

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)



На правах рукописи

КУРШИН Андрей Владимирович

**КОМПЛЕКСИРОВАНИЕ НА ПОДВОДНОМ АППАРАТЕ ДАННЫХ
ИНЕРЦИАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ, МАГНИТОМЕТРА И
ГЛОБАЛЬНОЙ НАВИГАЦИОННОЙ СПУТНИКОВОЙ СИСТЕМЫ
ГЛОНАСС**

Специальность: 05.13.01 – «Системный анализ, управление и
обработка информации»

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель: заслуженный деятель науки РФ,
доктор технических наук,
профессор В.В. Малышев

Москва – 2016 год

Оглавление

Введение.....	4
1 Модели движения подводного аппарата	12
1.1 Нелинейная модель движения подводного аппарата	13
1.1.1 Векторные уравнения динамики	13
1.1.2 Скалярные уравнения динамики	16
1.1.3 Кинематические уравнения и геометрические связи	18
1.1.4 Вращательное движение.....	19
1.1.5 Поступательное движение.....	24
1.1.6 Внешние силы и моменты	24
1.1.7 Полная система уравнений движения.....	29
1.2 Линеаризованная модель движения подводного аппарата.....	33
1.2.1 Движение по крену	36
1.2.2 Боковое движение	38
1.2.3 Продольное движение	41
1.3 Практическая реализация моделирования движения подводного аппарата.	45
1.4 Выводы к главе 1	50
2 Моделирование инерциальной навигационной системы.....	51
2.1 Блок чувствительных элементов	51
2.1.1 Устройство блока чувствительных элементов.....	51
2.1.2 Составляющие погрешностей блока чувствительных элементов.....	56
2.1.3 Компенсация погрешностей блока чувствительных элементов по каналу линейного ускорения	56
2.1.4 Компенсация погрешностей блока чувствительных элементов по каналу угловой скорости.....	58
2.2 Датчик глубины	59
2.2.1 Устройство датчика глубины.....	59
2.2.2 Расчет глубины.....	60
2.3 Обработка показаний блока чувствительных элементов и датчика глубины	61
2.3.1 Используемые системы координат.....	61
2.3.2 Оценка углового положения подводного аппарата	62
2.3.3 Оценка глубины хода подводного аппарата	63
2.3.4 Оценка координат в горизонте	64
2.3.5 Оценка угловой скорости подводного аппарата.....	66
2.4 Моделирование показаний датчиков блока чувствительных элементов и датчика глубины.....	67
2.4.1 Модель акселерометра.....	68
2.4.2 Модель датчика угловой скорости	72
2.4.3 Модель датчика глубины.....	73
2.5 Практическая реализация моделирования работы ИНС.....	75
2.6 Выводы к главе 2	76

3	Комплексирование измерений магнитометра с ИНС.....	78
3.1	Калибровка магнитометра.....	78
3.1.1	Математическая постановка задачи	78
3.1.2	Нахождение вектора оцениваемых параметров	82
3.1.3	Определение направления одномерного поиска	83
3.1.4	Одномерный поиск минимума критериальной функции	85
3.2	Калибровка ИНС по измерениям магнитометра.....	86
3.2.1	Математическая постановка задачи	86
3.2.2	Определение скорости ухода углов курса	90
3.2.3	Определение скорости ухода углов тангажа	91
3.2.4	Определение скорости ухода углов крена	91
3.3	Комплексирование магнитометра и ИНС.....	92
3.3.1	Алгоритм решения задачи комплексирования магнитометра и ИНС	92
3.3.2	Решение задачи комплексирования магнитометра и ИНС	94
3.4	Выводы к главе 3	96
4	Определение местоположения подводного аппарата с использованием ГНСС	97
4.1	Алгоритм определения местоположения	97
4.1.1	Описание алгоритма определения местоположение	97
4.1.2	Адаптивный алгоритм спутниковой навигации.....	101
4.1.3	Модель геоида.....	104
4.2	Схема построения системы навигации подводного аппарата с использованием ИНС и ГНСС	107
4.3	Результаты моделирования	107
4.4	Выводы к главе 4	110
5	Формирование уточненной ЭВИ для повышения точности навигации подводного аппарата с использованием ГНСС.....	112
5.1	Предложения по форматам передачи дифференциальных данных.....	112
5.1.1	Дифференциальные поправки к ЭВИ	114
5.1.2	Дифференциальные поправки к дальномерным измерениям	116
5.1.3	Формат передачи дифференциальных данных: вариант № 1	119
5.1.4	Формат передачи дифференциальных данных: вариант № 2.....	119
5.1.5	Формат передачи дифференциальных данных: вариант № 3	124
5.1.6	Формат служебных данных.....	127
5.1.7	Объем дифференциальных данных.....	129
5.2	Формирование уточненной ЭВИ ГНСС в реальном времени.....	130
5.2.1	Постановка задачи.....	131
5.2.2	Алгоритм решения задачи.....	132
5.2.3	Реализация алгоритма уточненной ЭВИ ГНСС.....	134
5.3	Выводы к главе 5	136
	Выводы по диссертации	137
	Список сокращений	138
	Список литературы	139

Введение

Актуальность темы. Важнейшим приоритетом национальной политики России, обозначенным в Морской доктрине России на период до 2020 года, является развитие морской хозяйственной деятельности в Мировом океане. Решение задач по исследованию и изучению природы Мирового океана, поиска и промышленного освоения полезных ископаемых в Мировом океане, промышленного освоения районов Арктического шельфа требуют развития морского транспортного обеспечения, как надводного, так и подводного. Для решения поставленных перед Военно-Морским Флотом Российской Федерации задач также требуется соответствующее обеспечение. Здесь необходимо отметить, что несмотря на оснащение Военно-Морского Флота Российской Федерации современным тактическим ракетно-ядерным оружием, подводные аппараты - торпеды не утратили своего значения. Являясь самым эффективным противолодочным и противокорабельным средством, они состоят на вооружении всех классов надводных кораблей, подводных лодок и морской авиации.

