоугольников [12] – приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба примет вид:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \frac{\tau}{n} \sum_{i=1}^n G\left(\alpha, z, \tau - \frac{\tau i}{n}\right) P\left(\frac{\tau i}{n}\right). \quad (3.1.7)$$

— В случае воздействия на внешнюю поверхность оболочки распределённой по прямоугольной области нагрузки вида:

$$p(\alpha, z, \tau) = P(\tau)H(\tau) \left[H\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) - H\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right) \right] \times \\ \times \left[H\left(z + \frac{b}{2}\right) - H\left(z - \frac{b}{2}\right) \right], \quad (3.1.8)$$

что соответствует приложению к внешней поверхности оболочки нагрузки, распределённой по области $D = \left\{ (\alpha, z): -\frac{\beta}{2} \leq \alpha \leq \frac{\beta}{2}, -\frac{b}{2} \leq z \leq \frac{b}{2} \right\}$ и изменяющегося во времени по закону $P(\tau)H(\tau)$ [64, 77].

Безразмерные нормальные перемещения оболочки из (3.1.4) с учётом (3.1.8), где поверхностный интеграл с учётом геометрии области D заменяется тройным интегралом, определяются как:

$$w(\alpha, z, \tau) = G(\alpha, z, \tau) * * * p(\alpha, z, \tau) = \int_0^\tau \int_{-\frac{\beta}{2}}^{\frac{\beta}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} G(\alpha - \xi, z - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) d\zeta d\xi dt. \quad (3.1.9)$$

Используя квадратурную формулу метода правых прямоугольников [12] для взятия интегралов в (3.1.9) получим:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \frac{\beta}{n} \frac{b}{m} \frac{\tau}{s} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^s G_{ijk}(\alpha, z, \tau) p\left(\frac{\tau k}{s}\right), \quad (3.1.10)$$

где

$$G_{ijk}(\alpha, z, \tau) = G\left(\alpha - \frac{\beta i}{n} + \frac{\beta}{2}, z - \frac{bj}{m} + \frac{b}{2}, \tau - \frac{\tau k}{s}\right). \quad (3.1.11)$$

— При воздействии на внешнюю поверхность оболочки движущейся распределённой в виде прямоугольной области нагрузки, выражение для $p(\alpha, z, \tau)$ из (3.1.4) примет следующий вид [67]:

$$p(\alpha, z, \tau) = P(\tau)H(\tau) \left[H(\alpha + f(\tau)) - H(\alpha - f(\tau)) \right] \times \left[H(z + g(\tau)) - H(z - g(\tau)) \right]. \quad (3.1.12)$$

где

$$f(\tau) = a + V_1\tau, \quad g(\tau) = b + V_2\tau. \quad (3.1.13)$$

Здесь $f(\tau)$, $g(\tau)$ – законы изменения границ носителя нагрузки, a , b – первоначальные границы носителя нагрузки, V_k , ($k=1, 2$) – скорости движения границ по осям α и z .

Приближенное выражение для искомой функции нестационарного прогиба из (3.1.4) с учётом (3.1.9) и (3.1.12), с использованием численного метода правых прямоугольников, примет вид (3.1.10), где:

$$G_{ijk}(\alpha, z, \tau) = G\left(\alpha - \frac{\beta i}{n} + \frac{\beta}{2} - \frac{\tau k}{s}, z - \frac{bj}{m} + \frac{b}{2} - \frac{\tau k}{s}, \tau - \frac{\tau k}{s}\right). \quad (3.1.14)$$

— В случае воздействия на внешнюю поверхность оболочки внезапно приложенной совокупности нестационарных нагрузок с переменными во времени амплитудами и координатами воздействия [66, 78] выражение для $p(\alpha, z, \tau)$ из (3.1.4) примет вид:

$$p(\alpha, z, \tau) = \sum_{i=1}^s P_i(\tau) H(\tau) \delta[\alpha - f_i(\tau)] \delta[z - g_i(\tau)], \quad (3.1.15)$$

где

$$f_i(\tau) = a_i + V_{1i}\tau, \quad g_i(\tau) = b_i + V_{2i}\tau. \quad (3.1.16)$$

В (3.1.15) и (3.1.16): $P_i(\tau)$ – законы изменения амплитуд воздействия, $f_i(\tau)$, $g_i(\tau)$ – законы изменения границ носителя нагрузки, a_i , b_i – первоначальные границы носителя нагрузки, V_{ki} , ($k=1, 2$) – скорости движения границ в направлениях осей α и z .

Соотношение для определения безразмерных нормальных перемещений оболочки из (3.1.4) с учётом (3.1.15) и (3.1.16), а также свойств дельта-функции Дирака примет вид:

$$w(\alpha, z, \tau) = \sum_{i=1}^s \int_0^{\tau} G(\alpha - f_i(\tau), z - g_i(\tau), \tau - t) P_i(t) dt. \quad (3.1.17)$$

Взяв интеграл в (3.1.17) с помощью метода правых прямоугольников [12] получим приближенное выражение для функции нестационарного прогиба:

$$w(\alpha, z, \tau) \approx \frac{\tau}{l} \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^l G\left(\alpha - f_i\left(\frac{\tau j}{l}\right), z - g_i\left(\frac{\tau j}{l}\right), \tau - \frac{\tau j}{l}\right) P_i\left(\frac{\tau j}{l}\right). \quad (3.1.18)$$

В соотношениях (3.1.7), (3.1.10), (3.1.11), (3.1.14) и (3.1.18) количество разбиений n, m, s, l при реализации метода правых прямоугольников для взятия интегралов определяется по непрерывной норме функций с заданной точностью при удвоении числа удерживаемых членов рядов.

Соотношения (3.1.4) – (3.1.18) позволяют исследовать пространственно–временные распределения возмущений в неограниченной оболочке Кирхгофа–Лява при нестационарном воздействии разного рода: сосредоточенной нагрузки, распределённой по прямоугольной области нагрузки, движущейся распределённой по прямоугольной области нагрузки и совокупности сосредоточенных нагрузок. Для представления функций перемещений в размерном виде необходимо использовать фундаментальное решение из (2.2.45) с учётом (2.2.46).

С учётом кинематических соотношений (1.3.49) – (1.3.51), физические соотношения для цилиндрической оболочки из (1.3.52) и (1.3.54) запишем в виде [74]:

$$M_{\alpha\alpha}(\alpha, z, t) = \frac{h^3}{12} \left(-\frac{c_{11}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w \right) - \frac{2c_{16}}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) \right) - c_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \quad (3.1.19)$$

$$\begin{aligned}
M_{\alpha z}(\alpha, z, t) = M_{z\alpha}(\alpha, z, t) &= \frac{h^3}{12} \left(-\frac{c_{16}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{2c_{66}}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) \right) - c_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\
M_{zz}(\alpha, z, t) &= \frac{h^3}{12} \left(-\frac{c_{12}}{R^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + w \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{2c_{26}}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) \right) - c_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right), \\
\tilde{T}_{\alpha\alpha}(\alpha, z, t) &= h \left(\frac{c_{11}}{R} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + w \right) + c_{16} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) + c_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\
\tilde{T}_{\alpha z}(\alpha, z, t) = \tilde{T}_{z\alpha}(\alpha, z, t) &= h \left(\frac{c_{16}}{R} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + w \right) + c_{66} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) + c_{26} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \\
\tilde{T}_{zz}(\alpha, z, t) &= h \left(\frac{c_{12}}{R} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + w \right) + c_{26} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial z} \right) + c_{22} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).
\end{aligned} \tag{3.1.20}$$

В (3.1.19), (3.1.20): $M_{ij}(\alpha, z, t)$ – компоненты тензора изгибающих моментов, $\tilde{T}_{ij}(\alpha, z, t)$ – компоненты симметричного тензора тангенциальных усилий, t – размерное время, R – радиус оболочки, h – толщина оболочки.

Нормальные σ_α, σ_z и касательные $\tau_{\alpha z}, \tau_{z\alpha}$ напряжения в оболочке, согласно [6] определяются так:

$$\begin{aligned}
\sigma_\alpha(\alpha, z, t) &= \frac{\tilde{T}_{\alpha\alpha}(\alpha, z, t)}{h} + \frac{12M_{\alpha\alpha}(\alpha, z, t)}{h^3} \gamma, \\
\sigma_z(\alpha, z, t) &= \frac{\tilde{T}_{zz}(\alpha, z, t)}{h} + \frac{12M_{zz}(\alpha, z, t)}{h^3} \gamma, \\
\tau_{\alpha z}(\alpha, z, t) = \tau_{z\alpha}(\alpha, z, t) &= \frac{\tilde{T}_{\alpha z}(\alpha, z, t)}{h} + \frac{12M_{\alpha z}(\alpha, z, t)}{h^3} \gamma,
\end{aligned} \tag{3.1.21}$$

где $-\frac{h}{2} \leq \gamma \leq \frac{h}{2}$.

С учётом соотношений (3.1.19) – (3.1.20) для анизотропной оболочки Кирхгофа–Лява, нестационарные функции нормальных и касательных напряжений (3.1.21) примут вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}(\alpha, z, t) &= \frac{1}{R^2} \left(c_{11} \left(-\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + R \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + (R - \gamma) w \right) - c_{12} R^2 \left(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \right. \\
&\quad \left. + c_{16} R \left(-2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \left(1 - \frac{\gamma}{R} \right) + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial z} (R + \gamma) \right) \right), \\
\sigma_z(\alpha, z, t) &= \frac{1}{R^2} \left(c_{12} \left(-\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + R \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + (R - \gamma) w \right) - c_{22} R^2 \left(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \right. \\
&\quad \left. + c_{26} R \left(-2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \left(1 - \frac{\gamma}{R} \right) + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial z} (R + \gamma) \right) \right), \\
\tau_{\alpha z}(\alpha, z, t) &= \frac{1}{R^2} \left(c_{16} \left(-\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + R \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + (R - \gamma) w \right) - c_{26} R^2 \left(\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \right. \\
&\quad \left. + c_{66} R \left(-2\gamma \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \left(1 - \frac{\gamma}{R} \right) + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial z} (R + \gamma) \right) \right),
\end{aligned} \tag{3.1.22}$$

где c_{ij} – упругие постоянные.

Соотношения для деформаций, согласно обобщённому закону Гука, с учётом рассматриваемой анизотропии материала оболочки имеют вид [63]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha}(\alpha, z, t) &= d_{11} \sigma_{\alpha}(\alpha, z, t) + d_{12} \sigma_z(\alpha, z, t) + d_{16} \tau_{\alpha z}(\alpha, z, t), \\
\varepsilon_z(\alpha, z, t) &= d_{12} \sigma_{\alpha}(\alpha, z, t) + d_{22} \sigma_z(\alpha, z, t) + d_{26} \tau_{\alpha z}(\alpha, z, t), \\
\gamma_{\alpha z}(\alpha, z, t) &= d_{16} \sigma_{\alpha}(\alpha, z, t) + d_{26} \sigma_z(\alpha, z, t) + d_{66} \tau_{\alpha z}(\alpha, z, t),
\end{aligned} \tag{3.1.23}$$

где d_{ij} – упругие податливости.

Дополним систему безразмерных величин (1.3.59) следующими:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{\alpha} &= \frac{\sigma_{\alpha}}{c_{11}}, \quad \sigma'_z = \frac{\sigma_z}{c_{11}}, \quad \tau'_{\alpha z} = \frac{\tau_{\alpha z}}{c_{11}}, \quad \varepsilon'_{\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha}}{d_{11}}, \quad \varepsilon'_z = \frac{\varepsilon_z}{d_{11}}, \quad \gamma'_{\alpha z} = \frac{\gamma_{\alpha z}}{d_{11}}, \\
D'_1 &= \frac{d_{12}}{d_{11}}, \quad D'_2 = \frac{d_{16}}{d_{11}}, \quad D'_3 = \frac{d_{22}}{d_{11}}, \quad D'_4 = \frac{d_{26}}{d_{11}}, \quad D'_5 = \frac{d_{66}}{d_{11}}.
\end{aligned} \tag{3.1.24}$$

В безразмерном виде функции напряжений на внешней и внутренней поверхностях анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява с учётом (1.3.59) и (3.1.24) примут вид (здесь и далее штрихи в безразмерных величинах опущены):

$$\begin{aligned}
\sigma_{\alpha}(\alpha, z, \tau) &= \left(\mp \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + \left(1 \mp \frac{1}{2k} \right) w \right) + C_1 \left(\mp \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
&+ C_2 \left(\mp \frac{1}{k} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \left(1 \mp \frac{1}{2k} \right) - \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial z} \left(\mp \frac{1}{2k} - 1 \right) \right), \\
\sigma_z(\alpha, z, \tau) &= C_1 \left(\mp \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + \left(1 \mp \frac{1}{2k} \right) w \right) + C_3 \left(\mp \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
&+ C_4 \left(\mp \frac{1}{k} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \left(1 \mp \frac{1}{2k} \right) - \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial z} \left(\mp \frac{1}{2k} - 1 \right) \right), \\
\tau_{\alpha z}(\alpha, z, \tau) &= C_2 \left(\mp \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial \alpha} + \left(1 \mp \frac{1}{2k} \right) w \right) + C_4 \left(\mp \frac{1}{2k} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \\
&+ C_5 \left(\mp \frac{1}{k} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial \alpha} \left(1 \mp \frac{1}{2k} \right) - \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial z} \left(\mp \frac{1}{2k} - 1 \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.1.25}$$

Соотношения для деформаций с учётом (1.3.59), (3.1.24) и (3.1.23) записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\alpha}(\alpha, z, \tau) &= \sigma_{\alpha}(\alpha, z, \tau) + D_1 \sigma_z(\alpha, z, \tau) + D_2 \tau_{\alpha z}(\alpha, z, \tau), \\
\varepsilon_z(\alpha, z, \tau) &= D_2 \sigma_{\alpha}(\alpha, z, \tau) + D_3 \sigma_z(\alpha, z, \tau) + D_4 \tau_{\alpha z}(\alpha, z, \tau), \\
\gamma_{\alpha z}(\alpha, z, \tau) &= D_2 \sigma_{\alpha}(\alpha, z, \tau) + D_4 \sigma_z(\alpha, z, \tau) + D_5 \tau_{\alpha z}(\alpha, z, \tau).
\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

В соотношениях (3.1.19) – (3.2.20) принимается $w = w(\alpha, z, t)$,
 $u_{\alpha} = u_{\alpha}(\alpha, z, t)$, $u_z = u_z(\alpha, z, t)$, в (3.2.25): $w = w(\alpha, z, \tau)$, $u_{\alpha} = u_{\alpha}(\alpha, z, \tau)$,
 $u_z = u_z(\alpha, z, \tau)$.

