

На правах рукописи



ПАК СОНГИ

**СТАТИЧЕСКАЯ И ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ
ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЖИДКОСТЬ**

Специальность 1.1.8.

«Механика деформируемого твердого тела»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидат технических наук

Москва – 2023

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

Научный руководитель: **Григорьев Валерий Георгиевич**, доктор технических наук, профессор кафедры 602 «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий» МАИ

Официальные оппоненты: **Попов Александр Леонидович**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории Механики прочности и разрушения материалов и конструкций Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского Российской Академии Наук (ИПМех РАН)»

Темнов Александр Николаевич, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Космические аппараты и ракеты-носители» ФГБОУ ВО «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана» (МГТУ)

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН)»

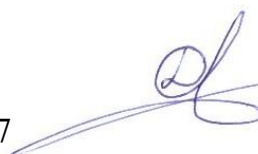
Защита диссертации состоится 27 декабря 2023 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.07 в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. и на сайте:

https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=176552

Автореферат разослан « » _____ 2023 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.07



Сердюк Дмитрий Олегович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

В настоящее время многие технические устройства, системы и сооружения, работающие в условиях динамических нагрузок, в своем составе имеют тонкостенные упругие ёмкости, частично или полностью заполненные жидкими компонентами, оказывающими существенное влияние на динамические характеристики конструкций. При этом значительный вклад в особенности поведения конструкции в условиях эксплуатации вносят различные резонансные эффекты, параметрические и комбинационные резонансы, последствия которых могут оказать нежелательное влияние на ее несущую способность как в плане допустимых напряжений в материале, так и в части возможных проявлений статической и динамической неустойчивости.

Актуальностью данной работы является обеспечение надежного функционирования конструкций указанного типа в течение всего срока службы.

Целью работы является разработка методики исследования статической и динамической устойчивости осесимметричных тонкостенных упругих оболочечных конструкций, полости которых могут содержать идеальную несжимаемую жидкость.

Основные задачи, решаемые в диссертации:

- Анализ существующих подходов в исследовании статической и динамической устойчивости осесимметричных тонкостенных упругих оболочечных конструкций, содержащих идеальную несжимаемую жидкость.
- Разработка математической модели колебаний тонкостенной упругой конструкции, содержащей жидкость, в операторном выражении.
- Разработка дискретной конечномерной математической модели колебаний тонкостенной упругой конструкции, содержащей жидкость, на основе метода конечных элементов.
- Разработка методики исследования запасов статической устойчивости тонкостенной упругой конструкции, содержащей жидкость, при действии многофакторных нагрузок, основанной на методе пространственного Фурье-анализа спектра осесимметричной конструкции.
- Разработка математической модели на основе дифференциальных уравнений для описания потери динамической устойчивости стационарного колебательного режима тонкостенной конструкции, содержащей жидкость.
- Разработка программного обеспечения для проведения численных исследований потери устойчивости стационарного отклика системы на заданные режимы гармонических воздействий.

- Исследование различных конфигураций тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, на предмет потери устойчивости стационарного отклика системы на заданные режимы гармонических воздействий.

Методы решения данных задач основываются на вариационных принципах механики с использованием метода конечных элементов.

Научная новизна

1. Разработана методика, основанная на пространственном Фурье-анализе спектра осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объёмами несжимаемой жидкости, для исследования статической устойчивости при действии гравитационного поля и осесимметричных силовых факторов.

2. Предложен метод прямого интегрирования нелинейных динамических уравнений для построения областей параметрического возбуждения неосесимметричных колебаний осесимметричной тонкостенной конструкции при продольном динамическом воздействии. На основе этого метода разработана методика исследования динамической устойчивости гармонических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объёмами несжимаемой жидкости, возбуждаемых продольным периодическим воздействием, в среде табличного процессора Excel.

3. Разработана и реализована в среде табличного процессора Excel конечно-элементная модель, позволяющая в рамках линейной теории исследовать статическую и динамическую устойчивость тонкостенных конструкций, содержащих жидкость, при действии гравитационного поля и осесимметричных силовых факторов, а также учитывать их влияние на величины собственных частот.

4. Впервые построена математическая модель, позволяющая численным интегрированием исследовать переходные процессы колебаний системы как в области динамической неустойчивости параметров воздействия, так и вне ее. Показан параметрический характер неосесимметричных колебаний тонкостенной конструкции, контактирующей с объёмами несжимаемой жидкости, при осесимметричном воздействии. Получены границы областей параметрических резонансов как основного (1-го порядка), так и резонансов более высоких порядков.

5. На основе разработанной математической модели исследования спектра статически нагруженной конструкции и предложенных алгоритмов автоматизации процесса вычислений в среде табличного процессора Excel определены критические величины толщины оболочек, частично заполненных жидкостью, и «мнимых частот», наличие которых характеризует потерю статической устойчивости нагруженной конструкции.

Практическая значимость

1. Разработанные методики и алгоритмы расчета позволяют повысить надежность эксплуатации изделий, включающих осесимметричные тонкостенные упругие конструкции, содержащие идеальную несжимаемую жидкость.

2. Приведены тестовые примеры вычисления собственных частот оболочечных конструкций из алюминиевых и титановых сплавов различной геометрической формы, заполненных жидкостью, с учетом разнообразных видов закрепления торцовых поверхностей и условий нагружения.

3. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования баллонов и резервуаров специального назначения при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

4. Разработана и апробирована версия программы расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных упругих конструкций, содержащих объемы идеальной несжимаемой жидкости, с использованием метода конечных элементов, реализованная в среде офисной программы Excel на языке программирования Visual Basic for Applications (VBA) и позволяющая проводить исследования без использования дорогостоящих специализированных программно-аппаратных комплексов.

5. Материалы диссертации также могут быть использованы в учебных процессах студентов, обучающихся по направлению механики деформируемого твердого тела.

Достоверность полученных результатов основывается на корректности математических моделей и строгости математических решений. Достоверность следует из сравнения с известными аналитическими и численными решениями, полученными для конструкций, содержащих жидкость, а также экспериментальными данными.

Личный вклад автора

Основные положения диссертации и все результаты работы получены лично автором. Постановка задачи была проведена совместно с научным руководителем. Программная реализация разработанных методов и алгоритмов выполнена автором лично.

Апробация результатов работы и публикации

Основные материалы и результаты исследований по теме диссертационной работы были доложены и обсуждались на международных конференциях и научных чтениях:

– на Международной молодежной научной конференции XLV Гагаринские чтения (Москва, МАИ, 2019 г.),

- на 18-ой и 20-ой Международных конференциях «Авиация и космонавтика» (Москва, МАИ, 2019 г., 2021 г.),
- на XXVII международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова (Москва, 2021 г.)
- на 71st и 72nd International Astronautical Congress, IAC (The CyberSpace Edition, 2020 г., Дубай, 2021 г.)

По теме диссертационной работы было опубликовано 9 работ. В том числе две работы опубликованы в изданиях, входящих в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК РФ и две входят в перечень Scopus.

Объем и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения и списка используемой литературы. Общий объем диссертации составляет 144 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится характеристика исследований, связанных с подготовкой диссертационной работы, описываются цель и задачи исследования, научная новизна, практическая значимость, достоверность полученных результатов, приводятся данные о структуре и объеме диссертационной работы.

В первой главе диссертационной работы приведен обзор литературных источников состояния исследования в области устойчивости тонкостенных конструкций, содержащих жидкость. Коротко описаны развитие исследования устойчивости тонкостенных конструкций с жидкостью. Рассмотрены работы по вопросам нелинейной теории упругости и современные работы, посвященные экспериментальным и численным исследованиям оболочек с жидкостью.

