УДК 519.85; 517.988

Исследование относительной погрешности процедур случайного поиска в комбинаторной оптимизации одной структурной функции

В.В. Малыгин

Исследована относительная погрешность решения задачи синтеза структуры распределенной информационно-вычислительной системы методом случайного поиска. Представлен метод и аналитические зависимости расчета границ возможных значений структурной функции.

Использование процедур случайного поиска является эффективным средством исследования и решения одной из основных задач синтеза структуры распределенной информационно-вычислительной системы (вычислительной сети) – распределения ее вычислительного процесса по множеству объединенных сетью отдельных вычислительных машин.

Комбинаторный характер этой задачи выявляется в следующей ее формальной постановке. Пусть перед распределенной вычислительной системой, состоящей из N-узловой вычислительной сети, поставлена общая задача, которая в силу сложности не может быть решена ни на одной из ее отдельных узловых машин. Решение общей задачи предполагается провести после декомпозиции ее на m менее сложных частных задач (ЧЗ) путем распределения их по N узлам вычислительной сети, которое минимизировало бы удельную стоимость передаваемой в системе информации, при условии, что в каждом из узлов может решаться от одной до K =<округленно сверху до целого>=(m/N) частных задач. При этом вычислительная задача представлена информационным графом $\mathbf{\Gamma_F(F,T)}$, где **F** – множество частных задач, а **T** – множество информационных отношений между ними, записанное матрицей информационных потоков (МИП), совпадающей с матрицей инцидентности графа, метка связи в которой описывает количество передаваемой между ЧЗ информацией. Вычислительная сеть представлена графом сети $\mathbf{\Gamma_N}(\boldsymbol{N}, \mathbf{D})$, где ***N*** – множество сетевых вычислителей числом N, а ***D*** – удельная стоимость множества сетевых соединений «точка-точка» между N узлами вычислительной сети, записанного матрицей вычислительной сети (МВС), совпадающей с матрицей инцидентности графа, метка связи в которой описывает удельную стоимость информации, передаваемой между инцидентными вершинами. Качество искомой структуры системы, под которой понимается распределение ЧЗ по узлам сети R, оценивается структурной функцией (СФ) через сумму удельной стоимости всех информационных потоков в сети, объем которых определяется графом задачи, а стоимость – графом сети. Множество взаиморазличных распределений R и формирует комбинаторное пространство Z. Решением же задачи распределения является такое подпространство $z \subseteq Z$, все точки которого приводят некоторую структурную функцию в экстремум (минимум) [1].

Определим погрешность решения получаемой задачи простым случайным выбором любой точки $x \in Z$ путем соотнесения наихудшего (по значению СФ) из возможных выборов с наилучшим. Для этого необходимо иметь возможность определять границы возможного значения структурной функции.

Рассмотрим внутреннее строение структурной функции. Фактически ее значение складывается изо всех значений МИП (*t*-элементов), умноженных на расстояние между вычислительными узлами в Γ_N, вмещающими взаимодействующие ЧЗ (*d*-элементов). При этом состав слагаемых в сумме будет определяться – с одной стороны значениями *t*- и *d*- элементов и, с другой стороны, их сочетанием, что определяется типом используемого графа ВС. Например, алгебраическое строение СФ для случая построения ее при использовании в качестве начальных условий линейного графа сети, имеющего 2 одновалентные и N-2 двухвалентных вершин, можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
&(t_1 \cdot d_1 + \ldots + t_{2K} \cdot d_1) + (t_{2K+1} \cdot d_2 + \ldots + t_{2K+2K} \cdot d_2) + \ldots + (t_{2K(N-1)+1} \cdot d_N + \ldots + t_{2KN+1} \cdot d_N) + \\
&+ (t_{2KN+1} \cdot d_1 + \ldots + t_{2KN+N\cdot\frac{K(K-1)}{2}} \cdot d_1) + \\
&+ (t_{2KN+N\cdot\frac{K(K-1)}{2}+1} \cdot d_2 + \ldots + t_{2KN+N\cdot\frac{K(K-1)}{2}+K^2} \cdot d_2) + \\
&+ \ldots + \\
&+ (t_{\frac{m(m-1)}{2}-K^2} \cdot d_N + \ldots + t_{\frac{m(m-1)}{2}} \cdot d_N)
\end{aligned}$$

Процесс формирования выражения иллюстрируется ниже по тексту, а пример для случая построения структурной функции на КП, образованного при использовании графа задачи с m=8, линейного графа сети с N=3 и К=2 представлен на рисунке 1.