Ключевым фактором эффективного выполнения миссий подводных аппаратов является надежность и точность технических средств навигации. Навигационные средства подводного аппарата предназначены для решения задач, обеспечивающих надежную, высокоточную и достоверную навигационную поддержку движения и выполнения поставленных задач перед подводным аппаратом.

Существенный вклад в создание и развитие методов управления подводными аппаратами внесли: М.Д.Агеев, Е.Н.Пантов, Е.В.Тарасов, А.И.Петербург, В.В.Малышев, В.Т.Бобронников, С.А.Горбатенко, М.Н.Красильщиков А.В. Федоров, Ю.Д.Тычинский, В.П.Махров и др.

В связи с возрастанием сложности и важности решаемых задач подводными аппаратами возрастают и требования к точности его навигации под водой и доведения её до значений, близких к точности определения местоположения с помощью глобальной навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС.

Когда объект навигации находится на поверхности воды, решение задачи определения координат обеспечивается с помощью приемников спутниковой навигации. Погружаясь, радиоволны ослабляются водой, и навигация осуществляется с помощью инерциальной навигационной системы (ИНС). Для повышения точности ИНС в ее состав включают блок чувствительных элементов и датчики глубины, а также дополнительно используют магнитометр.

Недостатком ИНС является накопление навигационной ошибки, величина которой зависит как от инструментальных ошибок измерительных датчиков, так и от методов обработки доставляемой информации. Для устранения этого недостатка ИНС необходимо периодически корректировать, вводя корректирующие значения, что делается с помощью ГНСС при всплытии на поверхности воды.

Таким образом, решение задачи комплексирования данных, полученных от ИНС, включая блок чувствительных элементов и датчики глубины, магнитометра, а также измерений ГНСС, позволит повысить точность и достоверность навигационного обеспечения под водой, а сама задача является актуальной для потребителей - подводных аппаратов. Это позволит повысить эффективность использования подводных аппаратов при проведении различного рода операций.

Необходимо отметить, что применение ИНС для навигации подводных аппаратов является традиционным решением задачи определения местоположения (М.Д.Агеев, Е.Н.Пантов, Е.В. Тарасов). Использование магнитометра для измерения магнитного поля Земли в навигации подводных аппаратов встречается достаточно редко (А.И.Петербург, В.В.Малышев, В.Т.Бобронников, В.В.Аверкиев). Вопрос высокоточной навигации подводного аппарата по сигналам ГНСС в условиях кратковременного всплытия на поверхность воды является новым. И здесь надо решить мало разработанную задачу по уточнению эфемеридно-временной информации ГНСС в реальном времени и разработать предложения по формату передаваемой информации для уменьшения времени сеанса дифференциальной навигации.

Цель работы. Целью диссертационной работы является разработка технологии комплексирования на подводном аппарате данных, полученных от инерциальной навигационной системы, включая блок чувствительных элементов и датчики глубины, а также магнитометра, с данными глобальной навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС. Данная технология включает в себя алгоритмы и разработанное на их основе программное обеспечение.

Назначение этой технологии – используя измерения блока чувствительных элементов, датчика глубины, данных ГНСС, магнитометра, получить оценку вектора положения подводного аппарата, точность которой будет выше, нежели при использовании только измерений блока чувствительных элементов и датчика глубины, реализуемой в традиционной ИНС.

Использование разнородных данных требует определить способы и методы их обработки. Таким образом, постановка задачи разработки технологии комплексирования на подводном аппарате данных, полученных от инерциальной навигационной системы, магнитометра, ГНСС ГЛОНАСС заключается в определении этапов и алгоритмов применения доступных измерений при навигации подводного аппарата. На первом этапе – первоначальная выставка инерциальной навигационной системы подводного аппарата. На втором этапе – запуск подводного аппарата и после отхода от носителя, совершение подводным аппаратом калибровочного маневра, набор массивов измерений трехкомпонентного магнитометра и показаний навигационной системы, калибровка магнитометра. На третьем этапе – оценка вектора состояния подводного аппарата с использованием показаний инерциальной навигационной системы и трехкомпонентного магнитометра. На четвертом этапе – кратковременное всплытие, прием измерений от ГНСС и решение навигационной задачи по измерениям ГНСС, уточнение местоположения подводного аппарата, оценка ухода чувствительных элементов ИНС. На пятом этапе – оценка вектора состояния подводного с использованием показаний ИНС, трехкомпонентного магнитометра и данных глобальной спутниковой навигационной системы.