Во второй главе сформулированы основные уравнения, описывающие совместные колебания упругого тела и находящегося в контакте с ним ограниченного объема жидкости. Жидкость при этом считается идеальной и несжимаемой, а вся система находится под действием однородного гравитационного поля. Направление вектора гравитации определяет положение свободной поверхности жидкости в состоянии покоя. Колебания полагаются малыми, так что уравнения колебаний получаются линейными. Для учета влияния начальной статической деформации на резонансные частоты рассматриваемой системы используются нелинейные геометрические уравнения теории упругости, которые линеаризуются в окрестности статического напряженно-деформированного состояния упругого тела, так что малые колебания нагруженной статически системы описываются линейными соотношениями. В системе учитываются также гравитационная энергия

колебаний свободной поверхности жидкости и связанная с ней гравитационная энергия контактного взаимодействия жидкости со смоченной поверхностью упругого тела.

В разделе 2.1 рассматриваются малые колебания упругой конструкции с полостью, частично заполненной жидкостью.

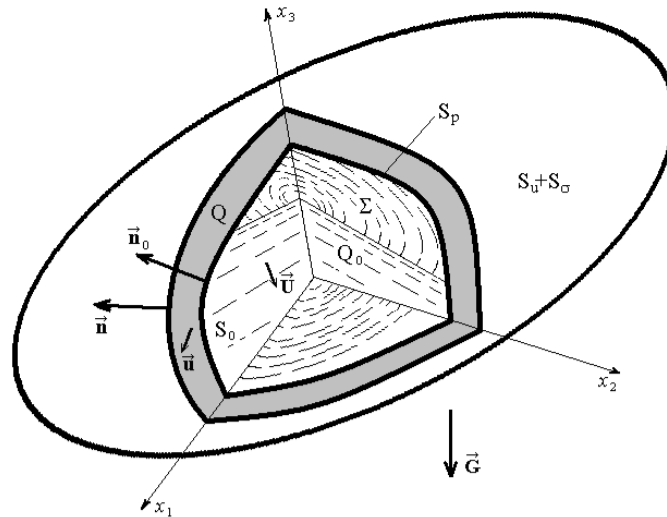


Рисунок 1 – Сечение упругого тела с жидкостью и обозначения

На рис. 1 показаны обозначения, введенные для описания задачи: Q и Q_0 – объемы, занятые упругим телом и жидкостью, S – поверхность упругого тела, S_0 – поверхность полости, смоченная жидкостью объема Q_0 , S_p – поверхность полости, подверженная действию избыточного внутреннего давления газов p_0 , S_u и S_σ – участки поверхности, на которых заданы кинематические и динамические граничные условия. Область над поверхностью жидкости не именуется, поскольку динамика газов, создающих избыточное статическое давление, в рассматриваемом низкочастотном диапазоне не учитывается. Границу жидкой массы составляют свободная поверхность Σ и контактная поверхность S_0 . Введены вектор \vec{u} и \vec{U} смещения точек упругого тела и жидкости, \vec{G} – вектор ускорения гравитационных сил, \vec{n}_0 – вектор нормали к поверхности S_0 . Перемещения точек упругого тела описываются векторным полем $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x})$, определенным в области Q , а перемещения частиц жидкости описываются полем $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x})$ в области Q_0 .

Движение жидкости в полостях конструкции описывается при помощи потенциалов смещений Φ .

$$\begin{aligned} \vec{G} &= -G\vec{n}_0 \quad \text{на } \Sigma, & \vec{U} &= \nabla\Phi \quad \text{в } Q_0, \\ \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= (\vec{u}, \vec{n}_0) \quad \text{на } S_0, & \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= \eta \quad \text{на } \Sigma, \\ \Delta\Phi &= 0 \quad \text{в } Q_0, & \ddot{\Phi} + G\eta &= 0 \quad \text{на } \Sigma, \end{aligned} \quad (1)$$

где η – нормальные смещения точек свободной поверхности, $G = |\vec{G}|$.

Давление в жидкости определяется как сумма гидростатической составляющей P_0 и малой вариации p :

$$P = P_0 + p, \quad P_0 = p_0 + \rho_0 (\vec{\mathbf{G}} \cdot \vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_0) = p_0 + P_g, \quad (2)$$

где $\vec{\mathbf{x}}_0$ – произвольная точка свободной поверхности жидкости, ρ_0 – плотность жидкости, p_0 – статическое давление газов над поверхностью жидкости, а P_g – составляющая, связанная с весом жидкости в гравитационном поле и пропорциональная глубине.

Физическое уравнение материала упругого тела полагаем линейным и запишем в виде:

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon, \quad (3)$$

где σ – вектор компонент тензора напряжений, ε – вектор компонент тензора деформаций, а \mathbf{D} – матрица модулей упругости, вид которой зависит от упругих свойств материала тела.

При статическом деформированном состоянии нелинейное геометрическое соотношение записывается в виде:

$$\varepsilon(\vec{\mathbf{u}}) = \varepsilon^L(\vec{\mathbf{u}}) + \varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}), \quad (4)$$

где $\varepsilon^L(\vec{\mathbf{u}})$ – линейный дифференциальный оператор, $\varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}})$ – билинейный симметричный дифференциальный оператор, а компоненты деформаций представлены векторами-столбцами.

Полное перемещение материальных точек упругого тела запишем в виде суммы статической и динамической составляющих следующим образом:

$$\mathbf{u}^{полн.}(t) = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}(t). \quad (5)$$

Подставляя сумму малой динамической составляющей и (вообще говоря, не малой) статической составляющей (5) в уравнение (4), можно с учетом свойств обозначенных выше дифференциальных операторов переписать (4) в виде:

$$\varepsilon(\vec{\mathbf{u}}_0 + \vec{\mathbf{u}}) = \varepsilon^L(\vec{\mathbf{u}}_0) + \varepsilon^L(\vec{\mathbf{u}}) + \varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}_0) + 2\varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}) + \varepsilon^{NL}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{u}}). \quad (6)$$

Выражение для потенциальной энергии деформации имеет вид:

$$V = \frac{1}{2} \int_Q \varepsilon(\vec{\mathbf{u}})^T \mathbf{D}\varepsilon(\vec{\mathbf{u}}) dV, \quad (7)$$

где Q – область пространства, занятая упругим телом, которое в данной работе является упругой оболочкой.

Подставляя (5) полная потенциальная энергия деформации элемента равна

$$V_Q^{полн.} = \frac{1}{2} \int_Q \varepsilon(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u})^T \mathbf{D}\varepsilon(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}) dV. \quad (8)$$

Полагая статическую составляющую поля перемещений заданной

(предварительно вычисленной), после подстановки (6) в (8) и раскрытия всех скобок с целью формулирования задачи о собственных формах колебаний (около этой статической компоненты) оставляем в выражении (8) только члены второго порядка, зависящие от времени. В результате получается формула для потенциальной энергии колебаний упругого тела:

$$V_Q = \frac{1}{2} \int_Q \left\{ \left[\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) + 2\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{u}}) \right]^T D \left[\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}) + 2\varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{u}}) \right] + 2 \left[\varepsilon^L(\bar{\mathbf{u}}_0) + \varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}_0, \bar{\mathbf{u}}_0) \right]^T D \varepsilon^{NL}(\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}) \right\} dV \quad (9)$$

Потенциальная энергия колебаний гидроупругой системы состоит из нескольких компонентов и записывается в виде:

$$V = V_Q + V_\Sigma + V_G + V_P, \quad (10)$$

где V_Q – потенциальная энергия деформации упругого тела, V_Σ – потенциальная энергия колебаний свободной поверхности жидкости, V_G – потенциал сил контактного взаимодействия тела с жидкостью, нагруженной гравитационными силами, V_P – потенциал сил, обусловленных избыточным давлением газа (если оно имеет место).