Пример расчёта

В качестве примера рассмотрена задача о воздействии на внешнюю поверхность неограниченной оболочки движущейся, распределённой по прямоугольной области, нагрузки (см. Рисунок 16).

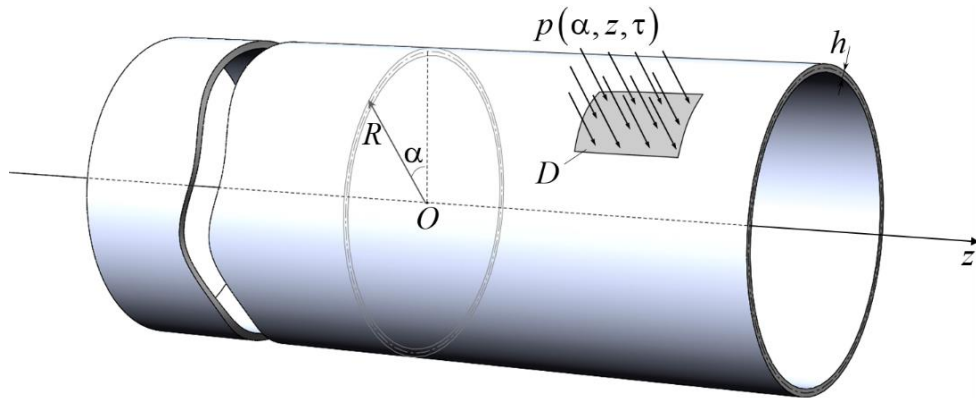


Рисунок 16 – Неограниченная цилиндрическая оболочка под воздействием движущейся распределённой нагрузки

В начальный момент времени оболочка находится в невозмущённом состоянии, затем на её внешнюю поверхность воздействует нагрузка вида (3.1.12), со следующими параметрами:

$$P(\tau) = -10 \sin(0.9\tau) e^{-\frac{\tau}{5}}, \quad \beta = \pi / 12, \quad b = 0.2,$$

$$f(\tau) = 0.2\tau, \quad g(\tau) = 0.5\tau.$$

Отношение радиуса оболочки к её толщине принято $k = 25$.

В рассматриваемом примере оболочка принимается из моноклинного материала (Graphite-эроху), упругие константы которого, согласно [121], принимают значения (в Па):

$$c_{11} = 95.511 \cdot 10^9, \quad c_{12} = 28.903 \cdot 10^9, \quad c_{16} = 44.720 \cdot 10^9,$$

$$c_{22} = 25.914 \cdot 10^9, \quad c_{66} = 32.701 \cdot 10^9, \quad c_{26} = 15.612 \cdot 10^9.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы из (1.3.59):

$$C_1 = 0.303, C_2 = 0.468, C_3 = 0.271, C_4 = 0.163, C_5 = 0.342.$$

Упругие податливости с учётом связи матриц упругих постоянных C и податливости D [10]: $C = D^{-1}$. Для выбранного моноклинного материала принимают следующие значения (в Па^{-1}):

$$d_{11} = 3.211 \cdot 10^{-11}, d_{12} = -1.243 \cdot 10^{-11}, d_{16} = -3.791 \cdot 10^{-11},$$

$$d_{22} = 6.271 \cdot 10^{-11}, d_{66} = 8.829 \cdot 10^{-11}, d_{26} = -1.268 \cdot 10^{-11}.$$

Соответствующие безразмерные упругие податливости из (3.1.24):

$$D_1 = -0.387, D_2 = -1.181, D_3 = 1.953, D_4 = -0.395, D_5 = 2.749.$$

На рисунке 17 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической оболочки в безразмерные моменты времени $\tau = 0.5$, $\tau = 1$ и $\tau = 1.5$.

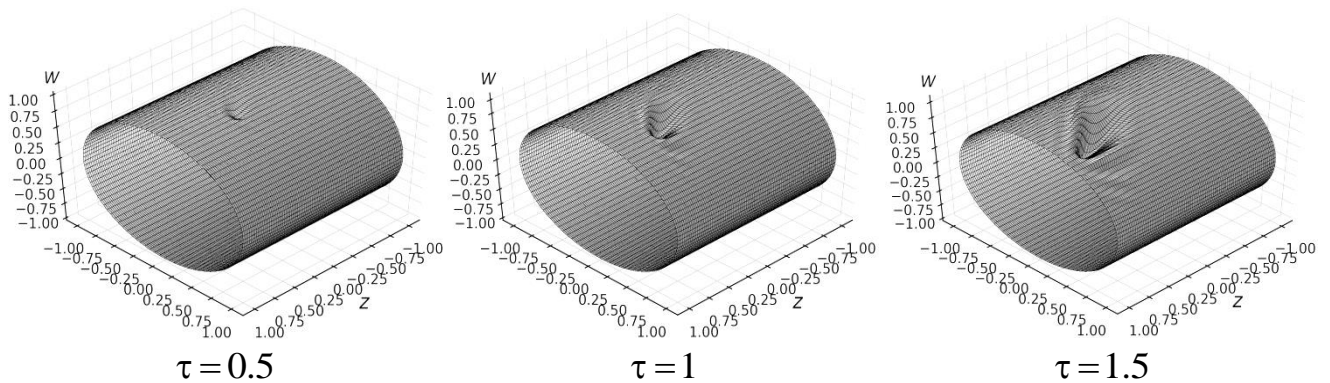


Рисунок 17 – Пространственные зависимости нестационарного прогиба

анизотропной оболочки при воздействии подвижной распределённой нагрузки

На рисунке 17 видно смещение максимального прогиба оболочки вдоль оси z и по углу α с течением времени, при этом виден несимметричный характер прогиба оболочки, что соответствует особенностям анизотропной упругой среды.

Стоит отметить, что с увеличением отношения радиуса оболочки к её толщине k , фронт возмущений становится острее. Данный эффект продемонстрирован ниже на рисунках, где представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической оболочки в безразмерный момент времени $\tau = 1.5$ для различных $k = R/h$.

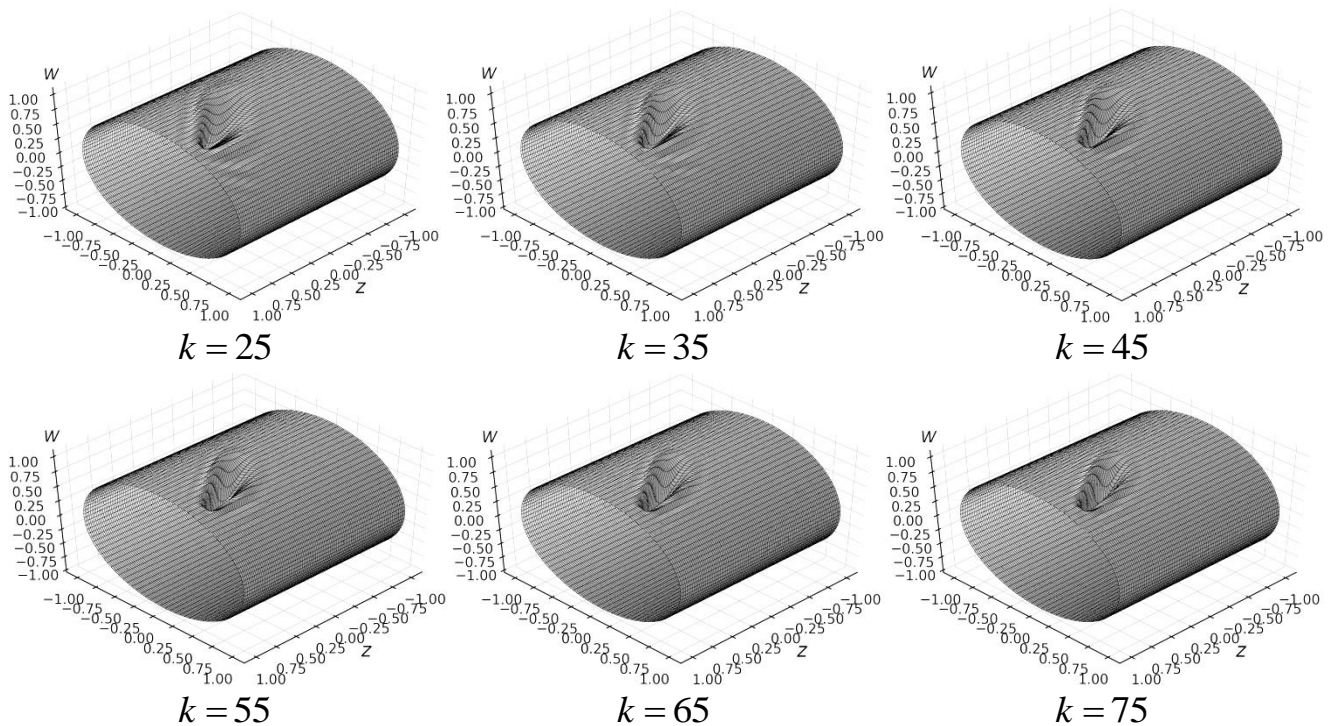


Рисунок 18 – Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной оболочки при воздействии подвижной распределённой нагрузки при различных значениях отношения радиуса к толщине

Далее на рисунках 19 и 20 представлены распределения безразмерных напряжений σ_α , σ_z , $\tau_{\alpha z}$ и деформаций ε_α , ε_z , $\gamma_{\alpha z}$ на внешней поверхности рассматриваемой цилиндрической оболочки по её образующей при $\alpha = 0$ в момент времени $\tau = 1$.