Применение разработанной технологии комплексирования данных от ИНС, магнитометра и ГНСС позволит повысить точность навигации подводного аппарата и, тем самым, повысить эффективность их применения.

Объект исследования. Объектом исследования является технология комплексирования на подводном аппарате данных, полученных от инерциальной навигационной системы, магнитометра, с данными от глобальных навигационных спутниковых систем, а также их алгоритмическая и программная реализация.

Методы исследования. При разработке и реализации технологии комплексирования на подводном аппарате данных, полученных от ИНС, магнитометра и ГНСС используются методы статистические обработки данных, методы оптимальной фильтрации и адаптивные методы обработки информации. При программной реализации математического обеспечения технологии комплексирования на подводном аппарате используются язык программирования C/C++, среда программирования MatLab, мультизадачность операционных систем Windows, Linux, а также средства обеспечения доступа в Интернет (для формирования коррекций к измерениям ГНСС).

Научная новизна. Новыми научными результатами в диссертации являются:

1. Методическое и математическое обеспечение решения задачи комплексирования измерений магнитометра с ИНС.
2. Метод калибровки магнитометра на движущемся подводном аппарате.
3. Методическое и математическое обеспечение решения задачи определения координат подводного аппарата по сигналам ГНСС (ГЛОНАСС, GPS, Galileo, BeiDou) при кратковременном всплытии.
4. Метод повышения обусловленности навигационной задачи подводного аппарата, находящегося на водной поверхности за счет информации о начальных условиях: координаты точки запуска подводного аппарата, а также высоты над земным эллипсоидом.

5. Алгоритмическое и программное обеспечение для решения задачи вычисления уточненной ЭВИ ГНСС в реальном времени с использованием данных от глобальной беззапросной измерительной сети.

Достоверность полученных результатов обеспечена использованием апробированных математических методов и подтверждается применением в реальных условиях и сравнением некоторых результатов с данными, полученными сторонними производителями навигационной аппаратуры.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость работы состоит в решении задачи комплексирования измерений магнитометра с ИНС, а также в разработке метода калибровки магнитометра на движущемся подводном аппарате, метода комплексирования измерений магнитометра с ИНС, установленной на аппарате. Решаемая в диссертации задача разработки технологии комплексирования на подводном аппарате данных, полученных от инерциальной навигационной системы, включая блок чувствительных элементов и датчики глубины, а также магнитометра, с данными глобальной навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС, отражает практическую потребность повышения качества навигационного обслуживания подводных аппаратов, обеспечения национальной безопасности и социально-экономического развития Российской Федерации. Результаты работы использованы во ФГУП «ЦНИИмаш», АО «ГНПП «Регион» и АО «Российские космические системы», что подтверждается соответствующими актами внедрения.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались и обсуждались на 17-ой международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (г. Евпатория, Украина, 2012 г.), VI Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космического приборостроения и информационных технологий» (г. Москва, 2013 г.), XVIII международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация» (г. Евпатория, Украина, 2013 г.), XVIII Макеевский чтениях (г. Екатеринбург, 2013 г.).

Личный вклад и публикации. Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. По теме диссертации опубликовано шесть печатных работ, из них три в ведущих рецензируемых научных журналах, определённых Высшей аттестационной комиссией Министерства образования и науки Российской Федерации.

Положения, выносимые на защиту:

1. Методическое и математическое обеспечение решения задачи комплексирования измерений магнитометра с ИНС и обнаружения объектов, обладающих собственным магнитным полем, с использованием магнитометра.
2. Метод калибровки магнитометра на движущемся подводном аппарате и метод комплексирования измерений магнитометра с ИНС, установленной на аппарате. Данный метод калибровки ИНС по измерениям магнитометра включает определение увода углов курса, тангажа и крена, измеренных гироскопом.
3. Методическое и математическое обеспечение решения задачи определения координат подводного аппарата по сигналам ГНСС (ГЛОНАСС, GPS, Galileo, BeiDou) при кратковременном всплытии. Данное обеспечение содержит форматы передачи дифференциальных данных для уменьшения времени навигации подводного аппарата. Дифференциальные поправки включают в себя как быстро меняющиеся данные (коррекция ЧВП), так и медленно меняющиеся данные (коррекция ЭВИ). Также передается информация о целостности данных, в том числе и дифференциальных.
4. Метод повышения обусловленности навигационной задачи подводного аппарата, находящегося на водной поверхности за счет информации о начальных условиях: координаты точки запуска подводного аппарата, а также высоты над земным эллипсоидом.
5. Алгоритмическое и программное обеспечение для решения задачи вычисления уточненной ЭВИ ГНСС в реальном времени с использованием данных от глобальной беззапросной измерительной сети.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, выводов, списка литературы из 56 наименований. Общий объем работы составляет 144 страниц, в том числе 36 рисунков и 11 таблиц.

В **главе 1** рассматриваются уравнения движения подводного аппарата в различных формах. Данные уравнения используются в дальнейшем при решении задачи навигации подводного аппарата с использованием измерений от инерциальной навигационной системы и магнитометра. Также приводятся модели основных воздействий на аппарат: сил тяжести и Архимеда, двигательной установки, гидродинамических сил и моментов, включая силы и моменты от рулей. На основе данных моделей движения подводного аппарата было разработано программное математическое обеспечение моделирования движения подводного аппарата. Приведены результаты моделирования движения подводного аппарата.