$$V_\Sigma = \frac{1}{2} \int_\Sigma \rho_0 G \eta^2 dS, \quad (11)$$

$$V_G = -\frac{1}{2} \int_{S_0} \left\{ P_g \left(\bar{\mathbf{u}} \cdot \left[\bar{\mathbf{r}}_\alpha \times \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \beta} - \bar{\mathbf{r}}_\beta \times \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} \right] \right) + \rho_0 (\bar{\mathbf{G}}, \bar{\mathbf{u}}) (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{r}}_\alpha \times \bar{\mathbf{r}}_\beta) \right\} d\alpha d\beta, \quad (12)$$

$$V_P = -\frac{1}{2} \int_{S_0 \cup S_p} p_0 \left(\bar{\mathbf{u}} \cdot \left[\bar{\mathbf{r}}_\alpha \times \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \beta} - \bar{\mathbf{r}}_\beta \times \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial \alpha} \right] \right) d\alpha d\beta, \quad (13)$$

где α и β – координаты на контактной поверхности (не обязательно ортогональные), $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}(\alpha, \beta)$ – радиус-вектор точки на поверхности и касательные к координатным линиям векторы $\bar{\mathbf{r}}_\alpha = \partial \bar{\mathbf{r}} / \partial \alpha$, $\bar{\mathbf{r}}_\beta = \partial \bar{\mathbf{r}} / \partial \beta$. Здесь гидростатическое давление на смоченную поверхность $P_g = \rho_0 (\bar{\mathbf{G}}, \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{x}}_0)$, где $\bar{\mathbf{x}}_0$ – произвольная точка свободной поверхности жидкости.

Кинетическая энергия гидроупругой системы равна:

$$T = \frac{1}{2} \int_Q \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}}^2 dV + \frac{1}{2} \int_{Q_0} \rho_0 (\bar{\nabla} \dot{\Phi})^2 dV. \quad (14)$$

Для формулировки смешанного вариационного принципа, обеспечивающего выполнение кинематических условий на контактной и свободной поверхностях жидкости, это выражение преобразуется к виду:

$$T^* = \frac{1}{2} \int_Q \rho \dot{\bar{\mathbf{u}}}^2 dV - \frac{1}{2} \int_{Q_0} \rho_0 (\bar{\nabla} \dot{\Phi})^2 dV + \int_{S_0} \rho_0 \dot{\Phi} (\dot{\bar{\mathbf{u}}} \cdot \bar{\mathbf{n}}_0) dS + \int_\Sigma \rho_0 \dot{\Phi} \dot{\eta} dS. \quad (15)$$

Функционал Лагранжа $L = T - V$ переписывается с модифицированной

формулой (15) в виде

$$L^* = T^* - V. \quad (16)$$

В разделе 2.2 рассматривается упругая тонкостенная конструкция, для описания поведения которой можно использовать уравнения теории упругих оболочек. Разложение параметров колебаний в ряд Фурье по окружной координате β позволяет разбить спектр собственных частот системы на совокупность подспектров, каждый из которых соответствует определенному числу волн по окружности в собственной форме.

Предположение о тонкостенности упругих компонентов конструкции позволяет применить к описанию их поведения гипотез теории тонких оболочек. Следствием этого оказывается необходимость геометрического совмещения поверхности контакта жидкости и упругой конструкции с частью срединной поверхности соответствующей тонкой оболочки.

Для возможности учета влияния статического напряженно-деформированного состояния оболочек на спектральные характеристики конструкции используются нелинейные геометрические соотношения в виде

$$\begin{aligned} E_\alpha &= \varepsilon_\alpha + \frac{1}{2}\theta_\alpha^2, \quad E_\beta = \varepsilon_\beta + \frac{1}{2}\theta_\beta^2, \quad E_{\alpha\beta} = \Omega_\alpha + \Omega_\beta + \theta_\alpha\theta_\beta, \\ K_\alpha &= -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \alpha}, \quad K_\beta = -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \beta} - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \theta_\alpha, \\ K_{\alpha\beta} &= \tau_\alpha + \frac{1}{R_\alpha} \Omega_\beta = \tau_\beta + \frac{1}{R_\beta} \Omega_\alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\alpha}, \quad \varepsilon_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} u + \frac{w}{R_\beta}, \\ \Omega_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial v}{\partial \alpha}, \quad \Omega_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} v, \\ \theta_\alpha &= \frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{u}{R_\alpha}, \quad \theta_\beta = \frac{1}{A_\beta} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{v}{R_\beta}, \\ \tau_\alpha &= -\frac{1}{A_\alpha} \frac{\partial \theta_\beta}{\partial \alpha}, \quad \tau_\beta = -\frac{1}{A_\beta} \frac{\partial \theta_\alpha}{\partial \beta} + \frac{1}{A_\alpha A_\beta} \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} \theta_\beta. \end{aligned} \quad (17a)$$

Здесь обозначено:

E_α , E_β , $E_{\alpha\beta}$ – параметры, характеризующие удлинения и сдвиг срединной поверхности,

K_α , K_β , $K_{\alpha\beta}$ – параметры, характеризующие изменение кривизны и кручение срединной поверхности.

В разделе 2.3 рассматривается схема конечно-элементного моделирования колебаний описанных систем с учетом влияния начального статического напряженно-деформированного состояния, обусловленного присутствием статических компонент нагрузок. В соответствии с основными принципами метода конечных элементов, малые динамические перемещения аппроксимируются на конечном элементе с помощью формулы:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta}, \quad (18)$$

где $\boldsymbol{\delta}$ – вектор-столбец дискретных узловых параметров элемента, а $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ – матрица функций формы, которую можно представить в виде совокупности столбцов (k – размерность вектора $\boldsymbol{\delta}$):

$$\mathbf{N}(\mathbf{r}) = [\mathbf{n}_1(\mathbf{r}) \quad \dots \quad \mathbf{n}_k(\mathbf{r})]. \quad (19)$$

С помощью вектора-столбца узловых параметров конечного элемента $\boldsymbol{\delta}$ выражение для потенциальной энергии малых колебаний можно записать в матричном виде:

$$V_e = \frac{1}{2}\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}_e \boldsymbol{\delta}, \quad T_e^* = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{M}_e \dot{\boldsymbol{\delta}}, \quad (20)$$

где \mathbf{M}_e – матрица масс конечного элемента, \mathbf{K}_e – матрица жесткостей конечного элемента, вычисляемая по формуле:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} [\mathbf{B}(\mathbf{x})^T \mathbf{D} \mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{S}(\mathbf{x})] dV, \quad (21)$$

в которой $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ получается из первого слагаемого подинтегрального выражения в формуле (9):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}) = [\boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{n}_1) + 2\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{u}_0, \mathbf{n}_1) \quad \dots \quad \boldsymbol{\varepsilon}^L(\mathbf{n}_k) + 2\boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{u}_0, \mathbf{n}_k)] \boldsymbol{\delta} = \mathbf{B}(\mathbf{x})\boldsymbol{\delta} \quad (22)$$

а компоненты матрицы $\mathbf{S}(\mathbf{r})$ получены из второго слагаемого там же:

$$s_{ij}(\mathbf{x}) = 2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_0)^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{NL}(\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j). \quad (23)$$

В приведенных выше формулах статическая составляющая перемещений $\mathbf{u}_0(\mathbf{r})$ вычисляется на элементе через полученные заранее узловые параметры статической деформации элемента $\boldsymbol{\delta}_0$ по формуле, аналогичной (18).