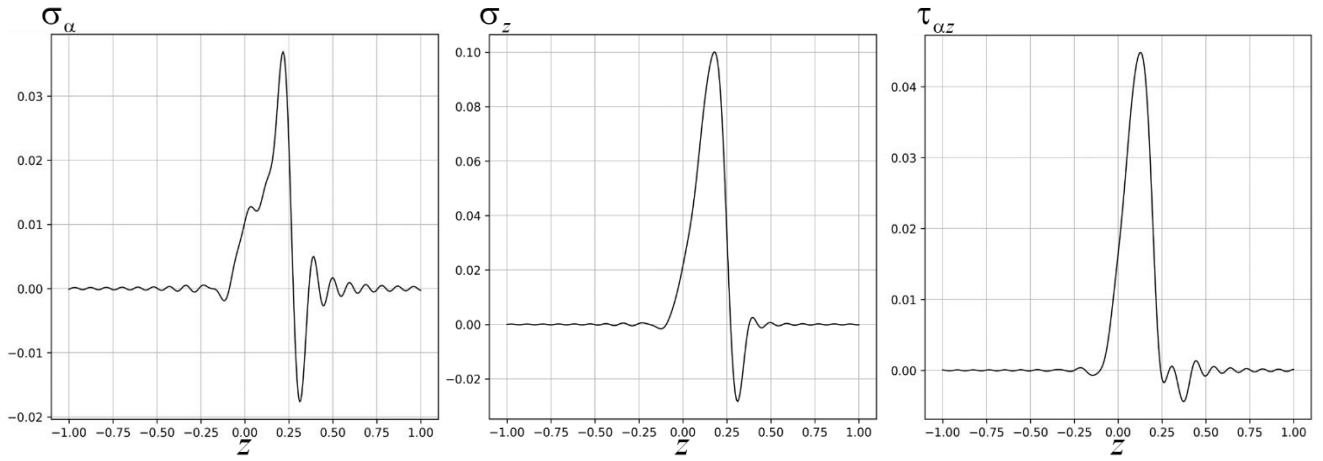


Рисунок 19 – Распределения безразмерных напряжений в момент времени $\tau = 1$

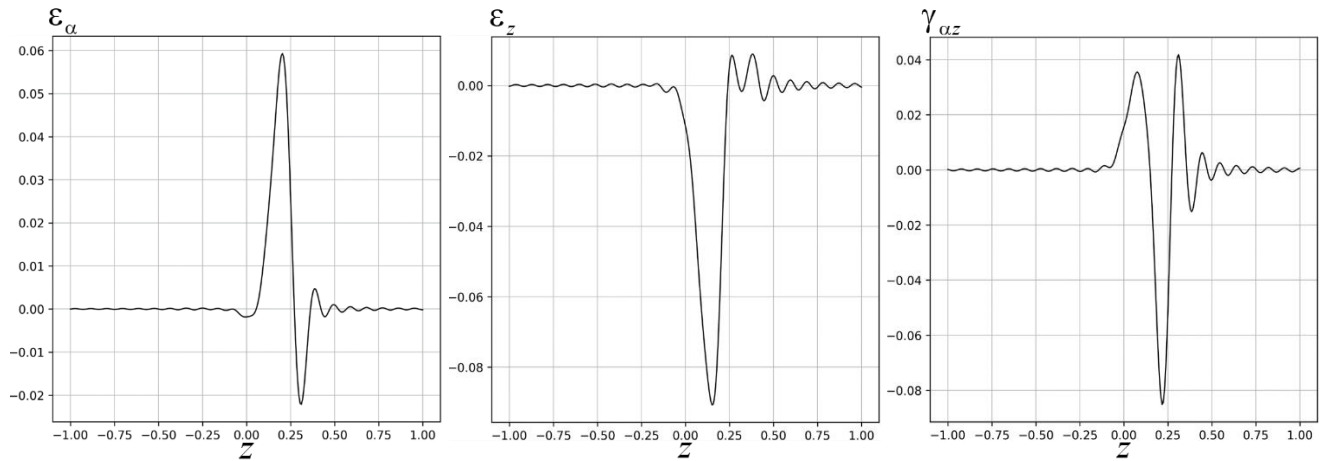


Рисунок 20 – Распределения безразмерных деформаций в момент времени $\tau = 1$

3.2. Нестационарное деформирование цилиндрической оболочки с локальными опорами

Исследуется тонкая цилиндрическая оболочка с произвольно расположенными локальными опорами (см. Рисунок 21). Оболочка имеет радиус R и постоянную толщину h . Материал оболочки принимается упругим и анизотропным. Упругая среда в рассматриваемом случае анизотропии имеет одну плоскость симметрии. У исследуемой цилиндрической оболочки этой плоскостью является её срединная поверхность. Упругая среда характеризуется шестью независимыми упругими постоянными (3.1.1).

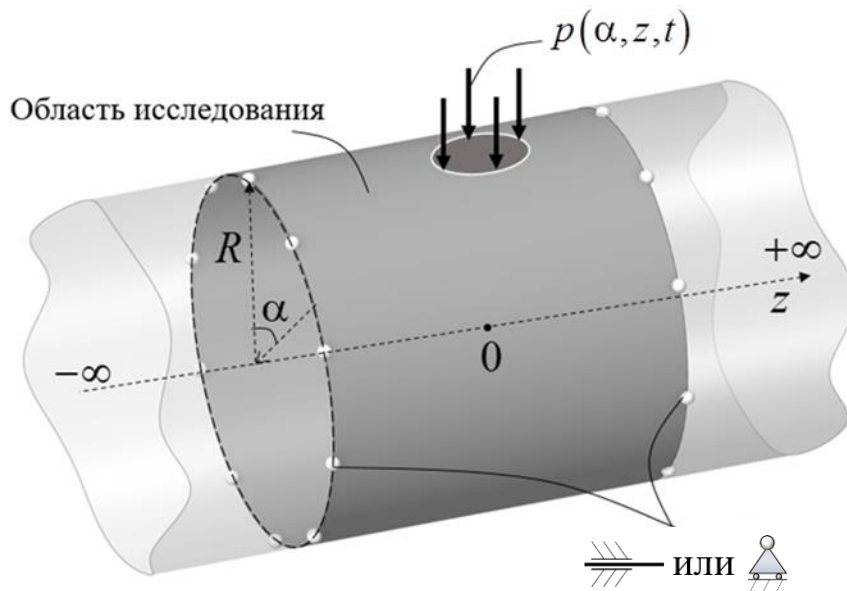


Рисунок 21 – Цилиндрическая оболочка с локальными опорами под воздействием нестационарной распределённой нагрузки

Локальные опоры рассматриваются как точечные граничные условия скользящей заделки либо свободного опирания. На изначально покоящуюся цилиндрическую оболочку воздействует нестационарная нормальная нагрузка $p(\alpha, z, \tau)$. Движение оболочки рассматривается в цилиндрической системе координат $OR\alpha z$. В зависимости от координаты воздействия нагрузки

рассматривается внутренняя или внешняя область «замкнутого» контура опор оболочки [75, 129].

Постановка задачи включает в себя уравнения движения анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява (1.3.60) – (1.3.63), начальные условия:

$$w|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad (3.2.1)$$

и граничные условия в зависимости от вида опор:

– в случае свободного опирания

$$w|_{T_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \Big|_{T_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \Big|_{T_i} = 0, \quad (3.2.2)$$

– в случае скользящей заделки

$$w|_{T_i} = \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{T_i} = \frac{\partial w}{\partial \alpha} \Big|_{T_i} = 0. \quad (3.2.3)$$

Здесь T_i – точки с координатами (a_i, b_i) локальных опор по оси z и углу α соответственно, $i = 1, 2, \dots, n$ – порядковый номер локальной опоры, n – количество опор.

Начально–краевая задача (1.3.60), (3.2.1) – (3.2.3) решается с использованием метода фундаментального решения для неограниченной анизотропной цилиндрической оболочки (2.2.39) и метода компенсирующих нагрузок [18, 54, 65, 68, 69, 71, 73, 76, 100].

Для того, чтобы искомое решение удовлетворяло граничным условиям из (3.2.2), (3.2.3) введены компенсирующие нагрузки, которые для каждой локальной опоры, исходя из граничных условий, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
D_i(z, \alpha, \tau) &= d_i(\tau)H(\tau)\delta(z - a_i)\delta(\alpha - b_i), \\
M_i(z, \alpha, \tau) &= m_i(\tau)H(\tau)\delta(z - (a_i - \gamma))\delta(\alpha - b_i), \\
N_i(z, \alpha, \tau) &= n_i(\tau)H(\tau)\delta(z - a_i)\delta(\alpha - (b_i - \gamma)),
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда, $D_i(z, \alpha, \tau)$ – нагрузки, компенсирующие нормальное перемещение, $M_i(z, \alpha, \tau)$, $N_i(z, \alpha, \tau)$ – нагрузки, компенсирующие изгибающие моменты или углы поворотов, $d_i(\tau)$, $m_i(\tau)$, $n_i(\tau)$ – законы изменение во времени амплитуд компенсирующих нагрузок, a_i , $a_i - \gamma$, b_i , $b_i - \gamma$ – координаты действия компенсирующих нагрузок, $\gamma = const$.

Под компенсирующей нагрузкой понимается результат воздействия такой специально вычисленной нагрузки, что сумма основного и компенсирующего решения при её воздействии удовлетворяет граничным условиям в некоторых областях неограниченной цилиндрической оболочки. Исходя из этого, искомое решение для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки, имеющей локальные опоры, с учётом решения для фундаментального решения (2.2.39) примет вид:

$$\begin{aligned}
w_*(z, \alpha, \tau) &= G(z, \alpha, \tau) *** P(z, \alpha, \tau) + \sum_{i=1}^N G(z, \alpha, \tau) *** Q_i(z, \alpha, \tau) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} G(z - \xi, \alpha - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dt d\xi d\zeta + \sum_{i=1}^N \left[\int_0^{\tau} G(z - a_i, \alpha - b_i, \tau - t) d_i(t) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\tau} G(z - a_i + \gamma, \alpha - b_i, \tau - t) m_i(t) + \int_0^{\tau} G(z - a_i, \alpha - b_i + \gamma, \tau - t) n_i(t) \right].
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

Схема действия компенсирующих нагрузок в локальных опорах приведена на рисунке 22:

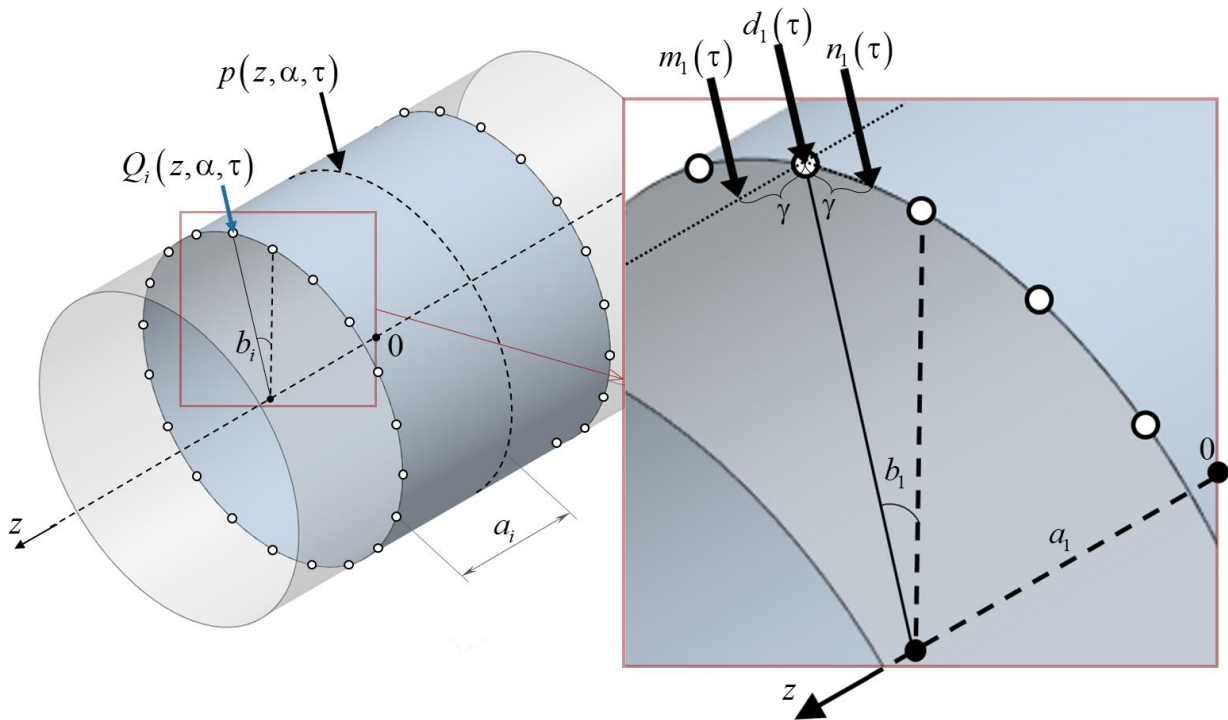


Рисунок 22 – Схема действия компенсирующих нагрузок

В (3.2.5) функции амплитуд компенсирующих нагрузок $d_i(\tau)$, $m_i(\tau)$, $n_i(\tau)$ заранее не известны и должны удовлетворять принятым граничным условиям. Для расчёта амплитуд компенсирующих нагрузок выполним подстановку (3.2.5) в граничные условия (3.2.2) или (3.2.3). В результате чего получим систему интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода с разностным ядром:

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} G(a_r - \xi, b_r - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dt d\xi d\zeta + \\
 & + \sum_{i=1}^N \left[\int_0^{\tau} G(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau - t) d_i(t) dt + \int_0^{\tau} G(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau - t) m_i(t) dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\tau} G(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau - t) n_i(t) dt \right] = 0, \quad r = \overline{1, N},
 \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - \xi, b_r - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dt d\xi d\zeta + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[\int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - a_i, b_r - b_i, \tau - t) d_i(t) dt + \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau - t) m_i(t) dt + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau - t) n_i(t) dt \right] = 0, \quad r = \overline{1, N}, \\
& \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - \xi, b_r - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dt d\xi d\zeta + \\
& + \sum_{i=1}^N \left[\int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i, b_r - b_i, \tau - t) d_i(t) dt + \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau - t) m_i(t) dt + \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau - t) n_i(t) dt \right] = 0, \quad r = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

В системе (3.2.6) j – порядковый номер производной, который в зависимости от граничных условий принимает значения 1 или 2. Количество уравнений системы равно $3N$, где N – количество локальных опор.