В **главе 2** приведены математические модели, описывающие работу инерциальной навигационной системы. Данные модели включают модели блока чувствительных элементов и датчиков глубины. На основе представленных моделей разработано программное математическое обеспечение моделирования работы ИНС подводного аппарата. Приведены результаты моделирования траектории движения подводного аппарата и оценки этой траектории на основе показаний ИНС.

В **главе 3** рассматривается задача комплексирования измерений магнитометра с ИНС. Приводится описание метода калибровки магнитометра на движущемся подводном аппарате, метода комплексирования измерений магнитометра с ИНС. Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод калибровки магнитометра подводного аппарата, определение собственного магнитного поля подводного аппарата, магнитного поля Земли, а также других калибровочных параметров непосредственно после пуска подводного аппарата. Приводится метод калибровки инерциальной навигационной системы по измерениям магнитометра, с определением ухода углов курса, тангажа и крена, измеренных гироскопом. Разработан метод

комплексирования измерений магнитометра с ИНС. Приведены результаты применения метода комплексирования измерений магнитометра с ИНС.

В главе 4 решается задача определения координат подводного аппарата с использованием ГНСС. Приводится описание алгоритмов и методов определения местоположения подводного аппарата по сигналам ГНСС с возможностью кратковременного всплытия. Приведен алгоритм определения местоположения подводного аппарата по сигналам глобальных спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и GPS. Данный алгоритм применим при использовании и других систем - Galileo и BeiDou. Рассмотрены методы решения навигационной задачи потребителем - аппаратом, находящимся на водной поверхности. Предложены методы повышения обусловленности навигационной задачи за счет информации о начальных условиях: координаты точки запуска подводного аппарата, а также высоты над земным эллипсоидом с использованием модели геоида.

В главе 5 решается задача вычисления уточненной ЭВИ для повышения точности навигации подводного аппарата с использованием измерений от спутниковых навигационных систем. Для уменьшения времени навигации подводного аппарата, всплывшего на поверхность на некоторое время, рассмотрен способ уменьшения времени получения дифференциальных данных. Разработаны алгоритмы и программное обеспечение вычисления уточненной ЭВИ на основе использования беззапросных измерений от навигационных спутников ГНСС. Данные измерения собираются при помощи глобальной сети измерений. Применение уточненной ЭВИ ГЛОНАСС позволяет повысить точность навигационных определений подводного аппарата при всплытии.

В разделе **выводы по диссертации** на основе результатов, полученных в диссертации, были сформулированы основные выводы.

1 Модели движения подводного аппарата

В данной главе приводятся уравнения движения подводного аппарата, описывающие его движение в различных формах. Данные уравнения используются в дальнейшем при решении задачи навигации подводного аппарата с использованием измерений от инерциальной навигационной системы и магнитометра.

Основное отличие уравнений динамики подводного аппарата от, например, летательного заключается в том, что он рассматривается не как твердое тело, а как система аппарат-жидкость. Эта особенность связана с несжимаемостью жидкости (в отличие от газа) из-за чего пустоты за задними кромками движущегося аппарата мгновенно заполняются водой, которая таким образом движется вслед за аппаратом, создавая эффект дополнительной (присоединенной) массы. Указанный эффект учитывается с помощью дополнительных (по сравнению с твердым телом) слагаемых в выражениях для количества движения и кинетического момента системы аппарат-жидкость.

Уравнения динамики дополняются различными альтернативными вариантами кинематических уравнений, основанных на: углах ориентации, матрице направляющих косинусов и параметрах Родрига-Гамильтона. Приводятся также формулы расчета одного набора кинематических параметров на основе другого.

Также приводятся модели основных воздействий на аппарат: сил тяжести и Архимеда, двигательной установки, гидродинамических сил и моментов, включая силы и моменты от рулей.

В отдельном разделе рассматривается упрощенная модель движения с использованием метода линеаризации и разделения движения на боковое, продольное и вращательное.

Данные модели использовались при разработке программного математического обеспечения моделирования движения подводного аппарата.

1.1 Нелинейная модель движения подводного аппарата

1.1.1 Векторные уравнения динамики

Рассматривается подводный аппарат в виде твердого тела. Вводятся в рассмотрение инерциальная $O_{II}X_{II}Y_{II}Z_{II}$ система координат и система координат $OXYZ$, «жестко» связанная с твердым телом (или связанная система).

Динамика твердого тела может быть описана с помощью теорем об изменении количества движения и об изменении кинетического момента механической системы, которым соответствуют следующие уравнения [1-2, 13, 28, 32, 35, 36]:

$$\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{Q} = \sum_i \mathbf{F}_i; \quad (1.1)$$

$$\frac{\delta \mathbf{K}_O}{\delta t} + \mathbf{V} \times \mathbf{Q} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K}_O = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i. \quad (1.2)$$

Здесь: \mathbf{Q} – вектор количества движения механической системы; \mathbf{K}_O – вектор кинетического момента механической системы относительно подвижного центра O ; $\frac{\delta \mathbf{Q}}{\delta t}$, $\frac{\delta \mathbf{K}_O}{\delta t}$ – производные векторов \mathbf{Q} и \mathbf{K}_O относительно подвижной системы координат $OXYZ$; \mathbf{V} – вектор скорости подвижного центра O ; $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости системы $OXYZ$; $\sum_i \mathbf{F}_i$, $\sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i$ – векторы суммарных силы и момента относительно центра O от всех внешних сил, действующих на систему.