После объединения матриц отдельных элементов получаем задачу определения собственных частот и форм колебаний конструкции с матрицей масс \mathbf{M} и матрицей жесткостей \mathbf{K} в виде:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\boldsymbol{\delta} = 0, \quad (24)$$

решения которой образуют последовательность собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots,$$

и соответствующих им собственных векторов

$$\{\boldsymbol{\delta}_1\}, \{\boldsymbol{\delta}_2\}, \{\boldsymbol{\delta}_3\}, \dots$$

Положительные собственные значения соответствуют квадратам угловых собственных частот:

$$\lambda_k = \omega_k^2 .$$

Угловая собственная частота ω определяется как корень квадратный из λ , и тогда справедлива формула

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \boldsymbol{\delta} = 0 , \quad (25)$$

а собственная частота колебаний в Гц f_k определяется из формулы

$$\omega_k = 2\pi f_k . \quad (26)$$

Изменение матрицы жесткостей при учете статического напряженно-деформированного состояния конструкции может привести к тому, что один или несколько членов последовательности λ_k станут отрицательными. В таком случае статическое состояние конструкции оказывается неустойчивым, и каждый из векторов $\boldsymbol{\delta}_k$ представляет одну из возможных форм потери устойчивости.

В разделе 2.4 рассматривается программа расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, реализованная в табличном процессоре Excel. Программа написана на алгоритмическом языке Visual Basic for Applications (VBA), и ее возможности дополняются средствами процессора Excel, облегчающими обработку численных результатов. Здесь же приведено краткое описание принципов ее построения и структуры исходных данных для проведения расчетов.

В разделе 2.5 рассматриваются примеры расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей, и сопоставление с известными результатами.

В третьей главе приводится методика исследования статической устойчивости осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объемами несжимаемой жидкости, при действии гравитационного поля и осесимметричных силовых факторов.

На рис. 2 показана структура VBA-проекта, в котором добавлена экранная форма «frmStability», с помощью которой частично автоматизируется перебор значений числа волн по окружности m .

В главную экранную форму (рис. 3) добавлена командная кнопка «Исследование статической

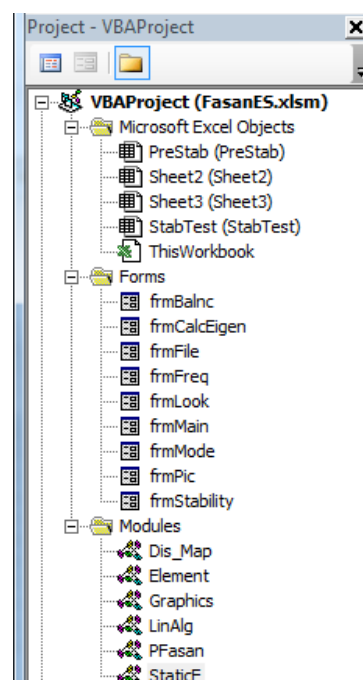


Рисунок 2 – Проект файла-шаблона

устойчивости», которая активирует экранную форму «frmStability». Предварительно средствами, представленными на главной форме, можно оценить частотные диапазоны, характерные для спектров исследуемой конструкции, но можно и сразу после загрузки исходных данных перейти к исследованию статической устойчивости. На рис. 3 также показан пример задания данных для вычисления собственных частот колебаний конструкции в заданном диапазоне чисел волн по окружности в собственных формах m .

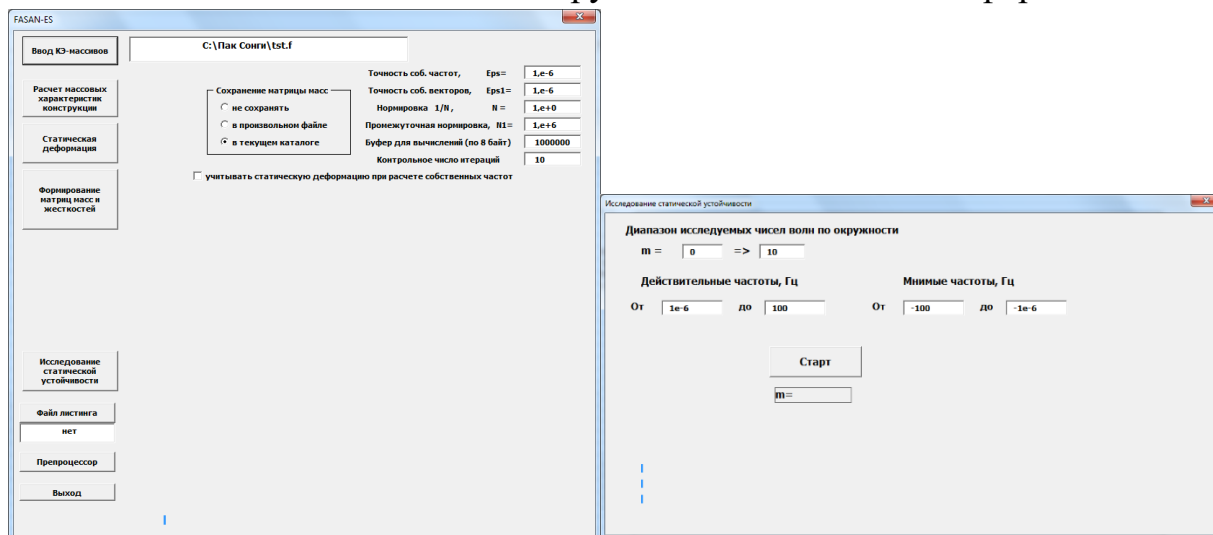


Рисунок 3 – Главное окно проекта и экранная форма для исследования статической устойчивости в файле FasanES.xlsm

Описанную выше частично автоматизированную технологию можно пояснить на примере цилиндрической алюминиевой стенки, отделяющей центральную часть круглого бассейна от воды, заполняющей его внешнюю сторону (рис. 4а).

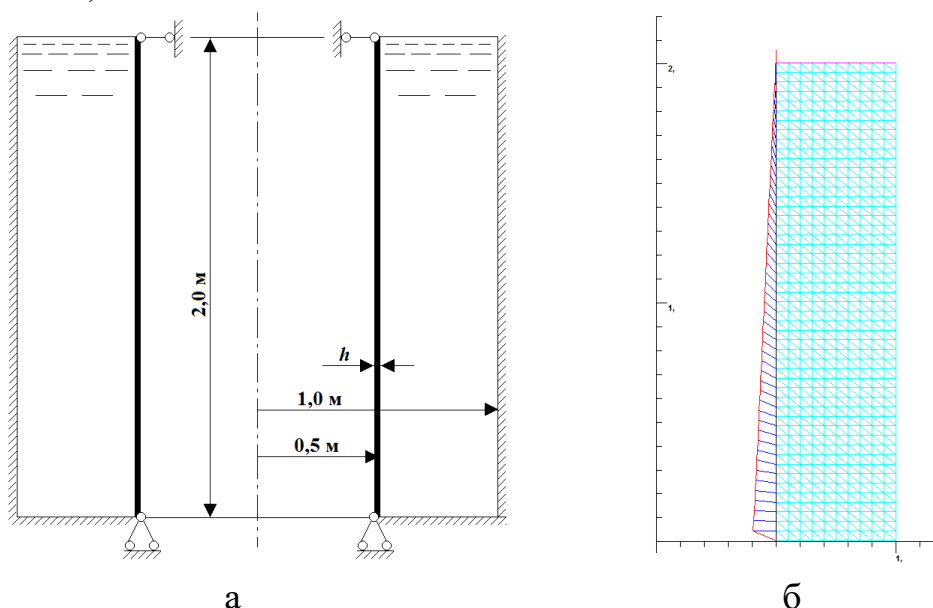


Рисунок 4 – Сечение цилиндрической алюминиевой стенки (а) и конечно-элементная модель с графическим изображением статической деформации (б)

Внешняя стенка и дно бассейна абсолютно жесткие. Нижний край стенки закреплен шарнирно, а верхний шарнирно оперт с подвижностью в осевом направлении. Конструкция находится под действием гравитационного поля Земли с ускорением свободного падения $G = 9,80665 \text{ м/с}^2$. Варьируемый параметр – толщина стенки h , модуль Юнга материала $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, плотность $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$. Задача состоит в определении критической величины толщины $h_{\text{крит}}$, при которой не происходит статическая потеря устойчивости.