Все слагаемые в (1) для удобства обсуждения разбиты круглыми скобками на группы. Первые N групп отражают взаимодействие ЧЗ с входной и выходной информационными средами. 2К слагаемых первой группы являются затратами на передачу информации в частные задачи, находящиеся в узле ввода, из входной информационной среды и из частных задач, находящихся в узле вывода, в выходную информационную среду (очевидно, что d_1 в данном случае будет иметь нулевое значение). Следущие 2К слагаемых отражают затраты на передачу информации из входной информационной среды в частные задачи, находящиеся в соседнем узле от узла ввода, и из выходной информационной среды в частные задачи, находящиеся в соседнем узле от узла вывода (очевидно, что d_2 в данном случае будет иметь единичное значение), и т.д. Исключением здесь является последнее, «2KN+1»-ое слагаемое в N-ой группе – оно отражает транзитный трафик из узла ввода в узел вывода.

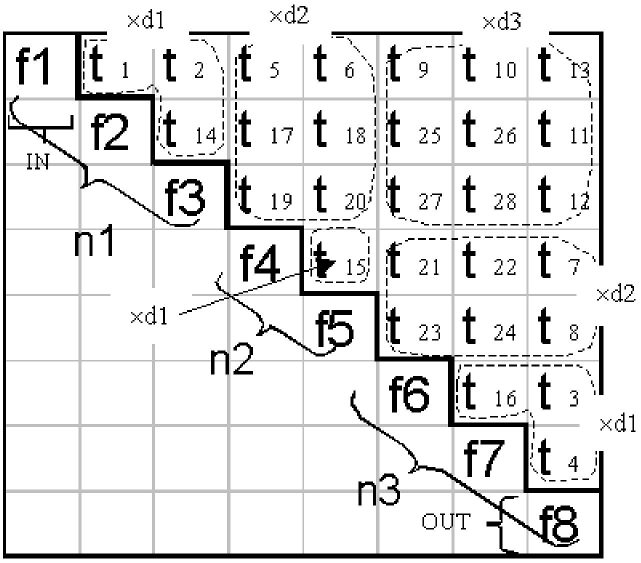

Рисунок 1. Матрица Информационных Потоков в построении структурной функции

Следующие NK(K-1)/2 слагаемых отражают замыкание информационных отношений внутри N узлов, содержащих К задач в каждом. Все последующие группы отражают вхождения в сумму K^2 отношений от взаимодействия по К частных задач каждого из взаимодействующих узлов.

Очевидно, что максимальное значение данная сумма примет, если наибольшие *t*-элементы войдут в состав аддитивных членов вместе с наибольшими *d*-элементами, и минимальное, если максимальные *t*-элементы окажутся в составе аддитивных членов с наименьшими *d*-элементами. Однако простое объединение соответствующих элементов вариационных рядов, построенных из *t* и *d* элементов, невозможна, так как не каждые максимальные *t*-элементы могут быть помещены в сумму с одним *d*-коэффициентом (например, в одной строке МИП в нее могут войти не более «К-1» членов – числа ЧЗ в узле ВС за исключением рассматриваемой). Выбор же комбинации допустимых *t* и *d*-элементов сводит задачу поиска границы СФ к начальной задаче поиска ее экстремума, что показывает всю сложность точного определения границ значений структурной функции.