Векторы \mathbf{Q} количества движения и \mathbf{K}_O кинетического момента твердого тела относительно подвижного центра O определяются согласно [7, 37]:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{V} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_c; \quad (1.3)$$

$$\mathbf{K}_O = m\boldsymbol{\rho}_c \times \mathbf{V} + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega}; \quad (1.4)$$

где \mathbf{J} – тензор инерции твердого тела.

Для описания движения подводного аппарата вполне годились бы формулы (1.1)–(1.4), но проблема заключается в вычислении правых частей этих формул, т. е. сил и моментов.

Традиционно гидродинамические силы вычисляются аналогично аэродинамическим силам для летательных аппаратов (с использованием аэродинамических коэффициентов и т. д.). Однако жидкость в отличие от газа является средой несжимаемой, что вносит свои особенности при вычислении гидродинамических сил.

Так, например, за задним срезом летательного аппарата образуется разрежение, а у подводного аппарата такого разрежения не возникает. Как только аппарат сместится вперед, вода тут же заполнит образующуюся за задним срезом пустоту. Если рассматривать этот процесс непрерывно, то получится, что вода движется вслед за аппаратом.

Таким образом сила, приводящая аппарат в движение, должна перемещать не только сам аппарат, но и некоторое количество жидкости вслед за ним. Другими словами, к массе аппарата «присоединяется» определенная масса жидкости. Эту дополнительную массу принято называть *присоединенной*.

Аналогичная ситуация возникает и при вращении подводного аппарата. Здесь вводят в рассмотрение *присоединенные моменты инерции*.

Присоединенные массы и моменты инерции зависят от геометрии подводного аппарата. Их принято объединять в симметрическую матрицу $\boldsymbol{\lambda} = \{\lambda_{ij}; i, j = 1, \dots, 6\}$.

При использовании присоединенных масс и моментов инерции гидродинамические силы и моменты будут рассчитываться аналогично

аэродинамическим, но изменяться массово-инерционные характеристики подводного аппарата (теперь правильнее будет сказать не аппарата, а системы аппарат-жидкость). Последнее приведет к тому, что в уравнениях движения изменятся выражения (1.3), (1.4) для количества движения и кинетического момента. Теперь они примут вид:

$$\mathbf{Q} = m\mathbf{V} + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_c + \sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{x}) \mathbf{e}_i; \quad (1.5)$$

$$\mathbf{K}_O = m\boldsymbol{\rho}_c \times \mathbf{V} + \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} + \sum_{i=1}^3 (\boldsymbol{\lambda}_{i+3}, \mathbf{x}) \mathbf{e}_i. \quad (1.6)$$

Здесь: $\mathbf{x} = (V_x \ V_y \ V_z \ \omega_x \ \omega_y \ \omega_z)^T$ – вектор кинематических параметров движения, спроецированных на оси связанной системы координат; $\boldsymbol{\lambda}_i$ – i -я строка матрицы $\boldsymbol{\lambda}$; $(\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{x})$ – скалярное произведение векторов $\boldsymbol{\lambda}_i$ и \mathbf{x} ; \mathbf{e}_i – орты связанной системы координат.

Как можно видеть из (1.5) и (1.6), векторы \mathbf{Q} и \mathbf{K}_O являются линейными формами вектора \mathbf{x} :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}_Q \mathbf{x}, \quad \mathbf{K}_O = \mathbf{A}_K \mathbf{x}; \quad (1.7)$$

где

$$\mathbf{A}_Q = \begin{pmatrix} m+\lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & mz_c+\lambda_{15} & -my_c+\lambda_{16} \\ \lambda_{21} & m+\lambda_{22} & \lambda_{23} & -mz_c+\lambda_{24} & \lambda_{25} & mx_c+\lambda_{26} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & m+\lambda_{33} & my_c+\lambda_{34} & -mx_c+\lambda_{35} & \lambda_{36} \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{A}_K = \begin{pmatrix} \lambda_{41} & -mz_c+\lambda_{42} & my_c+\lambda_{43} & J_{xx}+\lambda_{44} & -J_{xy}+\lambda_{45} & -J_{xz}+\lambda_{46} \\ mz_c+\lambda_{51} & \lambda_{52} & -mx_c+\lambda_{53} & -J_{yx}+\lambda_{54} & J_{yy}+\lambda_{55} & -J_{yz}+\lambda_{56} \\ -my_c+\lambda_{61} & mx_c+\lambda_{62} & \lambda_{63} & -J_{zx}+\lambda_{64} & -J_{zy}+\lambda_{65} & J_{zz}+\lambda_{66} \end{pmatrix}.$$

Подставив эти выражения в уравнения (1.1), (1.2) получим следующую систему из шести уравнений с шестью неизвестными составляющими вектора $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$:

$$\mathbf{A}_Q \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}_Q \mathbf{x});$$

$$\mathbf{A}_K \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{V} \times (\mathbf{A}_Q \mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}_K \mathbf{x}).$$