Решение системы интегральных уравнений (3.2.6) относительно функций амплитуд компенсирующих нагрузок $d_i(\tau)$, $m_i(\tau)$, $n_i(\tau)$ строится с предварительным применением метода дискретизации данных функций по времени τ на l равных отрезков ($l \geq 1$) длительностью $\Delta_\tau = \frac{T}{l}$: $\tau \leftrightarrow \{\tau_c = c\Delta_\tau : \Delta_\tau = T/l, c = 0, 1, \dots, l-1\}$ где T – конечный момент времени. Применение этого метода, с учётом того, что функции амплитуд компенсирующих нагрузок остаются постоянными на каждом интервале времени $[\tau_c, \tau_{c+1}]$, позволяет вынести функции $d_i(\tau)$, $m_i(\tau)$, $n_i(\tau)$ за знак интеграла как константы для каждого промежутка времени. Система (3.2.6) на каждом шаге времени примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \left[d_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
& + m_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \\
& \left. + n_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \right] = \\
& = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} G(a_r - \xi, b_r - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dt d\xi d\zeta - F_r, \quad r = \overline{1, N}, \\
& \sum_{i=1}^N \left[d_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
& + m_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \\
& \left. + n_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \right] = \\
& = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial z^j} (a_r - \xi, b_r - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dt d\xi d\zeta - H_r, \quad r = \overline{1, N}, \\
& \sum_{i=1}^N \left[d_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
& + m_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \\
& \left. + n_{ic} \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \right] = \\
& = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - \xi, b_r - \zeta, \tau - t) p(\xi, \zeta, t) dt d\xi d\zeta - R_r, \quad r = \overline{1, N}.
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

В системе (3.2.7) d_{ic} , m_{ic} , n_{ic} – значения компенсирующих нагрузок в текущий отрезок времени, F_r , H_r , R_r – добавочные части (числовые значения), учитывающие хронологию изменений значений компенсирующих нагрузок в каждой опоре во времени. Если $c=0$, то добавочные части нулевые, так как

хронологии изменения компенсирующих нагрузок ещё нет, а если $c > 0$, то добавочные части принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 F_r &= \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \right], r = \overline{1, N}, \\
 H_n &= \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \right], r = \overline{1, N}, \\
 R_n &= \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j}(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j}(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt + \right. \\
 &\quad \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j}(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \right], r = \overline{1, N},
 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

где $d_{i\kappa}$, $m_{i\kappa}$, $n_{i\kappa}$ – значения компенсирующих нагрузок в предшествующий отрезок времени.

В (3.2.7) у интегралов, стоящих у компенсирующих нагрузок d_{ic} , m_{ic} , n_{ic} , прослеживается следующая структура подынтегральных функций:

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \rightarrow \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt, \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \rightarrow \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt, \quad (3.2.9) \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j}(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j}(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \rightarrow \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j}(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt. \\
& \int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j}(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt
\end{aligned}$$

Из конфигурации фундаментального решения (2.2.39) видно, что интегралы из (3.2.9) можно взять аналитически:

$$\int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} G(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E \times K, \quad (3.2.10)$$

$$\int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial G}{\partial z}(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = \frac{\Delta i}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q_{k+1} + q_k) E \times K, \quad (3.2.11)$$

$$\int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = -\frac{\Delta}{8\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q_{k+1} + q_k)^2 E \times K, \quad (3.2.12)$$

$$\int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial G}{\partial \alpha}(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = \frac{\Delta i}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n E \times K, \quad (3.2.13)$$

$$\int_{\tau_c}^{\tau_{c+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = -\frac{\Delta}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 E \times K. \quad (3.2.14)$$

В соотношениях (3.2.10) – (3.2.14), с учётом (2.2.33):

$$E = e^{i n \alpha + \frac{i z}{2}(q_{k+1} + q_k)},$$

$$K = D_1 \sum_{r=1}^3 \frac{A_{2r-1}(q_k)}{s_{2r-1}} (\operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_c) \operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) - \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_c) \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) - 1) + \quad (3.2.15)$$

$$+ D_2 \sum_{r=1}^3 \frac{A_{2r-1}(q_{k+1})}{s_{2r-1}} (\operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_c) \operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) - \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_c) \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) - 1).$$

В (3.2.8) у интегралов, стоящих у компенсирующих нагрузок d_{ik} , m_{ik} , n_{ik} , прослеживается следующая структура подынтегральных функций:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} G(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \rightarrow \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} G(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt,$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} G(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \rightarrow \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt,$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial z^j}(a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt \quad (3.2.16)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \\
& \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i + \gamma, b_r - b_i, \tau_{c+1} - t) dt \rightarrow \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt. \\
& \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^j G}{\partial \alpha^j} (a_r - a_i, b_r - b_i + \gamma, \tau_{c+1} - t) dt
\end{aligned}$$

Из конфигурации фундаментального решения (2.2.39) видно, что интегралы из (3.2.9) также можно взять аналитически:

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} G(z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = \frac{\Delta}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E \times Z, \quad (3.2.17)$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial G}{\partial z} (z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = \frac{\Delta i}{4\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q_{k+1} + q_k) E \times Z, \quad (3.2.18)$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} (z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = -\frac{\Delta}{8\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (q_{k+1} + q_k)^2 E \times Z, \quad (3.2.19)$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial G}{\partial \alpha} (z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = \frac{\Delta i}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n E \times Z, \quad (3.2.20)$$

$$\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2} (z, \alpha, \tau_{c+1} - t) dt = -\frac{\Delta}{2\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 E \times Z. \quad (3.2.21)$$

В соотношениях (3.2.17) – (3.2.21), с учётом (2.2.33):

$$E = e^{i n \alpha + \frac{i z}{2} (q_{k+1} + q_k)}, \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned}
Z = & D_1 \sum_{r=1}^3 \frac{A_{2r-1}(q_k)}{s_{2r-1}} \left(\operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) (\operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_k) - \operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_{k+1})) - \right. \\
& \left. - \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) (\operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_k) + \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_{k+1})) \right) + \\
& + D_2 \sum_{r=1}^3 \frac{A_{2r-1}(q_{k+1})}{s_{2r-1}} \left(\operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) (\operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_k) - \operatorname{ch}(s_{2r-1} \tau_{k+1})) - \right. \\
& \left. - \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_{c+1}) (\operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_k) + \operatorname{sh}(s_{2r-1} \tau_{k+1})) \right).
\end{aligned}$$

Способ взятия интегралов от действующей нестационарной нагрузки $p(z, \alpha, \tau)$ в (3.2.6) зависит от её характера. Предпочтительным является аналитический способ взятия интегралов. Другие способы с применением квадратур приведены в (2.2.37), (2.2.47).

Подстановка соотношений (3.2.10) – (3.2.15), (3.2.17) – (3.2.22) в (3.2.6) даёт систему s линейных уравнений с s неизвестными. Неизвестными в этой системе являются компенсирующие нагрузки d_{ic} , m_{ic} , n_{ic} , коэффициенты при которых являются результатами взятия интегралов (3.2.10) – (3.2.15). Правые части этих уравнений – это результаты взятия интегралов (3.2.17) – (3.2.22) и интегралов от приложенной нагрузки $p(z, \alpha, \tau)$. Решение данной системы l раз, что представляет собой решение на каждом отрезке времени Δ_τ , приводит к расчёту значений компенсирующих нагрузок для каждого момента времени с учётом хронологии их изменения на предыдущих промежутках времени. Таким образом, нестационарная функция нормальных перемещений для тонкой упругой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява с локальными опорами принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
w_*(z, \alpha, T) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T G(z - \xi, \alpha - \zeta, T - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta dt + \\
& + \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(z - a_i, \alpha - b_i, T - t) dt + \right. \\
& + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(z - a_i + \gamma, \alpha - b_i, T - t) dt + \\
& \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} G(z - a_i, \alpha - b_i + \gamma, T - t) dt \right].
\end{aligned} \tag{3.2.23}$$

Нестационарные функции углов поворотов $v_z(z, \alpha, \tau)$, $v_\alpha(z, \alpha, \tau)$ и изгибающих моментов $M_z(z, \alpha, \tau)$, $M_\alpha(z, \alpha, \tau)$ с учётом соотношения (3.2.23) для функции нормальных перемещений принимают вид:

$$\begin{aligned}
v_{*z}(z, \alpha, \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \frac{\partial G}{\partial z}(z - \xi, \alpha - \zeta, T - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta dt + \\
& + \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial G}{\partial z}(z - a_i, \alpha - b_i, T - t) dt + \right. \\
& + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial G}{\partial z}(z - a_i + \gamma, \alpha - b_i, T - t) dt + \\
& \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial G}{\partial z}(z - a_i, \alpha - b_i + \gamma, T - t) dt \right], \\
v_{*\alpha}(z, \alpha, \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \frac{\partial G}{\partial \alpha}(z - \xi, \alpha - \zeta, T - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta dt + \\
& + \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial G}{\partial \alpha}(z - a_i, \alpha - b_i, T - t) dt + \right. \\
& + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial G}{\partial \alpha}(z - a_i + \gamma, \alpha - b_i, T - t) dt + \\
& \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial G}{\partial \alpha}(z - a_i, \alpha - b_i + \gamma, T - t) dt \right].
\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

$$\begin{aligned}
M_{*z}(z, \alpha, \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(z - \xi, \alpha - \zeta, T - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta dt + \\
& + \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(z - a_i, \alpha - b_i, T - t) dt + \right. \\
& + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(z - a_i + \gamma, \alpha - b_i, T - t) dt + \\
& \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}(z - a_i, \alpha - b_i + \gamma, T - t) dt \right], \tag{3.2.25} \\
M_{*\alpha}(z, \alpha, \tau) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^T \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(z - \xi, \alpha - \zeta, T - t) p(\xi, \zeta, t) d\xi d\zeta dt + \\
& + \sum_{\kappa=0}^{c-1} \sum_{i=1}^N \left[d_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(z - a_i, \alpha - b_i, T - t) dt + \right. \\
& + m_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(z - a_i + \gamma, \alpha - b_i, T - t) dt + \\
& \left. + n_{i\kappa} \int_{\tau_\kappa}^{\tau_{\kappa+1}} \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(z - a_i, \alpha - b_i + \gamma, T - t) dt \right].
\end{aligned}$$

В определённых функциях (3.2.23) – (3.2.25), интегралы у компенсирующих нагрузок имеют аналитическую форму записи (3.2.17) – (3.2.22), а интегралы от действующей нагрузки берутся либо аналитически, либо с помощью квадратурных формул в зависимости от её вида.

Примеры расчётов

Пример 1.

В качестве примера рассмотрено нестационарное воздействие на внешнюю поверхность анизотропной цилиндрической оболочки с локальными опорами типа скользящих заделок. Построена нестационарная функция нормального перемещения для области цилиндрической оболочки,

расположенной между равномерно распределённых с двух сторон 20 локальных опор. Координаты расположения опор вдоль оси $z = -0.5$, $z = 0.5$.

В начальный момент времени оболочка покоится, затем на её внешнюю поверхность воздействует сосредоточенная нагрузка, амплитуда которой задана следующим образом:

$$P(\tau) = -\sin(\tau).$$

Отношение радиуса оболочки к её толщине принято $R/h = 40$. Материал оболочки предполагается анизотропным (Graphite-эроху), упругие константы которого, согласно [144], принимают значения (в Па):

$$c_{11} = 16.060 \cdot 10^9, \quad c_{12} = 13.851 \cdot 10^9, \quad c_{16} = 5.461 \cdot 10^9, \\ c_{22} = 39.392 \cdot 10^9, \quad c_{66} = 12.290 \cdot 10^9, \quad c_{26} = 14.744 \cdot 10^9.$$

Соответствующие безразмерные упругие константы из (1.3.59):

$$C_1 = 0.862, \quad C_2 = 0.339, \quad C_3 = 2.452, \quad C_4 = 0.917, \quad C_5 = 0.765.$$

На рисунке 23 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической оболочки с локальными опорами в безразмерные моменты времени $\tau = 3$ и $\tau = 5$.

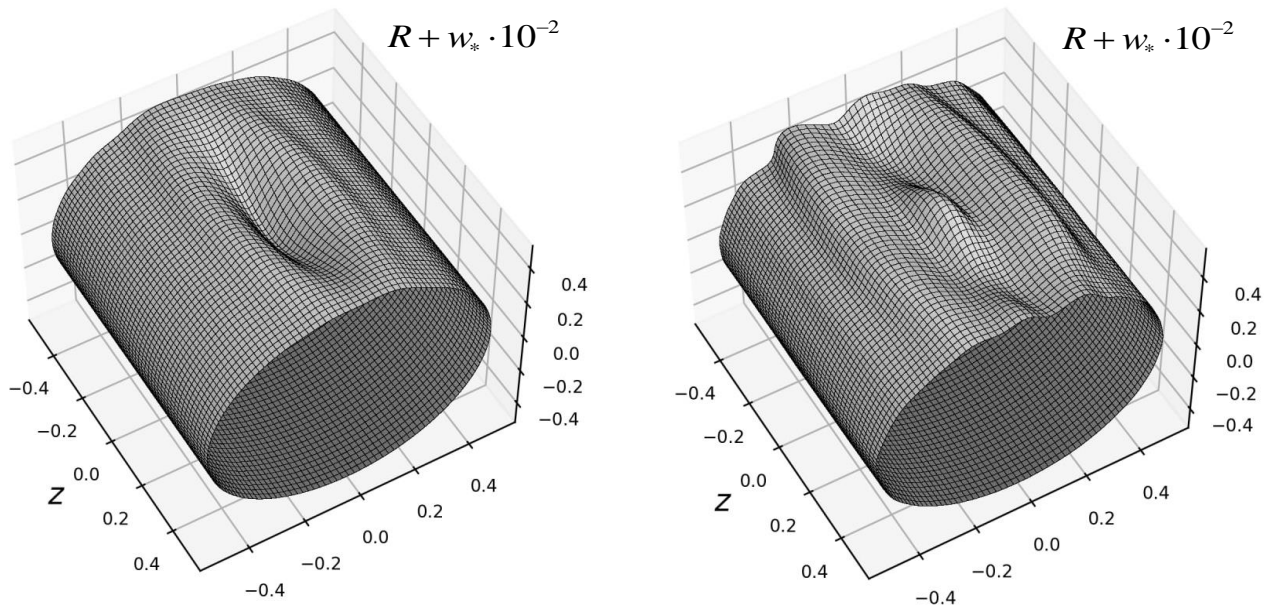


Рисунок 23 – Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной оболочки с локальными опорами при воздействии сосредоточенной нестационарной нагрузки