Для решения поставленной задачи сформирована конечно-элементная модель, показанная на рис. 4б. Там же показана конфигурация статической деформации (в увеличенном масштабе), вычисленной при заданной толщине стенки $h = 1,5 \text{ мм}$.

Применение представленного на рис. 3 инструмента привело к появлению на рабочем листе показанной на рис. 5 совокупности заполненных ячеек, содержащих значения собственных частот (записи «no Imag» свидетельствуют об отсутствии отрицательных собственных значений) для собственных форм с числом волн по окружности в диапазоне от 0 до 10.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	68,05643	54,53286	34,21335	22,03792	14,49674	9,0908	5,130356	5,069294	9,41714	15,74614	23,8214
3	no Imag	no Imag	89,16817	62,10035	45,18329	34,05258	26,62253	22,51602	22,47214	26,55045	33,56706
4			no Imag	no Imag	84,33653	66,22616	53,49302	44,78402	39,82153	38,99281	42,55541
5					no Imag	no Imag	85,41187	72,29382	63,24912	58,19741	57,40647
6							no Imag	no Imag	90,73779	82,10442	77,637
7									no Imag	no Imag	no Imag
8											

Рисунок 5 – Собственные частоты, вычисленные при $h = 1,5 \text{ мм}$

Удалив не представляющие интереса высшие собственные частоты, получаем две строки и график (рис. 6), из которого видна зависимость $f_{\min}(m)$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	68,05643	54,53286	34,21335	22,03792	14,49674	9,0908	5,130356	5,069294	9,41714	15,74614	23,8214
3											

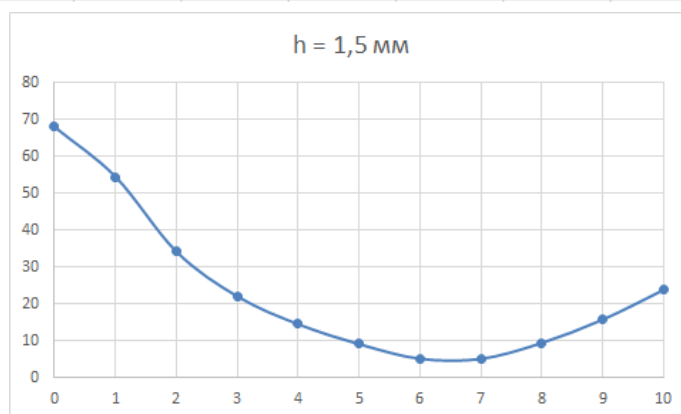


Рисунок 6 – Зависимость $f_{\min}(m)$ при $h = 1,5 \text{ мм}$

Аналогично в интервале толщины [1,3 ; 1,5] мм, для большей наглядности полученных результатов выполнено тестирование собственных частот для $h = 1,4575$ мм и, построен график, представленный на рис. 7.

1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
2	67,08367	53,76404	33,73228	21,71308	14,21163	8,632685	3,609009	0,327271	6,339019	12,71331	20,56292	$h = 1,4575$ mm
3	63,34929	50,80875	31,88161	20,46353	13,12164	6,80756	-5,60795	-9,19453	-10,9483	-11,0657	-7,2248	$h = 1,3$ mm
4	68,05643	54,53286	34,21335	22,03792	14,49674	9,0908	5,130356	5,069294	9,41714	15,74614	23,8214	$h = 1,5$ mm

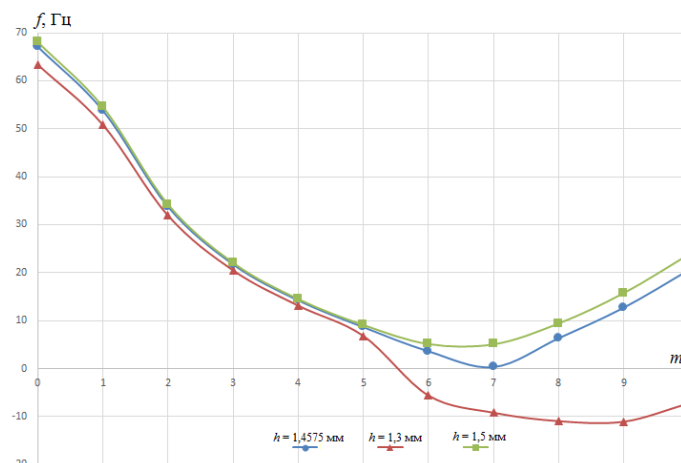


Рисунок 7 – Зависимости $f_{\min}(m)$.

При построении графика в этом случае задействована отрицательная полуплоскость для представления величин, условно обозначенных как мнимые частоты, равные $f_1(m) = -\sqrt{|\lambda_1(m)|}/2\pi$ в случае $\lambda_1(m) < 0$.

Таким образом, в данном разделе показана эффективность предложенного средства автоматизации операций по исследованию минимальных собственных значений при построении областей статической устойчивости осесимметричных тонкостенных конструкций.

В разделе 3.3 представлены примеры исследования статической устойчивости осесимметричных конструкций, взаимодействующих с ограниченными объемами жидкостей. Рассматриваются соосная оболочка с жидкостью под давлением, тороидальная оболочка, заполненная жидкостью, с давлением и сосредоточенной массой, многофакторное исследование тороколевой оболочки с жидкостью и исследование глубоководного хранилища жидкости для работы технологических установок.

В четвертой главе приводится методика исследования динамической устойчивости гармонических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, контактирующих с объемами несжимаемой жидкости, возбуждаемых продольным периодическим воздействием.

В разделе 4.1 выведены уравнения в нормальных координатах, описывающие нелинейные колебания осесимметричных тонкостенных конструкций с жидкостью.

В результате разложения движения конструкции в ряд по ее собственным

формам U_s (осесимметричным и неосесимметричным) в виде:

$$U = \sum_{s=1}^{\infty} q_s(t) U_s, \quad (27)$$

получаются уравнения в нормальных координатах, которые с учетом диссипации энергии имеют вид:

$$\mu_p (\ddot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + \sum_{q,r} a_{pqr} q_q q_r + \sum_{q,r,s} b_{pqrs} q_q q_r q_s = f_p(t). \quad (28)$$

Динамические характеристики конструкции вычисляются на основе линеаризованной постановки задачи, когда система уравнений распадается на не связанные между собой подсистемы для гармоник разложения искомым функций (совокупность которых составляет вектор U_s) в ряд Фурье по окружной координате β , соответствующие различным числам волн по окружности m . При этом трехмерная задача сводится к двумерной и обеспечивается явная зависимость любой собственной формы U_s от окружной координаты в виде:

$$\left. \begin{aligned} u_s &= \tilde{u}_s(\alpha) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}), \quad v_s = \tilde{v}_s(\alpha) \sin(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}), \quad w_s = \tilde{w}_s(\alpha) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}), \\ \Phi_s^{(k)} &= \tilde{\Phi}_s^{(k)}(r, z) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \\ \eta_s^{(k)} &= \tilde{\eta}_s^{(k)}(r, z) \cos(m_s \beta - i_s \frac{\pi}{2}) \end{aligned} \right\} k = 1, \dots, N_c, \quad (29)$$

где $m_s = 0, 1, 2 \dots$ - число волн по окружности, $i_s = 0$ или 1 - определяет сдвиг по окружности для $m_s > 0$, а для $m_s = 0$ идентифицирует продольно-радиальные и крутильные формы колебаний.