Как правило, гидродинамические характеристики подводного аппарата определяют при продувке в аэродинамической трубе. Отличие обтекания газом и жидкостью было учтено с помощью присоединенных масс и моментов инерции. Оказывается, что такой прием не полностью компенсирует погрешность эксперимента. Оставшуюся погрешность можно скомпенсировать с помощью вектора поправок

$$\Delta = [(\lambda_{33} - \lambda_{22}) V_y V_z \quad (\lambda_{11} - \lambda_{33}) V_x V_z \quad (\lambda_{22} - \lambda_{11}) V_x V_y]^T.$$

Таким образом получаем окончательные уравнения движения подводного аппарата

$$\mathbf{A}_Q \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_i \mathbf{F}_i - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}_Q \mathbf{x}); \tag{1.8}$$

$$\mathbf{A}_K \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_i \boldsymbol{\rho}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{V} \times (\mathbf{A}_Q \mathbf{x}) - \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{A}_K \mathbf{x}) + \Delta.$$

Полученная система пригодна для моделирования движения подводного аппарата, например, с помощью численных методов интегрирования. В этом случае необходимо при каждом вычислении правых частей решать систему линейных алгебраических уравнений относительно вектора $d\mathbf{x}/dt$. Если пренебречь изменением во времени массово-инерционными характеристиками аппарата и считать матрицы \mathbf{A}_Q и \mathbf{A}_K постоянными, то имеет смысл решать указанную систему методом обратной матрицы, которую достаточно обратить единственный раз перед началом моделирования.

1.1.2 Скалярные уравнения динамики

Система (1.8) удобна для программирования на языках высокого уровня, в которых реализована возможность работы с векторами и матрицами. Однако

бывает необходимо, например, при теоретических исследованиях, записать уравнения динамики в скалярном виде. Прделаем это.

В уравнениях (1.8) фигурируют слагаемые типа $\mathbf{b} \times (\mathbf{C} \mathbf{x})$, где: \mathbf{b} – вектор 3×1 ; \mathbf{C} – матрица $3 \times n$; \mathbf{x} – вектор $n \times 1$. Распишем их в скалярном виде (через \mathbf{c}_i обозначена i -я строка матрицы \mathbf{C})

$$\mathbf{b} \times (\mathbf{C} \mathbf{x}) = \mathbf{b} \times \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{c}_2 \\ \mathbf{c}_3 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b} \times \begin{pmatrix} (\mathbf{c}_1, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{c}_2, \mathbf{x}) \\ (\mathbf{c}_3, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_y(\mathbf{c}_3, \mathbf{x}) - b_z(\mathbf{c}_2, \mathbf{x}) \\ b_z(\mathbf{c}_1, \mathbf{x}) - b_x(\mathbf{c}_3, \mathbf{x}) \\ b_x(\mathbf{c}_2, \mathbf{x}) - b_y(\mathbf{c}_1, \mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n (b_y c_{3i} - b_z c_{2i}) x_i \\ \sum_{i=1}^n (b_z c_{1i} - b_x c_{3i}) x_i \\ \sum_{i=1}^n (b_x c_{2i} - b_y c_{1i}) x_i \end{pmatrix}.$$

Обозначив $\mathbf{F}_\Sigma = \sum_i \mathbf{F}_i$, $\mathbf{M}_\Sigma = \sum_i \rho_i \times \mathbf{F}_i$, а также элементы матриц \mathbf{A}_Q и \mathbf{A}_K через Q_{ij}

и K_{ij} соответственно, запишем (1.8) в скалярном виде:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 Q_{1i} \frac{dx_i}{dt} &= F_{\Sigma x} - \sum_{i=1}^6 (\omega_y Q_{3i} - \omega_z Q_{2i}) x_i; \\ \sum_{i=1}^6 Q_{2i} \frac{dx_i}{dt} &= F_{\Sigma y} - \sum_{i=1}^6 (\omega_z Q_{1i} - \omega_x Q_{3i}) x_i; \\ \sum_{i=1}^6 Q_{3i} \frac{dx_i}{dt} &= F_{\Sigma z} - \sum_{i=1}^6 (\omega_x Q_{2i} - \omega_y Q_{1i}) x_i; \\ \sum_{i=1}^6 K_{1i} \frac{dx_i}{dt} &= M_{\Sigma x} - \sum_{i=1}^6 (V_y Q_{3i} - V_z Q_{2i} + \omega_y K_{3i} - \omega_z K_{2i}) x_i + \Delta_x; \\ \sum_{i=1}^6 K_{2i} \frac{dx_i}{dt} &= M_{\Sigma y} - \sum_{i=1}^6 (V_z Q_{1i} - V_x Q_{3i} + \omega_z K_{1i} - \omega_x K_{3i}) x_i + \Delta_y; \\ \sum_{i=1}^6 K_{3i} \frac{dx_i}{dt} &= M_{\Sigma z} - \sum_{i=1}^6 (V_x Q_{2i} - V_y Q_{1i} + \omega_x K_{2i} - \omega_y K_{1i}) x_i + \Delta_z. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Иногда необходимо явно указать зависимости параметров движения и инерционно-массово-геометрических характеристик аппарата, для чего раскроем значения Q_{ij} , K_{ij} , x_i , Δ_i . При этом учтем, что для большинства подводных аппаратов ненулевыми являются только диагональные элементы симметрической матрицы λ , а также λ_{26} , λ_{35} (и симметричные им). Матрицу моментов инерции \mathbf{J} будем