С целью демонстрации выполнения граничных условий построен график функций в сечении с локальными опорами при $z=0.5$, для сравнения также представлена функция для неограниченной оболочки (Рисунок 24):

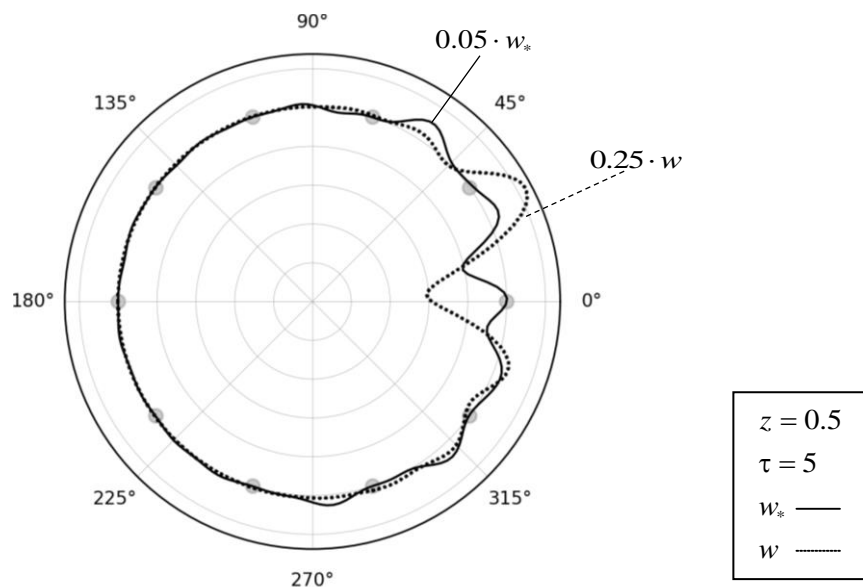


Рисунок 24 – Нормальное перемещение оболочки в сечении с локальными опорами в момент времени $\tau = 5$

На рисунках 23 и 24 видно выполнение граничных условий по нормальному перемещению точечных скользящих заделок и виден несимметричный характер прогиба оболочки, что соответствует особенностям анизотропной упругой среды.

При построении решения использовались следующие параметры: $\alpha \in (-\pi, \pi]$, $\tau \in [0, 5]$, $\delta = 0.1\%$, $J_1 = 60$, $N_1 = 310$, $R_1 = 40$.

Пример 2.

Рассмотрим нестационарное воздействие на внешнюю поверхность анизотропной цилиндрической панели с сорока локальными опорами в виде скользящих заделок, расположенных по периметру панели в «шахматном» порядке (см. Рисунок 25). Прямоугольная панель ограничивается по оси $z = -1(+0.05)$, $z = 1(-0.05)$, по углу $\alpha = 0(-\pi/45)$, $\alpha = -\pi/2(+\pi/45)$ как на рисунке 25.

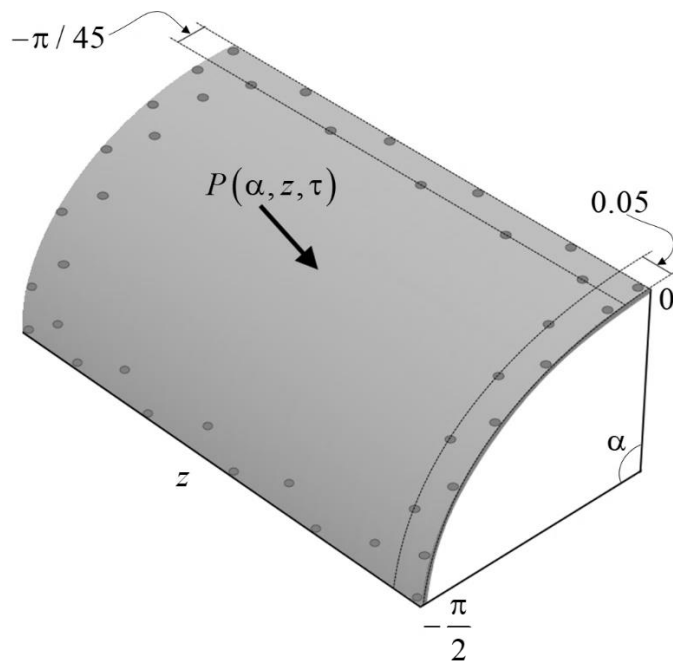


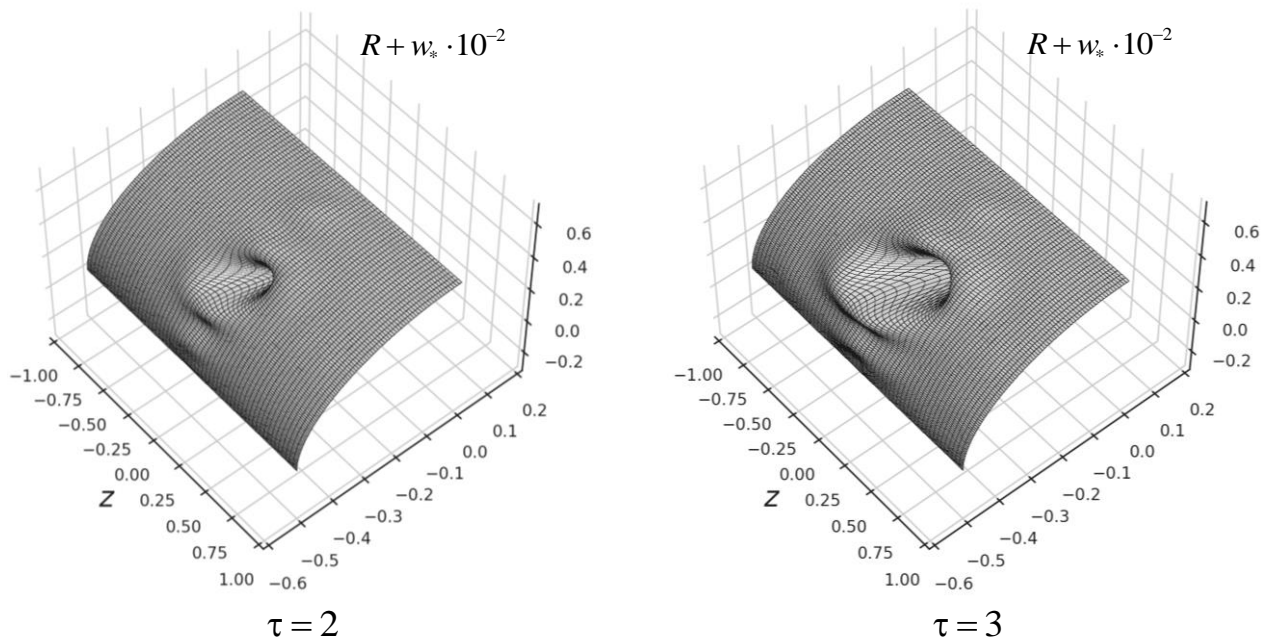
Рисунок 25 – Расчётная схема цилиндрической панели с локальными опорами

В начальный момент времени цилиндрическая панель покоится, затем на неё снаружи воздействует сосредоточенная нагрузка, амплитуда которой задана следующим образом:

$$P(\tau) = (-1 + \cos(\tau))H(2\pi - \tau).$$

Отношение радиуса панели к её толщине принято $R/h = 50$. Материал предполагается анизотропным (Graphite-эроху), упругие константы которого приведены выше.

На рисунке 26 представлены пространственные зависимости безразмерного нестационарного нормального перемещения анизотропной цилиндрической панели с локальными опорами в безразмерные моменты времени $\tau = 2, 3, 4, 5$.



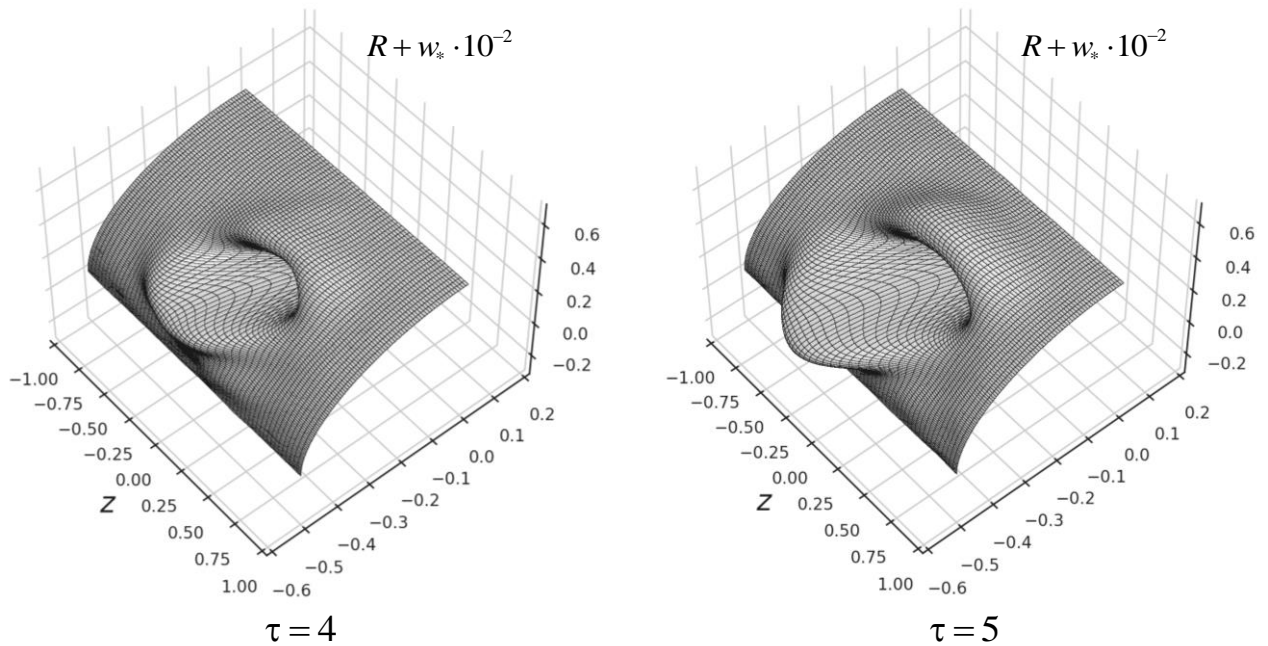


Рисунок 26 – Пространственные зависимости нестационарного прогиба анизотропной цилиндрической панели с локальными опорами при воздействии сосредоточенной нестационарной нагрузки в различные моменты времени

На рисунке 26 прослеживается несимметричный характер прогиба анизотропной цилиндрической панели и изменение картины распределения функции прогиба с течением времени. Видно выполнение граничного условия для нормального перемещения.

3.3. Достоверность функций нестационарных нормальных перемещений

С целью верификации представленной в параграфе 3.2 функции нормальных перемещений для анизотропной цилиндрической оболочки с локальными опорами при действии сосредоточенной нагрузки с переменной во времени амплитудой (3.1.7) построим решение задачи о нестационарной динамике свободно опёртой ортотропной оболочки длиной l , толщиной h , радиусом R при воздействии на неё нестационарной нагрузки $p(\alpha, z, t)$ и сопоставим результаты численных расчётов.

Описание верификационной модели для сравнения фундаментальных решений для неограниченных цилиндрических оболочек со свободно опёртыми оболочками приводится ранее, в параграфе 2.3.

В случае воздействия на оболочку нестационарной нагрузки вида (3.1.5):

$$p(\alpha, z, t) = P(\tau)H(\tau)\delta(\alpha)\delta(z - \xi),$$

функция нормального нестационарного прогиба свободно опёртой оболочки принимает вид:

$$w_l(\alpha, z, \tau) = G(\alpha, z, \tau; \xi) * * * p(\alpha, z, \tau) = \int_0^{\tau} G(\alpha, z, \tau - t; \xi)P(t)dt,$$

применяя к которой метод правых прямоугольников для численного взятия интеграла получим:

$$w_l(\alpha, z, \tau) \approx \frac{\tau}{m} \sum_{j=1}^m G\left(\alpha, z, \tau - \frac{\tau j}{m}\right) P\left(\frac{\tau j}{m}\right). \quad (3.3.1)$$

Выбор параметров численного интегрирования метода прямоугольников осуществляется на основе анализа сходимости функции нестационарных нормальных перемещений по непрерывной норме с заданной точностью.

Соотношение (3.3.1) для нестационарного нормального прогиба ортотропной свободно опёртой цилиндрической оболочки универсально по отношению к свойствам материала оболочки, который также может быть изотропным, трансверсально–изотропным или анизотропным.

Выполним расчёт нестационарного нормального прогиба цилиндрических оболочек по соотношениям (3.3.1) и (3.2.23) и сопоставим полученные результаты.

Материал оболочек принят ортотропным «Ероху S–glass» [142], упругие постоянные которого описаны в параграфе 2.3. Отношение радиуса к толщине $R/h = 40$. Закон изменения амплитуды сосредоточенной нагрузки

$P(\tau) = -\sin(\tau)$. Что касается оболочки с локальными опорами – рассмотрена область между равномерно распределённых по окружности 20 точечных подвижных шарнирных опор в координатах $z = -0.5$, $z = 0.5$ с шагом по углу $\pi/5$. Координаты приложения нагрузки $z = 0$, $\alpha = 0$. Что касается свободно опёртой оболочки – её длина $l = 1$, нагрузка приложена в координате $z = l/2$, $\alpha = 0$, а решение для нормального прогиба (3.3.1) смещено на $l/2$ (это связано с различным расположением центров систем координат).