Структурная функция (СФ) зависит от 3-х своих переменных, в качестве которых выступают граф задачи, граф сети и матрица конкретной комбинаторной точки. Максимальное и минимальное значение структурной функции полностью определяются ее двумя компонентами – графами сети и задачи. Сформируем функцию SFg(Γ_F, Γ_N), определяющую границы значения структурной функции. Областью определения SFg является пространство G прямого произведения элементов множеств всевозможных графов задачи $\{\Gamma_F\}$ и сети $\{\Gamma_N\}$ – $G=\{\Gamma_F\}\times\{\Gamma_N\}$, где пара ($\Gamma_F^i$, Γ_N^j) есть точка $g\in G$. Принимая во внимание крайне высокую сложность определения SFg для индивидуальной точки g, можно разбить пространство G на подмножества $G`|\ G=\cup G`_i$, в которых SFg *легко* определима и *несильно* различается по значению. Значение границы СФ в этом случае для каждой индивидуальной оптимизационной задаче $g\in G`$ может определяться приблизительно, с точностью разброса SFg на G`.

Неопределенность введенных выше терминов «легко» и «несильно» говорит о том, что разбиение такого рода может быть не единственно. В данной работе его *удалось* сделать на основании деления G по критерию новой характеристики графа задачи - плотности его МИП - $Q_{МИП}$, базу для чего заложила следующая теорема, определяющая свойства СФ.

Для каждого $\Gamma_F\in\{\Gamma_F\}'\subset\{\Gamma_F\}$, в котором $Q_{МИП}\{\Gamma_F\}'=const$, структурная функция (СФ), определенная на $G=\{\Gamma_F\}\times\{\Gamma_N\}$, достигает своего минимума (максимума), если строится на полном (линейном) $\Gamma_N\in\{\Gamma_N\}$, где граф полагается линейным, если две его вершины имеют степень 1, а все остальные 2.

Выделение из всего множества $\{\Gamma_N\}$ единственного $\Gamma_N\in\{\Gamma_N\}$ позволяет обеспечить простоту подсчета соответствующей SFg. Тогда как использование деления G по критерию $Q_{МИП}\{\Gamma_F\}'=const$ позволяет снизить ожидаемый разброс SFg на G` по сравнению с существующим на G.

Очевидно, что своего наименьшего значения структурная функция будет достигать при наименьшей плотности МИП. В этом случае граф задачи должен содержать (M-1) минимальных по объему (единичных) информационных отношений, в связи с чем плотность определяется как

$$Q_{МИП,MIN}=\frac{t_{МИН}}{t_{MAX}}\cdot\frac{M-1}{M\cdot(M-1)/2}=\langle t_{МИН}=1\rangle=\frac{2}{M\cdot t_{MAX}} \qquad (2)$$

Общий принцип процедуры определения SFg уже как функции от $Q_{МИП}$ состоит в следующем. С увеличением плотности МИП, т.е. при увеличении значений в МИП, будет происходить соответственное увеличение аддитивных составляющих структурной функции. При этом, в зависимости о того, при каких *d*-коэффициентах это будет происходить – меньших или больших, ожидаемый рост получаемой суммы (1) будет также соответственно меньше или больше. Так возрастание *t*-элементов от 0 до t_{max} в суммах с коэффициентом 0, затем 1 и т.д. до максимального (сценарий *минимального* роста) очевидно определит нижнюю границу структурной функции на промежутке $0\le Q_{МИП}\le 1$. Аналогичное увеличение t-элементов в суммах, начиная от максимального *d*-коэффициента до минимального (сценарий *максимального* роста), определит верхнюю границу структурной функции. При этом значения границ СФ в случае построения ее на линейном графе будут наибольшими, а в случае полного графа наименьшими.

На координатной плоскости <SF,$Q_{МИП}$> график зависимости границы СФ от плотности ее графа задачи $Г_F$ будет представлять собой кусочно-линейную неубывающую функцию. Так в интервалах, на которых плотность МИП меняется за счет изменения *t*-элементов в одной из групп сумм в (1), изменение границы SF на <SF,Q> будет соответствовать прямолинейной функции с наклоном, соответствующим *d*-коэффициенту в этой группе. Когда все t-элементы рассматриваемой суммы вырастут до максимально возможного значения T, отрабатываемый сценарий роста приведет к увеличению t-элементов следующей соответствующей суммы, что вызовет изменение наклона кривой границы СФ, в соответствии с новым значением *d*-коэффициента. Кусочно-линейный характер графика структурной функции позволяет определять ее форму через координаты точек «перелома» графика границы СФ (здесь и далее будем называть критическими точками). Критические точки области изменения СФ, обладающей наибольшими значениями границ и построенной на линейном графе сети, также как СФ с наименьшими границами, получаемыми при использовании полного графа сети, даются в Таблице 1.