Уравнения (28) связаны между собой посредством квадратичных и кубических членов. Структура связей между колебаниями с различным числом волн по окружности (удержанными в системе (28)) определяется следующими условиями.

Коэффициент $a_{pqr} \neq 0$, если выполнены два условия:

$$1) i_p + i_q + i_r = 0(\text{mod } 2), \quad (30)$$

2) одно из трех равенств, получаемых перестановкой индексов:

$$m_p = m_q + m_r \quad (p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow p), \quad (31)$$

Коэффициент $b_{pqrs} \neq 0$, если выполнены два условия:

$$1) i_p + i_q + i_r + i_s = 0(\text{mod } 2), \quad (32)$$

2) одно из семи равенств, получаемых перестановкой индексов:

$$\begin{aligned} m_p &= m_q + m_r + m_s \quad (p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow p), \\ m_p + m_q &= m_r + m_s \quad (q \rightarrow r \rightarrow s \rightarrow q), \end{aligned} \quad (33)$$

Из структуры нелинейных связей уравнений (28) следует, что при действии

на конструкцию осесимметричной продольной силы и при нулевых начальных условиях не должны возбуждаться неосесимметричные формы колебаний. Однако наличие этих связей может привести к неустойчивости нулевых решений для неосесимметричных форм колебаний, в результате чего может наблюдаться неограниченный рост их амплитуд.

Исследование системы в вариациях, построенной для невозмущенного осесимметричного отклика, позволяет выявить условия параметрического возбуждения неосесимметричных форм. Если из учтенных в разложении (27) собственных N форм первые K осесимметричные, то эта система имеет вид:

$$\mu_p (\delta \ddot{q}_p + \varepsilon_p \delta \dot{q}_p + \omega_p^2 \delta q_p) + \sum_{q=1}^K C_{pq}(t) \delta q_q = 0, \quad p = 1, \dots, K, \quad (34)$$

$$\mu_p (\delta \ddot{q}_p + \varepsilon_p \delta \dot{q}_p + \omega_p^2 \delta q_p) + \sum_{q=K+1}^N C_{pq}(t) \delta q_q = 0, \quad p = K+1, \dots, N, \quad (35)$$

Если для неосесимметричных форм $m_p \neq m_q$ или $i_p \neq i_q$, то на основании структуры нелинейных связей (30) - (33) получается, что $C_{pq}(t) = 0$. Это означает, что система (35) распадается на не связанные между собой подсистемы, соответствующие различным значениям m и i . Поэтому для каждой пары (m, i) условия параметрического возбуждения можно исследовать отдельно.

В частном случае, когда учитывается одна неосесимметричная форма колебаний, т.е. $N = K + 1$, можно исследовать положение нижней границы области ее параметрического возбуждения в окрестности главного параметрического резонанса ($\omega \approx 2\omega_N$) при помощи метода гармонического баланса. Тогда в предположении малости амплитуд осесимметричных колебаний и гармоническом виде осесимметричного воздействия систему (28) можно переписать в виде

$$\mu_p (\ddot{q}_p + \varepsilon_p \dot{q}_p + \omega_p^2 q_p) + a_{pNN} q_N^2 = F_p P_0 \cos \omega t \quad (p = 1, \dots, N-1), \quad (36)$$

$$\mu_N (\ddot{q}_N + \varepsilon_N \dot{q}_N + \omega_N^2 q_N) + q_N \left(2 \sum_{q=1}^{N-1} a_{pNN} q_q \right) + b_{NNNN} q_N^3 = 0. \quad (37)$$

В соответствии с методом гармонического баланса, полагаем в первом приближении, что

$$q_N = a \sin \frac{\omega t}{2} + b \cos \frac{\omega t}{2}. \quad (38)$$

а также

$$q_p = a_p \sin \omega t + b_p \cos \omega t + c_p. \quad (39)$$

После подстановки (38) и (39) в (37) и (36) и ряда преобразований получается выражение для границы области параметрического возбуждения в виде:

$$P_0(\omega) = \pm \mu_N \sqrt{\frac{\eta^2 + \varepsilon_N^2 \frac{\omega^2}{4}}{F_0^2(\omega) + F_1^2(\omega)}}, \quad (40)$$

где $\eta = \omega_N^2 - \frac{\omega^2}{4}$,

$$F_0(\omega) = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} (\omega_p^2 - \omega^2)}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]}, \quad F_1(\omega) = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{F_p a_{pNN} \varepsilon_p \omega}{\mu_p [(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + (\varepsilon_p \omega)^2]}.$$

В случае колебаний закрепленной на жестком основании конструкции, возбуждаемой периодическим продольным смещением этого основания с амплитудой W_0 , в приведенных выше формулах достаточно заменить:

$$P_0 \Rightarrow W_0, \quad F_p \Rightarrow \omega^2 \mu_{0p} \quad (p = 1, \dots, N-1),$$

где μ_{0p} вычисляется в программе расчета динамических характеристик как нормирующий множитель для осесимметричной собственной формы к единичному смещению эквивалентного осциллятора.

В качестве примеров рассматриваются динамическая устойчивость осесимметричных колебаний тонкостенного цилиндра с плоским дном и динамическая устойчивость осесимметричных колебаний тонкостенного цилиндра с полусферическим дном.

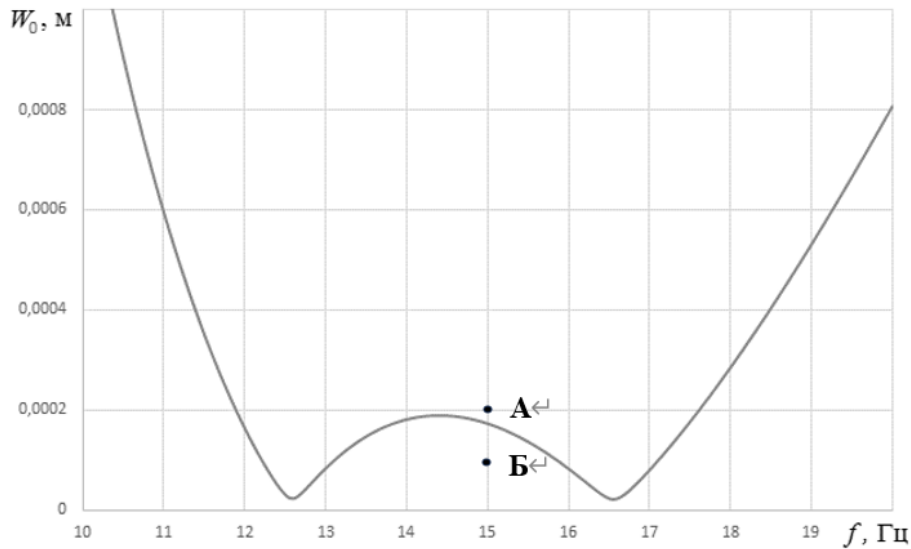


Рисунок 8 – Нижняя граница области неустойчивости

На рис. 8 показана граница области параметрического возбуждения неосесимметричных колебаний для тонкостенного цилиндра с полусферическим дном, вычисленная методом гармонического баланса с учетом трех низших осесимметричных тонов и одного неосесимметричного тона с числом волн по окружности $m = 4$. Осесимметричное воздействие осуществляется посредством вертикальных вибраций основания конструкции с амплитудой W_0 и частотой $f \approx 2f_N$ в окрестности главного параметрического резонанса ($f_N = 6,29$ Гц) и первого

тона осесимметричных колебаний ($f_l = 16,56$ Гц). В расчетах учитывалось демпфирование всех тонов, соответствующее логарифмическому декременту 0,05.