считать диагональной (оси связанной системы координат совпадают с главными осями инерции аппарата).

$$\begin{aligned}
& (m+\lambda_{11})\frac{dV_x}{dt} + mz_c\frac{d\omega_y}{dt} - my_c\frac{d\omega_z}{dt} = F_{\Sigma x} - \\
& - (m+\lambda_{33})V_z\omega_y + (m+\lambda_{22})V_y\omega_z + (mx_c-\lambda_{35})\omega_y^2 + (mx_c+\lambda_{26})\omega_z^2 - \\
& - my_c\omega_x\omega_y - mz_c\omega_x\omega_z; \\
& (m+\lambda_{22})\frac{dV_y}{dt} - mz_c\frac{d\omega_x}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{d\omega_z}{dt} = F_{\Sigma y} - \\
& - (m+\lambda_{11})V_x\omega_z + (m+\lambda_{33})V_z\omega_x + my_c(\omega_x^2+\omega_z^2) - mz_c\omega_y\omega_z - (mx_c-\lambda_{35})\omega_x\omega_y; \\
& (m+\lambda_{33})\frac{dV_z}{dt} + my_c\frac{d\omega_x}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{d\omega_y}{dt} = F_{\Sigma z} - \\
& - (m+\lambda_{22})V_y\omega_x + (m+\lambda_{11})V_x\omega_y + mz_c(\omega_x^2+\omega_y^2) - my_c\omega_y\omega_z - (mx_c+\lambda_{26})\omega_x\omega_z; \\
& (J_{xx}+\lambda_{44})\frac{d\omega_x}{dt} - mz_c\frac{dV_y}{dt} + my_c\frac{dV_z}{dt} = M_{\Sigma x} + \\
& + my_c(V_x\omega_y - V_y\omega_x) - (\lambda_{26}+\lambda_{35})(V_y\omega_y - V_z\omega_z) - mz_c(V_z\omega_x - V_x\omega_z) - \\
& - [(J_{zz}+\lambda_{66}) - (J_{yy}+\lambda_{55})]\omega_y\omega_z; \\
& (J_{yy}+\lambda_{55})\frac{d\omega_y}{dt} + mz_c\frac{dV_x}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{dV_z}{dt} = M_{\Sigma y} + \\
& + (mx_c+\lambda_{26})V_y\omega_x - (mx_c-\lambda_{35})V_x\omega_y - mz_c(V_z\omega_y - V_y\omega_z) - \\
& - [(J_{xx}+\lambda_{44}) - (J_{zz}+\lambda_{66})]\omega_x\omega_z; \\
& (J_{zz}+\lambda_{66})\frac{d\omega_z}{dt} - my_c\frac{dV_x}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{dV_y}{dt} = M_{\Sigma z} - \\
& - (mx_c+\lambda_{26})V_x\omega_z + (mx_c-\lambda_{35})V_z\omega_x - my_c(V_y\omega_z - V_z\omega_y) + \\
& + [(J_{xx}+\lambda_{44}) - (J_{yy}+\lambda_{55})]\omega_x\omega_y.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

1.1.3 Кинематические уравнения и геометрические связи

Полученные выше уравнения динамики связывают силы и моменты, действующие на аппарат с его ускорениями. В результате интегрирования этих

уравнений определяются линейные и угловые скорости (составляющие вектора \mathbf{x}).

Чтобы определить положение и ориентацию аппарата в пространстве, необходимы дополнительные уравнения, которые бы связывали производные координат подводного аппарата с получаемыми в результате интегрирования уравнений динамики скоростями. Такие уравнения называют *кинематическими*.

Часто зная, одни координаты положения или ориентации аппарата, нужно пересчитать их в другие (в другой системе координат и т.п.). Подобные пересчеты производятся с помощью так называемых *геометрических связей*.

1.1.4 Вращательное движение

Рассмотрим сначала кинематические уравнения вращательного движения. Считаем известными проекции ω_x , ω_y , ω_z вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости аппарата на оси связанной системы координат. Требуется определить ориентацию связанной системы координат относительно инерциальной.

Рассмотрим три альтернативных способа определения ориентации аппарата. С помощью: углов ориентации, матрицы направляющих косинусов и т. н. параметров Родрига-Гамильтона [28, 31].

Изменение во времени углов ориентации определяется формулами:

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma).\end{aligned}\tag{1.11}$$

Заметим, что уравнения для углов ориентации вырождаются при $\vartheta = 90^\circ$. При таком значении дифферента теряют смысл углы рысканья и крена. Даже если дифферент не равен 90° , но близок к этому значению, то будут существенно возрастать ошибки численного интегрирования.