Таблица 1

Нижняя граница СФ (полный граф сети)		
Крит. точка.	Плотность МИП	Значение структурной функции
1	$\frac{2}{MT_{MAX}}$	$N-1$
2	N – 1	$\frac{2}{M \cdot T} + \frac{NK(K-}{M(M}$
3	1	$T_{MAX} \cdot \left(K^2 \sum_{i=1}^{N-1}(N-i) + 2K(N-1)\right)$
Верхняя граница СФ (линейный граф сети)		
Крит. точка.	Плотность МИП	Значение структурной функции
1	1	$K^2 T_{MAX} \sum_{i=1}^{N-1} i(N-i) + 2KT_{MAX} \sum_{i=1}^{N-1}(N-i) + T_{MAX}(N$
2	$Q2 = 1 - \frac{NK(K-1)+4K}{M(M-1)}$	$K^2 T_{MAX} \sum_{i=1}^{N-1} i(N-i) + 2KT_{MAX} \sum_{i=1}^{N-1}(N-i) + T_{MAX}(N$
3…	$Q_j = Q_{j-1} - 2\frac{K^2(N-j)+2K}{M(M-1)}$	$SF_j = SF_{j-2} - T_{MAX}(K^2 \cdot j \cdot (N-j) + 2K \cdot j)$

(Даются координаты точек «перелома» нижней границы структурной функции СФ($Q_{МИП}$), аналогичные точки верхней границы получаются из них как зеркальное отражение относительно прямых, проходящих через точки ((0,0),(1,1)) и ((0,1)(1,0)), см. рисунок 2)

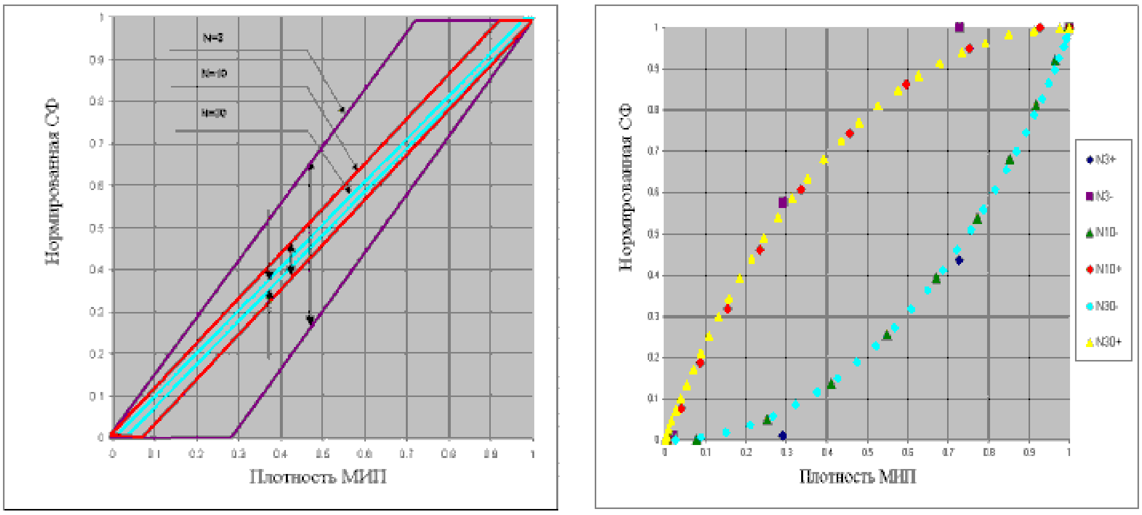

Рисунок 2. Расчет границ структурной функции и их изменение с ростом числа узлов ВС - N

Пример расчета границ возможных значений структурной функции, определяемой в распределенной системе с параметрами M=11, N=3, K=3, Tmax=10, линейном (А) и полносвязанном (Б) графах сети, приводится на рисунке 2, на котором также показаны и изменения этих границ с ростом размерности задающих СФ графов – графов сети и задачи.