В разделе 4.3 приведены исследования процесса динамической потери устойчивости вынужденных гармонических осесимметричных колебаний методом численного интегрирования системы уравнений (36), (37). Исследование проведено на примере рассмотренного в предыдущем разделе тонкостенного цилиндра с полусферическим днищем.

Для пробных расчетов переходных процессов выбраны две точки А и Б на графике (рис. 8), лежащие соответственно внутри области параметрического возбуждения и ниже ее границы для частоты 15 Гц.

Начальные условия для осесимметричных тонов заданы нулевые, а для обобщенной координаты $q_4(0)$ задано малое начальное возмущение, поскольку без него неосесимметричные колебания принципиально не возникают.

На рис. 9 и 10 показаны результаты расчета при амплитуде гармонического воздействия, что согласно рис. 8 лежит в области неустойчивости (точка А на рис. 8) и устойчивости (точка Б на рис. 8).

В первом случае наблюдается интенсивное возрастание амплитуды колебаний неосесимметричного тона, а во втором малая начальная амплитуда не возрастает и даже заметно ее уменьшение.

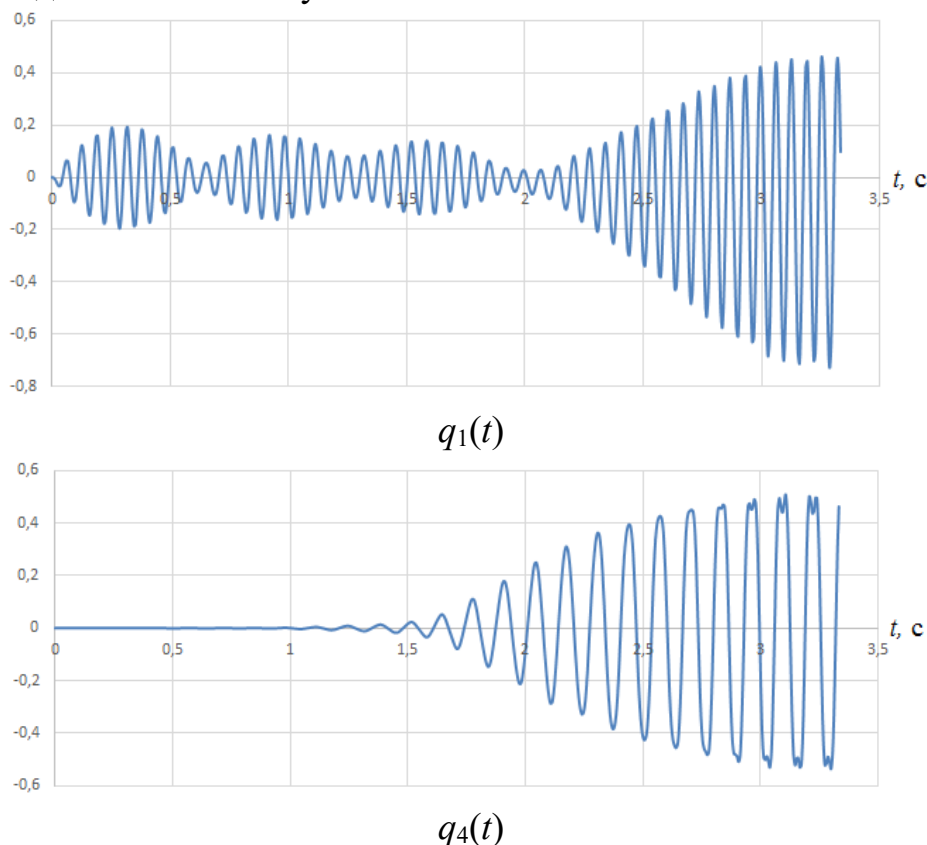


Рисунок 9 – Амплитуда гармонического воздействия 0,0002 м

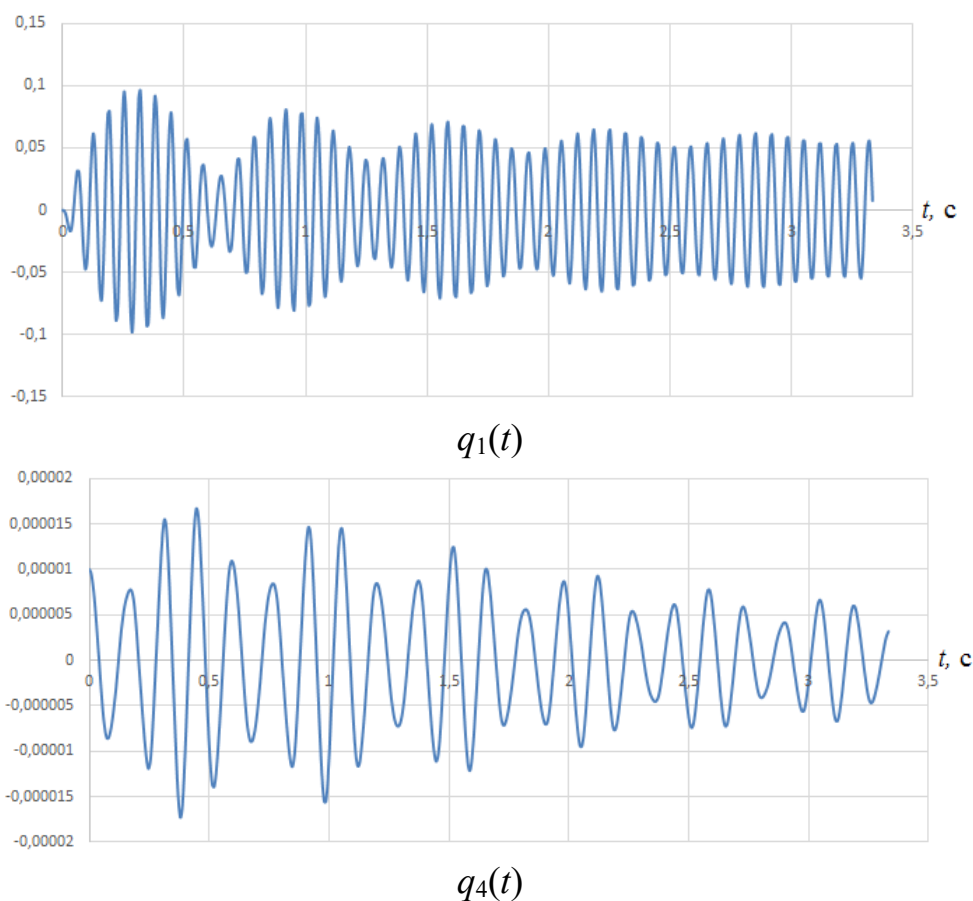


Рисунок 10 – Амплитуда гармонического воздействия 0,0001 м

Заметное визуальное отличие получаемых графиков может служить критерием для локализации и уточнения нижней границы области параметрического возбуждения. Провести подобное исследование несложно благодаря высокой скорости вычислений в современных компьютерах. Предложенный метод имеет важное преимущество по сравнению с методом гармонического баланса, который дает удовлетворительные результаты только в зоне основного параметрического резонанса.