На рисунках 27 и 28 представлены графики распределения безразмерных нестационарных нормальных перемещений вдоль образующих цилиндрической оболочки при $\alpha = 0$ и нормальных перемещений по углу α в сечениях по $z = 0$ в безразмерные моменты времени $\tau = 3$, $\tau = 5$ соответственно. Сплошные линии соответствуют решению по соотношению (3.2.23), а пунктирные по соотношению (3.3.1).

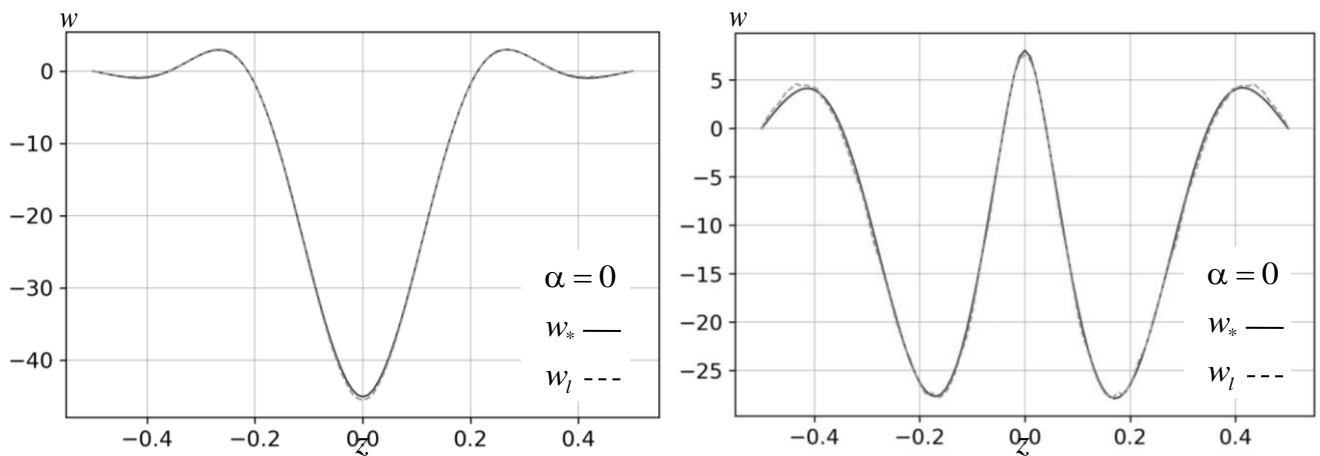


Рисунок 27 – Нестационарные нормальные перемещений вдоль образующих цилиндрических оболочек в моменты времени $\tau = 3$ и $\tau = 5$

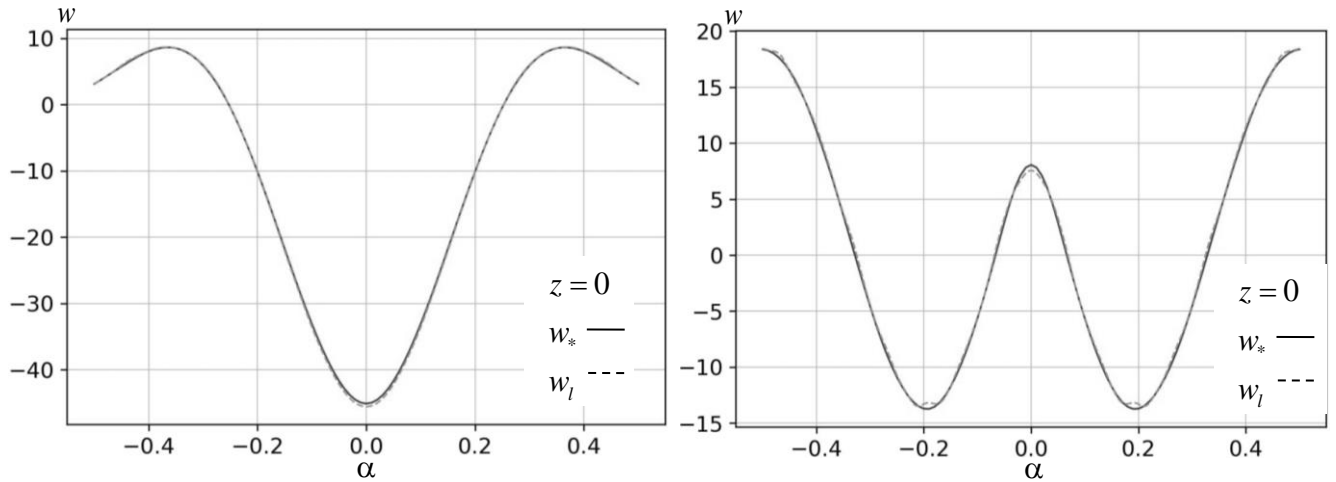


Рисунок 28 – Нестационарные нормальные перемещений по углу цилиндрических оболочек в моменты времени $\tau = 3$ и $\tau = 5$

При построении функции нормальных перемещений для свободно опёртой цилиндрической оболочки использовались следующие параметры:

$$- \alpha \in (-\pi, \pi], z \in [0, 1], \tau \in [0, 5], \xi = 0.5, \delta = 0.01\%, H_1 = 490, M_1 = 80.$$

При построении функции нормальных перемещений для оболочки с локальными опорами – следующие:

$$- \alpha \in (-\pi, \pi], z \in [-0.5, 0.5], \tau \in [0, 5], \delta = 0.01\%, J_1 = 110, N_1 = 430, R_1 = 60.$$

Из рисунков 27 и 28 видно, что характеры нормальных нестационарных прогибов совпадают, амплитуды имеют отличия, непрерывные нормы функций нормальных перемещений составили:

$$\begin{aligned} \|w(z, 0, 3) - w_l(z, 0, 3)\| &= \max_{-0.5 \leq z \leq 0.5} |w(z, 0, 3) - w_l(z, 0, 3)| = 1.099, \\ \|w(0, \alpha, 3) - w_l(0, \alpha, 3)\| &= \max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |w(0, \alpha, 3) - w_l(0, \alpha, 3)| = 1.099, \\ \|w(z, 0, 5) - w_l(z, 0, 5)\| &= \max_{-0.5 \leq z \leq 0.5} |w(z, 0, 5) - w_l(z, 0, 5)| = 4.124, \\ \|w(0, \alpha, 5) - w_l(0, \alpha, 5)\| &= \max_{-\pi \leq \alpha \leq \pi} |w(0, \alpha, 5) - w_l(0, \alpha, 5)| = 3.748, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

обусловлено это тем, что граничные условия рассматриваемых конструкций близки, но не идентичны.

Результаты, представленные на рисунках 27, 28 и соотношениями (3.3.2), позволяют сделать вывод об успешной верификации новой функции нормальных перемещении (3.2.23) для анизотропной оболочки с локальными опорами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана математическая модель для исследования нестационарных нормальных перемещений в анизотропных цилиндрических оболочках и панелях, имеющих произвольно расположенные локальные опоры в виде свободных опираний или скользящих заделок, путём индивидуального моделирования точечных граничных условий. Выполнена верификация построенных решений.

2. Построены и исследованы новые нестационарные фундаментальные решения для неограниченных анизотропных упругих цилиндрических оболочек Кирхгофа–Лява. Продемонстрирована их обобщённость в вопросе частных случаев анизотропии материала. Проведён параметрический анализ найденных фундаментальных решений. Выполнена верификация построенных фундаментальных решений.

3. Разработаны методики для анализа и оценки сходимости решений при проведении численных расчётов. Разработан алгоритм для определения параметров численного интегрирования и суммирования для получения решений с заранее установленной точностью.

4. С помощью построенных фундаментальных решений исследованы нормальные перемещения и напряжённо–деформированное состояние анизотропных цилиндрических оболочек для различных вариантов нестационарного нагружения.

5. Исследовано влияние геометрических параметров и свойств материала анизотропной оболочки на характер нестационарного НДС и перемещений при воздействии различных нагрузок.

Описанные в работе методы и полученные результаты позволяют исследовать напряжённо–деформированное состояние анизотропных цилиндрических оболочек и панелей, находящихся под воздействием нестационарных, произвольно распределённых нормальных нагрузок.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины / Абдикаримов Р. А., Жгутов В. М. // Инженерно–строительный журнал. — 2010. — № 8. — С. 38 – 47.
2. Абросимов Н. А., Баженов В. Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций / Абросимов Н. А., Баженов В. Г. — 1–е издание. — Н. Новгород : ННГУ, 2002 — 399 с.
3. Агафонов А. В. Действие внезапно приложенной сосредоточенной силы на цилиндрическую оболочку. Изв. АН СССР. Механика, 1965, №1, с.148 – 150.
4. Алоян Р. Н. Нестационарные задачи механики неоднородных тел: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание доктора технических наук / Алоян Р. Н.; Московский Государственный Открытый Университет. — Москва, 1998. — 375 с.
5. Амбарцумян С. А. О двух методах расчёта двухслойных ортотропных оболочек / Амбарцумян С. А. // Известия академии наук Армянской ССР. — 1957. — № 2. — С. 17 – 38.
6. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек / Амбарцумян С. А. — 1–е издание. — Москва : Наука, 1974 — 448 с.
7. Артюхин Ю. П. Расчёт однослойных и многослойных ортотропных оболочек на локальные нагрузки / Артюхин Ю. П. // Исслед. по теор. пластин и оболочек. — Казань : Изд–во Казанского ун–та, 1966. — С. 91 – 110.
8. Артюхин Ю. П. Расчёт ортотропных оболочек вращения на локальные нагрузки / Артюхин Ю. П. // Труды 6–й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Изд–во Наука. — Москва, 1966.

9. Артюхин Ю. П., Саченков А. В. К расчёту ортотропных пластин и оболочек / Артюхин Ю. П., Саченков А. В. // Исслед. по теор. пластин и оболочек. — 1967. — № 5. — С. 300 – 310.
10. Ашкенази Е. К. Анизотропия древесины и древесных материалов / Ашкенази Е. К. — Москва : Лесная промышленность, 1978 — 224 с.
11. Багдасарян Р. А. Исследование волновых процессов и напряжённо-деформированного состояния в анизотропных пластинках и цилиндрических оболочках: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание кандидата физико-математических наук / Багдасарян Р. А.; Академия наук Армянской ССР. Институт механики. — Ереван, 1985. — 145 с.
12. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы / Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. — Москва : Наука, 1975 — 630 с.
13. Бердиев Ш. Д. Нестационарные колебания круговых цилиндрических слоёв и оболочек, находящихся в деформируемой среде: специальность 01.02.07 «Механика сыпучих тел, грунтов и горных пород»: Диссертация на соискание кандидата технических наук / Бердиев, Ш. Д.; Академия наук республики Узбекистан. Самаркандское отделение. — Самарканд, 2000. — 127 с.
14. Богданович А. Е., Кошкина Т. Б. Деформирование и прочность ортотропных цилиндрических оболочек, подкреплённых кольцевыми рёбрами жёсткости, при динамических сжимающих нагрузках. – Механика композитных материалов, 1983, № 3, с. 476 – 488.
15. Богданович А. Е. Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек / Богданович А. Е. — Рига : Зинатне, 1987 — 294 с.
16. Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть I / Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. // Вестн. СамУ. Естественнонаучная серия — 2022. — № 28. — С. 40 – 52.

17. Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. Общая теория ортотропных оболочек. Часть II / Великанов П. Г., Артюхин Ю. П. // Вестн. СамУ. Естественнонаучная серия — 2022. — № 28. — С. 46 – 54.
18. Венцель Э. С., Джан–Темиров К. Е., Трофимов А. М., Негольша Е. В. Метод компенсирующих нагрузок в задачах теории тонких пластинок и оболочек / Венцель Э. С., Джан–Темиров К. Е., Трофимов А. М., Негольша Е. В. — Харьков : ФТИНТИ им. Б. И. Веркина, 1992 — 92 с.
19. Викторов И. В. Деформация цилиндрической оболочки, армированной нелинейно упругими нитями / И. В. Викторов // Вестник Санкт–Петербургского университета. — 2010. — № 1. — С. 73 – 86.
20. Виноградов Ю. И. Механика деформирования цилиндрической оболочки радиальными силами / И. В. Викторов // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. — 2013. — № 10. — С. 9 – 14.
21. Виноградов Ю. И. Расчёт на прочность ортотропных локально нагруженных оболочек / Виноградов Ю. И. // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. — 2015. — № 3. — С. 68 – 84.
22. Власов В. З. Общая теория оболочек и её приложения в технике / Власов В. З. — Москва : Государственное издательство технико–теоретической литературы, 1949 — 784 с.
23. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек: учебное пособие для вузов / Вольмир А. С — 1–е изд. — Москва : Юрайт, 2018 — 439 с.
24. Ву Ба Зуи Разработка метода и исследование напряжённого состояния физически ортотропных цилиндрических оболочек при локализованных термосиловых нагрузках: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание кандидата технических наук / Ву Ба Зуи; Московский авиационный институт (государственный технический университет). — Москва, 2015. — 147 с.
25. Галимов К. З., Паймушин В. Н., Терегулов И. Г. Основания нелинейной теории оболочек. Казань : Фэн, 1996. — 216 с.

26. Гольденвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек / А. А. Гольденвейзер — 1-е изд. — Москва : Наука, 1976 — 512 с.
27. Горшков А. Г., Медведский А. Д., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. Учебное пособие / Горшков А. Г., Медведский А. Д., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. — Москва : Физматлит, 2004 — 472 с.
28. Горшков А. Г., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. Учебник для вузов. / Горшков А. Г., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. — Москва : Наука, 2000 — 214 с.
29. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Устойчивость и колебания трёхслойных оболочек / Григолюк Э. И., Чулков П. П. — Москва : Машиностроение, 1973 — 172 с.
30. Григоренко Я. М. Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жёсткости / Григоренко Я. М. — 1-е изд. — Киев : Наук. думка, 1973 — 228 с.
31. Гусак А. А., Гусак Г. М., Бричкова Е. А. Справочник по высшей математике / Гусак А. А., Гусак Г. М., Бричкова Е. А. — Минск : ТетраСистемс, 1999 — 640 с.
32. Даревский В. М. К вопросу о действии на цилиндрическую оболочку некоторых нагрузок / Даревский В. М. // Доклады Академии наук СССР. — 1950. — Том 75, № 2. — С. 169 – 172.
33. Даревский В. М. К вопросу о действии на цилиндрическую оболочку сосредоточенной нагрузки / Даревский В. М. // Доклады Академии наук СССР. — 1950. — Том 75, № 1. — С. 7 – 10.
34. Даревский В. М. К теории цилиндрических оболочек / Даревский В. М. // Прикладная математика и механика. — 1951. — Том 15, № 5. — С. 159 – 194.
35. Даревский В. М. Контактные задачи теории оболочек (действие локальных нагрузок на оболочке) / Даревский В. М. // Тр. VI Всесоюзной конференции оболочек и пластин. — Москва : Наука, 1966. — С. 927 – 934.

36. Даревский В. М. Определение перемещений и напряжений в цилиндрической оболочке при локальных нагрузках / Даревский В. М. // Прочность и динамика авиационных двигателей. — 1964. — № 1. — С. 23 – 83.
37. Даревский В. М. Решение некоторых вопросов теории цилиндрической оболочки / Даревский В. М. // Прикладная математика и механика. — 1952. — Том 16, № 2.
38. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа / Деч Г. — Москва : Наука, 1971 — 288 с.
39. Дьяченко Ю. П., Еленицкий Э. Я., Петров Д. В. Нестационарные задачи динамики пластин и цилиндрических оболочек вращения ступенчатого сечения / Дьяченко Ю. П., Еленицкий Э. Я., Петров Д. В. // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2011. — № 2. — С. 278 – 288.
40. Ельмуратов С. К., Джахаев А. Е. Вынужденные колебания ортотропных оболочек и пластин при действии сосредоточенных масс и возмущающей нагрузки / Ельмуратов С. К., Джахаев А. Е. // Наука и техника Казахстана. — 2013. — № 1. — С. 23 – 26.
41. Жигалко Ю. П. Изгиб тонких изотропных и ортотропных цилиндрических оболочек радиальной линейной нагрузкой / Жигалко Ю. П. // Нелинейная теория пластин и оболочек. — Казань : КГУ, 1962.
42. Жигалко Ю. П. О путях решения задачи прочности локально нагруженной цилиндрической оболочки / Жигалко Ю. П. // Сб. аспирантских работ (Точные науки). — Казань : Казанского ун-та, 1962.
43. Жигалко Ю. П. Расчёт тонких упругих цилиндрических оболочек на локальные нагрузки / Жигалко Ю. П. // Исслед. по теор. пластин и оболочек. — 1966. — № 4. — С. 3 – 41.
44. Жигалко Ю. П. Функция Грина уравнения Морли–Доннела для свободно опертой цилиндрической оболочки / Жигалко Ю. П. // Волжский математический сборник. — 1966. — № 4.

45. Жигалко Ю. П., Дмитриева Л. М. Поведение слоистой ортотропной цилиндрической оболочки при импульсивном давлении, распределённом по малой прямоугольной площадке / Жигалко Ю. П., Дмитриева Л. М. // Сборник аспирантских работ. Теория пластин и оболочек. — Казань : КГУ, 1971.
46. Жигалко Ю. П., Дмитриева Л. М. Реакция ортотропной цилиндрической оболочки на локализованный импульс внешнего давления / Жигалко Ю. П., Дмитриева Л. М. // Исслед. по теор. пластин и оболочек. — 1975. — № 11. — С. 254 – 261.
47. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек / Жилин П. А. — Санкт–Петербург : Изд–во Политехнического университета, 2006 — 168 с.
48. Иванов В.А., Паймушин В.Н. Уточнение уравнений динамики многослойных оболочек с трансверсально–мягким наполнителем // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 1995. №3. С. 142 – 152.
49. Иванов В.А., Паймушин В.Н. Уточненная постановка динамических задач трёхслойных оболочек с трансверсально–мягким наполнителем численно–аналитический метод их решения // Прикладная механика и техническая физика. 1995. Т. 36. №4. С. 147 – 151.
50. Карпов В. В., Семенов А. А., Холод Д. В. Исследование прочности пологих ортотропных оболочек из углепластика / Карпов В. В., Семенов А. А., Холод Д. В. // Труды МАИ. — 2014. — № 76. — С. 1 – 20.
51. Кильчевский Н. А. Теория нестационарных динамических процессов в оболочках / Кильчевский Н. А. // Прикладная механика. — 1968. — № 3. — С. 1 – 18.
52. Коган Е. А., Юрченко А. А. Нелинейные колебания трёхслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях / Коган Е. А., Юрченко А. А. // Известия Московского государственного технического университета МАМИ. — 2014. — № 1(19). — С. 55 – 70.

53. Козьма Е. А. Динамика неоднородных цилиндрических оболочек: специальность 05.23.17 «Строительная механика»: Диссертация на соискание кандидата технических наук / Козьма Е. А.; ГОУВПО «Самарский государственный архитектурно–строительный университет». — Самара, 2007. — 167 с.
54. Коренева Е. В. Метод компенсирующих нагрузок для решения задачи об анизотропных средах / Коренева Е. В. // Международный журнал по расчёту гражданских и строительных конструкций. — 2018. — № 14(1). — С. 71 – 77.
55. Коровайцева Е. А. Исследование особенностей решения задач нестационарной динамики мягких оболочек из высокоэластичных материалов / Коровайцева Е. А. // Проблемы прочности и пластичности. — 2021. — Том 83, № 2. — С. 151 – 159.
56. Коровайцева Е. А., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Нестационарные задачи о воздействии внешнего давления на тонкие цилиндрические или сферические оболочки с наполнителем / Коровайцева Е. А., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2016. — С. 85 – 86.
57. Коссович Л. Ю. Асимптотические методы в динамике оболочек при ударных воздействиях / Коссович Л. Ю. // Известия Саратовского университета. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2008. — Том 8, № 2. — С. 12 – 33.
58. Кошкина Т. Б. Деформирование и прочность подкреплённых композитных цилиндрических оболочек при динамических сжимающих нагрузках: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание кандидата технических наук / Кошкина Т. Б.; Академия наук Латвийской ССР. Институт механики полимеров. — Рига, 1984. — 182 с.

59. Кудачёва К. А., Сопенко А. А., Теряев А. Г. Колебания пластин и пологих оболочек под действием переменной во времени и несимметричной по плану нагрузки / Кудачёва К. А., Сопенко А. А., Теряев А. Г. // Математическое моделирование, компьютерный и натурный эксперимент в естественных науках. — 2020. — № 2. — С. 1 – 14.
60. Кузнецов С. А. Статическое и динамическое контактное взаимодействие пластин и цилиндрических оболочек с жёсткими телами: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание кандидата физико–математических наук / Кузнецов С. А.; Казанский Государственный Университет им. В.И. Ульянова–Ленина. — Казань, 1983. — 150 с.
61. Ларичев Е. А., Сафронов В. С., Туркин И. К. Определение критической динамической нагрузки композитной оболочки при сложном термосиловом нагружении / Ларичев Е. А., Сафронов В. С., Туркин И. К. // Труды МАИ. — 2007. — № 27. — С. 1 – 11.
62. Ле Чунг Хиеу Трёхмерная теория цилиндрической оболочки переменной толщины при локальном нагружении: специальность 01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»: Диссертация на соискание кандидата технических наук / Ле Чунг Хиеу; Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). — Москва, 2012. — 190 с.
63. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки / Лехницкий С. Г. — Москва : ОГИЗ, 1947 — 356 с.
64. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Исследование нестационарного деформированного состояния анизотропной цилиндрической оболочки / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы X международной научно–практической конференции Ч. 1. — Гомель : БелГУТ, 2020. — С. 99 – 101.

65. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Метод компенсирующих нагрузок для исследования нестационарных возмущений в анизотропных цилиндрических оболочках с локальными шарнирными опорами / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI международной научно-практической конференции Ч. 2. — Гомель : БелГУТ, 2022. — С. 207 – 207.
66. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Напряжённо-деформированное состояние анизотропной цилиндрической оболочки при ударных нагрузках / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2021. — С. 87 – 88.
67. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика анизотропной оболочки Кирхгофа–Лява / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. — 2020. — № 4(46). — С. 101 – 106.
68. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика анизотропной цилиндрической оболочки в случае смешанных граничных условий / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики — Москва : Издательство Московского университета, 2022. — С. 48 – 49.
69. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика жёстко закреплённой анизотропной цилиндрической оболочки / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. — Москва : Издательство Московского университета, 2021. — С. 48 – 49.
70. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика тонких анизотропных упругих цилиндрических оболочек / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVI

- Международного симпозиума им. А.Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2020. — С. 89 – 91.
71. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная динамика шарнирно опертой анизотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Проблемы безопасности на транспорте. Материалы XI международной научно–практической конференции Ч. 2. — Гомель : БелГУТ, 2021. — С. 152 – 153.
72. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная функция влияния для анизотропной цилиндрической оболочки типа Кирхгофа–Лява / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики. Апрель 2020. — Москва : Издательство Московского университета, 2020. — С. 145 – 145.
73. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарная функция прогиба для полубесконечной анизотропной цилиндрической оболочки / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // XXII Зимняя школа по механике сплошных сред. Тезисы докладов. — Пермь : ПФИЦ УрО РАН, 2021. — С. 200 – 201.
74. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарные внутренние силовые факторы в анизотропной цилиндрической оболочке / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов X Всероссийской научной конференции с международным участием. — Москва : ИПРИМРАН, 2020. — С. 176 – 182.
75. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарные возмущения в анизотропной цилиндрической оболочке с конструктивными особенностями / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2022. — С. 73 – 74.

76. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Нестационарные изгибные волны в анизотропной цилиндрической оболочке с локальными опорами / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXIX Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. Том 2. — Москва : ООО "ТРП", 2023. — С. 26 – 27.
77. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. Нестационарное деформирование анизотропной круговой цилиндрической оболочки / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. // Труды МАИ. — 2021. — № 120. — С. 1 – 33.
78. Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. Нестационарное напряжённо–деформированное состояние композитной цилиндрической оболочки / Локтева Н. А., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. // Механика композиционных материалов и конструкций. — 2020. — Том 26 № 4. — С. 544 – 559.
79. Лукасевич С. Локальные нагрузки в пластинах и оболочках / Лукасевич С. — Москва : Мир, 1982 — 544 с.
80. Лурье А. И. Общая теория упругих тонких оболочек / Лурье А. И. // Прикладная математика и механика. — 1940. — № 2. — С. 7 – 34.
81. Мастиновский Ю. В. Подкреплённая цилиндрическая оболочка под действием перемещающейся силы / Мастиновский Ю. В. // Общие вопросы двигателестроения. — 2015. — № 1. — С. 42 – 44.
82. Митин А. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Нестационарный контакт цилиндрической оболочки и абсолютно твёрдого эллиптического параболоида / Митин А. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. // Труды МАИ. — 2019. — № 107. — С. 1 – 5.
83. Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Общая теория упругих оболочек. Учебное пособие / Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. — Москва : МАИ, 2018 — 112 с.

84. Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Упругие пластины и пологие оболочки. Учебное пособие / Михайлова Е. Ю., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. — Москва : МАИ, 2018 — 92 с.
85. Мовсисян Л. А. К расчёту анизотропной цилиндрической оболочки вращения / Мовсисян Л. А. // Известия академии наук Армянской ССР. — 1959. — № 4. — С. 89 – 107.
86. Моисеев К. А., Панов Ю. Н. Методика расчёта колебаний подкреплённой анизотропной цилиндрической оболочки при действии подвижной нагрузки / Моисеев К. А., Панов Ю. Н. // Труды МАИ. — 2011. — № 48. — С. 1 – 15.
87. Муштари Х. М., Терегулов И. Г. Теория пологих ортотропных оболочек средней толщины / Муштари Х. М., Терегулов И. Г. // Известия академии наук СССР. — 1969. — № 6.
88. Никитин Б. А. Приближенное решение задачи о действии сосредоточенных сил на цилиндрическую оболочку / Никитин Б. А. // Учёные записки ЛГУ, Сер. мат. наук. — 1960. — № 280. — С. 87 – 96.
89. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости / Новожилов В. В. — Ленинград : ОГИЗ, 1948 — 213 с.
90. Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. Линейная теория тонких оболочек / Новожилов В. В., Черных К. Ф., Михайловский Е. И. — Ленинград : Политехника, 1991 — 656 с.
91. Огибалов П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек / Огибалов П. М. — Москва : Изд-во Московского университета, 1963 — 416 с.
92. Оконечников А. С., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Пространственная нестационарная контактная задача для цилиндрической оболочки и абсолютно твердого тела / Оконечников А. С., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2020. — № 3. — С. 80–91.
93. Ольшанский В. П. Разработка методов расчёта пологих оболочек на действие локализованных нагрузок: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание доктора

- физико–математических наук / Ольшанский В. П.; Казанский Государственный Университет имени В. И. Ульянова–Ленина. — Казань, 1989. — 424 с.
94. Павлов Е. К. Численная реализация метода Фурье применительно к решению осесимметричной задачи динамики составных оболочек вращения: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание кандидата физико–математических наук / Павлов Е. К.; Центральный научно–исследовательский и проектный институт строительных металлоконструкций им. И. П. Мельникова. — Москва, 1984. — 217 с.
95. Петров И. И., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки / Петров И. И., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Труды МАИ. — 2022. — № 124. — С. 1 – 30.
96. Петров И. И., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. Фундаментальные решения для ортотропной цилиндрической оболочки Кирхгофа–Лява / Петров И. И., Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д. // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. Материалы XXVIII Международного симпозиума им. А. Г. Горшкова. — Москва : ООО "ТРП", 2022. — С. 105 – 107.
97. Плескунов М. А. Операционное исчисление: учебное пособие / Плескунов М. А. — Екатеринбург : Изд–во. Урал. ун–та, 2014 — 143 с.
98. Поддаева О. И. Продольные колебания цилиндрических оболочек: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание кандидата технических наук / Поддаева О. И.; Московский государственный строительный университет. — Москва, 2005. — 99 с.
99. Работнов Ю. Н. Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой / Работнов Ю. Н. // Докл. АН СССР. — 1946. — № 4. — С. 299 – 301.
100. Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. Применение метода компенсирующих нагрузок в задачах нестационарного деформирования

- цилиндрических оболочек из моноклинного материала / Сердюк Д. О., Скопинцев П. Д., Федотенков Г. В. // Ломоносовские чтения. Научная конференция. Секция механики — Москва: Издательство Московского университета, 2023. — С. 148 – 149.
101. Сибиряков А. В. Динамика слоистых композиционных пластин и оболочек при импульсном нагружении: специальность 01.02.06 «Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры»: Диссертация на соискание доктора технических наук / Сибиряков А. В.; Московский государственный авиационный институт (технический университет). — Москва, 2002. — 319 с.
102. Сойкин Б. М. Актуальные проблемы механической обработки тонкостенных цилиндрических оболочек, выполненных из ортотропных материалов / Сойкин Б. М. // Обработка материалов резанием. — 2004. — № 3. — С. 1 – 6.
103. Сойкин Б. М. Определение напряжений в цилиндрической оболочке, нагруженной радиальной сосредоточенной силой / Сойкин Б. М. // Альманах современной науки и образования. — 2012. — № 8. — С. 145 – 148.
104. Сорокин В. Г., Волосникова А. В., Вяткин С. А., и др. Марочник сталей и сплавов / Сорокин В. Г., Волосникова А. В., Вяткин С. А., и др. — Москва: Машиностроение, 1989 — 640 с.
105. Таранов О. В. Нестационарные волны в полуполосе и цилиндрической оболочке при поверхностных и торцевых ударных воздействиях нормального типа: специальность 01.02.04 «Механика деформируемого твёрдого тела»: Диссертация на соискание кандидата физико-математических наук / Таранов О. В.; Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского. — Саратов, 2010. — 125 с.
106. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости. Учебное пособие /

- Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. — Москва : МАИ–Принт, 2009 — 112 с.
107. Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем / Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. // Учёные записки Казанского университета. Серия физико–математические науки. — 2016. — Т. 158. — Кн. 1. — С. 141–151. .
108. Тюреходжаев А. Н., Рыстыгулова В. Б Исследование осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочки / Тюреходжаев А. Н., Рыстыгулова В. Б // Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук. — 2012. — № 2(37). — С. 29 – 36.
109. Фирсанов В. В., Во А. Х. Исследование продольно подкреплённых цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточнённой теории / Фирсанов В. В., Во А. Х. // Труды МАИ. — 2018. — № 102. — С. 1 – 19.
110. Христенко А. С. О действии сосредоточенных нагрузок на ортотропную цилиндрическую оболочку / Христенко А. С. // Известия академии наук СССР. Механика и машиностроение. — 1962. — № 3
111. Шмаков В. П. Избранные труды по гидроупругости и динамике упругих конструкций / Шмаков В. П. — Москва : МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011 — 287 с.
112. Шуршалов А. И. Поведение ортотропных цилиндрических оболочек при нестационарном нагружении / Шуршалов А. И. // Взаимодействие пластин и оболочек с жидкостью и газом. — 1984. — № 1. — С. 60 – 72.
113. Якушев Н. З. К динамическим задачам теории тонких оболочек / Якушев Н. З. // Известия КФАН СССР, серия физмат и техн. наук. — 1960. — № 14.
114. Якушев Н. З. Вынужденные нелинейные колебания длинной цилиндрической оболочки / Якушев Н. З. // Исследования по теории пластин и оболочек. — 1967. — № 5. — С. 388 – 396

115. Якушев Н. З. Динамика цилиндрических оболочек / Якушев Н. З. // Исследования по теории пластин и оболочек. — 1976. — № 12. — С. 266 – 276.
116. Aghalovyan L. Asymptotic theory of anisotropic plates and shells / Aghalovyan L.: World Scientific Publishing, 2015 — 376 p.
117. Chaudhuri R. Z., Balaraman K., Kunukkasseril V. X. Arbitrarily laminated, anisotropic cylindrical shell under internal pressure / Chaudhuri R. Z., Balaraman K., Kunukkasseril V. X. // AIAA Journal. — 1986. — № 24. — P. 116 – 127.
118. Cottis M. G. On the dynamic response of an orthotropic finite cylindrical shell to an arbitrary pressure field / Cottis M. G. // Journal of Sound and Vibration. — 1968. — № 7. — P. 31 – 38.
119. Fedotenkov G. V., Mikhailova E. Y., Kuznetsova E. L., Rabinskiy L. N. Modeling the unsteady contact of spherical shell made with applying the additive technologies with the perfectly rigid stamp / Fedotenkov G. V., Mikhailova E. Y., Kuznetsova E. L., Rabinskiy L. N. // International Journal of Pure and Applied Mathematics. — 2016. — № 2. — P. 331 – 342.
120. Ganapathi M., Varadan T. K. Dynamic buckling of laminated anisotropic spherical caps / Ganapathi M., Varadan T. K. // The Journal of Applied Mechanics. — 1995. — № 62. — P. 13 – 19.
121. Gaul L., Kogel M., Wagner M. Boundary element methods for engineers and scientists: an introductory course with advanced topics / Gaul L., Kogel M., Wagner M. — Berlin : Springer Berlin Heidelberg, 2012 — 488 с.
122. Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Y. Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution / Grigorenko Y. M., Grigorenko A. Y. // International Applied Mechanics. — 2013. — № 29. — P. 123 – 193.
123. Han X., Xu D. L. Elastic waves propagating in a laminated cylinder subjected to a point load / Han X., Xu D. L. // Computational Mechanics – New Frontiers for the New Millennium. — 2001. — № 1. — P. 41 – 46.

124. Hung Sying Jing, Kuan Goang Tzeng Approximate elasticity solution for laminated anisotropic finite cylinders / Hung – Sying Jing, Kuan – Goang Tzeng // American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal. — 1993. — № 31. — P. 2121 – 2129.
125. Isa Ahmadi, Mahsa Najafi Three – dimensional stresses analysis in rotating thin laminated composite cylindrical shells / Isa Ahmadi, Mahsa Najafi // Steel and Composite Structures. — 2016. — № 5. — P. 1193 – 1214.
126. Kant T., Menon M. P. Estimation of interlinear stresses in fiber reinforced composite cylindrical shells / Kant T., Menon M. P. // Computers & Structures. — 1991. — № 38. — P. 131 – 147.
127. Li X., Chen Y. Transient dynamic response analysis of orthotropic circular cylindrical shell under external hydrostatic pressure / Li X., Chen Y. // Journal of Sound and Vibration. — 2002. — № 257(5). — P. 967 – 976.
128. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. Non–stationary influence function for an unbounded anisotropic Kirchhoff – Love shell / Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. // Journal of Applied Engineering Science. — 2020. — Vol. 18 № 4. — P. 737 – 744.
129. Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. The transient deformation of an anisotropic cylindrical shell with structural features / Lokteva N. A., Serdyuk D. O., Skopintsev P. D. // Journal of The Institution of Engineers (India): Series C. — 2023. — № 104. — P. 455 – 466.
130. Lugovoi P. Z., Meish V. F., Orlenko S. P. Numerical simulation of the dynamics of spherical sandwich shells reinforced with discrete ribs under a shockwave / Lugovoi P. Z., Meish V. F., Orlenko S. P. // International Applied Mechanics. — 2020. — № 56. — P. 590 – 598.
131. Magliula E. A., McDaniel J. G. Wave based analysis of the Green’s function for a layered cylindrical shell / Magliula E. A., McDaniel J. G. // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2012. — № 132(1). — P. 173 – 179.

132. Marchuk M. V., Tuchapskii R. I. Dynamics of geometrically nonlinear elastic nonthin anisotropic shells of variable thickness / Marchuk M. V., Tuchapskii R. I. // *International Applied Mechanics*. — 2017. — № 53. — P. 655 – 667.
133. McIvor I. K., Lovell E. G. Dynamic response of finite length cylindrical shells to nearly uniform radial impulse / McIvor I. K., Lovell E. G. // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. — 1968. — № 12. — P. 1 – 9.
134. Mikhailova E. Y., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V., Transient contact problem for spherical shell and elastic half – space / Mikhailova E. Y., Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V., // *Shell Structures: Theory and Applications*. — 2017. — № 4. — P. 301 – 304.
135. Okasha Elnady A., Negm H. M. Analysis of arbitrarily laminated cylindrical shells using chebyshev series / Okasha Elnady A., Negm H. M. // *Journal of Engineering and Applied Science*. — 2004. — № 51(2). — P. 291 – 307.
136. Okhovat R., Boström A. Dynamic equations for an anisotropic cylindrical shell using a power series method / Okhovat R., Boström A. // *Composite Structures*. — 2014. — № 184. — P. 1197 – 1203.
137. Pagano N. J. The stress field in a cylindrically anisotropic body under two – dimensional surface tractions / Pagano N. J. // *The Journal of Applied Mechanics*. — 1972. — № 39(3). — P. 791 – 796.
138. Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells / Qatu M. S., Sullivan R. W., Wang W. // *Composite structures*. — 2010. — № 93. — P. 14 – 31.
139. Rajabi M., Behzad M. Interaction of a plane progressive sound wave with anisotropic cylindrical shells / Rajabi M., Behzad M. // *Composite structures*. — 2014. — № 116. — P. 747 – 760.
140. Renno J. M., Mace B. R. Calculating the forced response of cylinders and cylindrical shells using the wave and finite element method / Renno J. M., Mace B. R. // *Journal of Sound and Vibration*. — 2014. — № 333. — P. 5340 – 5355.

141. Singh V. P., Dwivedi J. P., Upadhyay P. C. Non-axisymmetric dynamic response of buried orthotropic cylindrical shells under moving load / Singh V. P., Dwivedi J. P., Upadhyay P. C. // *Structural Engineering and Mechanics*. — 1999. — № 8. — P. 39 – 51.
142. Tajudin N., Balkeshwar S., Ramesh B., Cherinet G. Design and analysis of composite mono leaf spring for Toyota lhd Hilux double cabin / Tajudin N., Balkeshwar S., Ramesh B., Cherinet G. // *International Journal of Mechanical Engineering*. — 2022. — № 6. — P. 649 – 682.
143. Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell / Tarlakovskii D. V., Fedotenkov G. V. // *Mechanics of Solids*. — 2015. — № 50(2). — P. 208 – 217.
144. Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C. V., Balasubramaniam K. Determination of material symmetries from ultrasonic velocity measurements: A genetic algorithm based blind inversion method / Vishnuvardhan J., Krishnamurthy C. V., Balasubramaniam K. // *Composites Science and Technology*. — 2007. — № 68. — P. 862 – 871.
145. Xu X., Karami B., Janghorban M. On the dynamics of nanoshells / Xu X., Karami B., Janghorban M. // *International Journal of Engineering Science*. — 2021. — № 158. — P. 28 – 31.
146. Yao J. C. An analytical and experimental study of cylindrical shells under localized impact loads / Yao J. C. // *AIAA Journal*. — 1966. — № 17. — P. 36 – 41.
147. Zenkour A. M. Global structural behavior of thin and moderately thick monoclinic spherical shells using a mixed shear deformation model / Zenkour A. M. // *Archive of Applied Mechanics*. — 2004. — № 74. — P. 262 – 276.