Основываясь на данных результатах, можно провести расчет относительной погрешности определения точки экстремума СФ случайным выбором точки комбинаторного пространства ее определения – а именно отношения разницы между границами СФ на значение максимальной границы для фиксированных значений плотности МИП. Численные результаты этой оценки приводятся на рисунке 3, а их вид позволяет аппроксимировать ее нижнюю и верхнюю границу выражениями $(N\times Q_{МИП})^{-1}$ и $(1- Q_{МИП}^{2})$ соответственно (как видно из рисунка 3 соотношение $(N\times Q_{МИП})^{-1} \leq (1- Q_{МИП}^{2})$ становится справедливо для практически всей области вариации $Q_{МИП}$ при возрастании N до 10 и более.

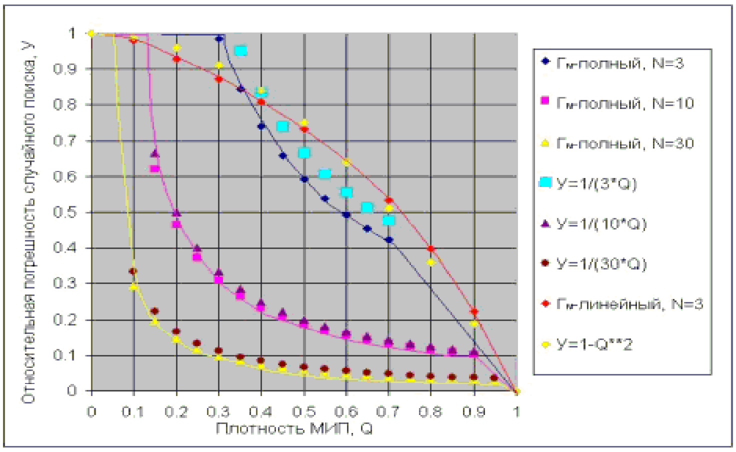

Рисунок 3. Расчет относительной погрешности случайного поиска на основе разницы границ возможных значений СФ

Принимая во внимание многочисленные исследования СФ, проводимых в рамках данной работы с применением полного перебора КП, показавшие стабильную закономерность близости распределения значений структурной функции к нормальному закону, максимум плотности которого приходится на среднее значение между минимумом и максимумом, максимум относительной погрешности δ случайного поиска при достаточно большом числе его повторения будет лежать в пределах:

$$(N \times Q_{МИП})^{-1} \leq 2\delta \leq (1 - Q_{МИП}^2) \qquad (3)$$

В заключение следует также отметить, что статистика проведенных численных экспериментов показала устойчивую тенденцию уменьшения погрешности δ до 5 раз относительно уровня, определяемого выражением (3), при дополнении каждого шага случайного поиска последующей процедурой локальной оптимизации с использованием процедуры наискорейшего спуска.

Представленное в статье исследование границ значений структурной функции позволяет получить аналитическую оценку максимальной относительной погрешности случайного поиска как метода глобальной оптимизации СФ на комбинаторном пространстве. В свою очередь результаты статистического исследования СФ позволяют с уверенностью рекомендовать к использованию процедуру, объединяющую случайный поиск с локальной оптимизацией.

Список литературы

1. Малыгин В.В. Силин В.Б. Проектирование САПР как распределенной информационно-вычислительной системы. // Электронный журнал «Труды МАИ». - 2003, №11. - http://www.mai.ru.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Малыгин Владимир Вячеславович, аспирант кафедры радиоэлектроники Московского авиационного института (государственного технического университета),
e-mail: v_malygin@hotmail.com