При исследовании диапазона частот ниже основного параметрического резонанса могут быть получены пики резонансов более высокого порядка вблизи частот $2f_N/p$, где $p = 2, 3, \dots$ обозначает порядок параметрического резонанса. В соответствии с этим основной параметрический резонанс есть резонанс первого порядка. Исследование методом численного интегрирования диапазона частот от 2 Гц до 10 Гц позволило выявить пики границ областей параметрических резонансов 2-го, 3-го и 4-го порядков, что показано на рис. 11.

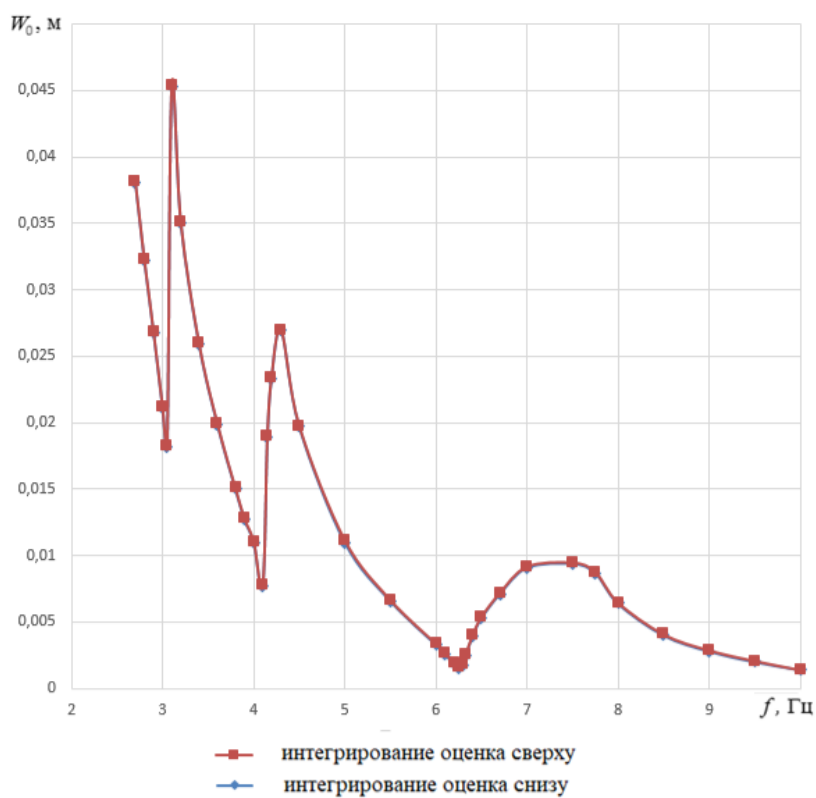


Рисунок 11 – Границы областей параметрических резонансов 2-го, 3-го и 4-го порядков

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Разработана на основе динамического подхода математическая модель и методика исследования статической устойчивости упругой тонкостенной осесимметричной конструкции, полости которой могут быть частично заполнены идеальной несжимаемой жидкостью (либо конструкция взаимодействует с ограниченным осесимметричным объемом жидкости). Методика основана на пространственном Фурье-анализе спектра нагруженной конструкции, что обеспечивает более высокую точность по сравнению с 3-мерным конечно-элементным моделированием осесимметричной оболочки. Обеспечивается также возможность многофакторного анализа с построением границ областей устойчивости в одно-, двух- и трехмерных пространствах параметров.

2. Представлены результаты исследования устойчивости для ряда примеров. Получены области статической устойчивости конструкций при действии внутреннего, внешнего давления, сосредоточенных масс и гидростатического внешнего давления с использованием программы расчета динамических характеристик осесимметричных оболочечных конструкций, содержащих жидкость, основанной на методе конечных элементов. Показаны границы областей устойчивости, вычисленные в примерах.

3. Разработана методика исследования динамической устойчивости гармонических колебаний осесимметричных тонкостенных конструкций, содержащих несжимаемую жидкость, возбуждаемых продольным периодическим воздействием. Для построения областей неустойчивости использован метод гармонического баланса в сочетании с методом конечных элементов при расчете параметров нелинейных модальных уравнений колебаний конструкций.

4. Методом численного интегрирования исследованы переходные процессы колебаний системы как в области динамической неустойчивости параметров воздействия, так и вне ее. Показан параметрический характер неосесимметричных колебаний при осесимметричном воздействии. Получены границы областей параметрических резонансов как основного (1-го порядка), так и резонансов более высоких порядков.

5. Для обеспечения перечисленных выше исследований разработана версия программы расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных упругих конструкций, содержащих объемы идеальной несжимаемой жидкости, с использованием метода конечных элементов, реализованная в среде офисной программы Excel на языке программирования Visual Basic for Applications (VBA).

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ ПО ТЕМЕ ДИССЕРАЦИИ

1. Пак Сонги Исследование влияния инерционных сил и внутреннего давления на устойчивость тонкостенных осесимметричных конструкций, содержащих жидкости // Сборник тезисов работ международной молодежной научной конференции XLV Гагаринские чтения 2019. – М.: МАИ, 2019. – С. 570–570.
2. Пак Сонги, Григорьев В. Г. Разработка файла-шаблона в среде Excel для расчета динамических характеристик осесимметричных тонкостенных конструкций, содержащих жидкость // Сборник тезисов 18-й Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2019». 18-22 ноября 2019 года. Москва. Тезисы. – Типография «Логотип», 2019. – С. 201–202.
3. Park SongYi, Grigoriev V. G. The stability of thin-walled axial symmetric structures made up two coaxial shells containing liquid under the multifactor static loading // Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC 71, Connecting @ll Space People. Сер. "71st International Astronautical Congress, IAC 2020 - The CyberSpace Edition" Том 2020-October. 2020.
4. Григорьев В. Г., Пак Сонги Устойчивость тонкостенных осесимметричных конструкций в условиях многофакторного статического нагружения динамическим методом с использованием файла-шаблона в среде Excel //

Материалы XXVII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Т. 1. — М.: ООО «ТРП», 2021. — С. 88–89.

5. Пак Сонги, Григорьев В. Г. Устойчивость тонкостенных осесимметричных соосных конструкций, содержащих жидкость, при многофакторных нагрузках // Труды МАИ. — № 119. — 2021. — 18 с.

6. Park SongYi, Grigoriev V. G. A multivariate study of the stability of toroidal thin-walled structures containing liquid // Proceedings of the International Astronautical Congress, IAC, Сер. "IAF Materials and Structures Symposium 2021 - Held at the 72nd International Astronautical Congress, IAC 2021" Том C2. 2021.

7. Пак Сонги, Григорьев В. Г. Устойчивость тороцилиндрической оболочки с жидкостью при действии внутреннего давления // Сборник тезисов 20-й Международной конференции «Авиация и космонавтика». 22-26 ноября 2021 года. Москва. Тезисы. — М.: Издательство «Перо», 2021. — С. 450–451.

8. Пак Сонги, Григорьев В. Г. О динамической устойчивости осесимметричных оболочек с жидкостью в условиях статического нагружения // Сборник тезисов 20-й Международной конференции «Авиация и космонавтика». 22-26 ноября 2021 года. Москва. Тезисы. — М.: Издательство «Перо», 2021. — С. 451–452.

9. Пак Сонги, Григорьев В. Г. Моделирование динамической устойчивости тонкостенных конструкций, частично заполненных жидкостью, при гидростатическом воздействии // Математическое моделирование и численные методы, 2022, № 3, С. 3–17. doi: 10.18698/2309-3684-2022-3-317.