Указанных недостатков лишен способ определения ориентации аппарата с помощью матрицы \mathbf{A} перехода из связанной системы координат в инерциальную (матрицы направляющих косинусов), которая описывается уравнениями Пуассона [31, 36]:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Или в скалярном виде

$$\frac{d a_{i1}}{dt} = a_{i2}\omega_z - a_{i3}\omega_y, \quad \frac{d a_{i2}}{dt} = a_{i3}\omega_x - a_{i1}\omega_z, \quad \frac{d a_{i3}}{dt} = a_{i1}\omega_y - a_{i2}\omega_x, \quad i=1,2,3. \quad (1.13)$$

Ориентацию аппарата определяют три параметра, но матрица направляющих косинусов состоит из девяти элементов. Значит, между этими элементами существует шесть (девять минус три) связей. Такими связями являются условия ортонормированности ее строк и столбцов.

Однако условия ортонормированности на практике не выполняются вследствие вычислительных ошибок. Для ортонормировки матрицы \mathbf{A} можно периодически в процессе интегрирования производить следующую коррекцию ее элементов:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} - \frac{1}{2}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T - \mathbf{E})\mathbf{A}. \quad (1.14)$$

где \mathbf{E} – единичная 3×3 матрица.

Альтернативой матрице направляющих косинусов может быть использование параметров Родрига-Гамильтона.

В соответствии с теоремой Эйлера *любое вращательное движение твердого тела может быть задано плоским конечным поворотом вокруг некоторой оси*. Пусть $\mathbf{e} = (e_x \ e_y \ e_z)^T$ – единичный вектор, определяющий ось такого поворота, а φ – угол плоского разворота твердого тела вокруг этой оси. Тогда параметры Родрига-Гамильтона определяются следующим образом:

$$Q_0 = \cos \frac{\Phi}{2}; \quad Q_x = e_x \sin \frac{\Phi}{2}; \quad Q_y = e_y \sin \frac{\Phi}{2}; \quad Q_z = e_z \sin \frac{\Phi}{2}. \quad (1.15)$$

Изменение параметров Родрига-Гамильтона во времени описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_0}{dt} &= -\frac{1}{2} (\omega_x Q_x + \omega_y Q_y + \omega_z Q_z); \\ \frac{dQ_x}{dt} &= \frac{1}{2} (\omega_x Q_0 - \omega_y Q_z + \omega_z Q_y); \\ \frac{dQ_y}{dt} &= \frac{1}{2} (\omega_x Q_z + \omega_y Q_0 - \omega_z Q_x); \\ \frac{dQ_z}{dt} &= \frac{1}{2} (-\omega_x Q_y + \omega_y Q_x + \omega_z Q_0). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Сумма квадратов параметров Родрига-Гамильтона по определению должна равняться единице. Однако в результате ошибок численного интегрирования (1.16) это условие может нарушаться. Для избежания указанной проблемы можно периодически производить нормировку:

$$Q_0 = \frac{Q_0}{Q}, \quad Q_x = \frac{Q_x}{Q}, \quad Q_y = \frac{Q_y}{Q}, \quad Q_z = \frac{Q_z}{Q}; \quad Q = \sqrt{Q_0^2 + Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}. \quad (1.17)$$

Альтернативным способом нормировки может быть введение в правые части (1.16) дополнительных слагаемых, обеспечивающих нужный эффект:

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_0}{dt} &= -\frac{1}{2}(\omega_x Q_x + \omega_y Q_y + \omega_z Q_z) - Q_0 \chi (Q - 1); \\
\frac{dQ_x}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_x Q_0 - \omega_y Q_z + \omega_z Q_y) - Q_x \chi (Q - 1); \\
\frac{dQ_y}{dt} &= \frac{1}{2}(\omega_x Q_z + \omega_y Q_0 - \omega_z Q_x) - Q_y \chi (Q - 1); \\
\frac{dQ_z}{dt} &= \frac{1}{2}(-\omega_x Q_y + \omega_y Q_x + \omega_z Q_0) - Q_z \chi (Q - 1).
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Здесь: $Q = \sqrt{Q_0^2 + Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}$; χ – коэффициент, выбираемый эмпирически в пределах от 0 до 1 (например, $\chi = 0.5$).

Рассмотренные три альтернативные набора параметров (углы ориентации, элементы матрицы направляющих косинусов, параметры Родрига-Гамильтона) теоретически являются идентичными, если не считать вырождения углов ориентации при дифференте, равном 90° . Зная значения одного из наборов всегда можно вычислить любой другой. Соответствующие формулы относятся к группе геометрических связей.

Зная параметры Родрига-Гамильтона можно вычислить элементы матрицы **A** перехода из связанной системы координат в инерциальную:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2(Q_0 Q_0 + Q_x Q_x) - 1; \quad a_{12} = 2(Q_x Q_y - Q_0 Q_z); \quad a_{13} = 2(Q_x Q_z + Q_0 Q_y); \\
a_{21} &= 2(Q_x Q_y + Q_0 Q_z); \quad a_{22} = 2(Q_0 Q_0 + Q_y Q_y) - 1; \quad a_{23} = 2(Q_y Q_z - Q_0 Q_x); \\
a_{31} &= 2(Q_x Q_z - Q_0 Q_y); \quad a_{32} = 2(Q_y Q_z + Q_0 Q_x); \quad a_{33} = 2(Q_0 Q_0 + Q_z Q_z) - 1;
\end{aligned} \tag{1.19}$$

И наоборот, зная матрицу направляющих косинусов **A**, можно вычислить параметры Родрига-Гамильтона:

$$Q_0 = \frac{1}{2} \lambda; \quad Q_x = \frac{1}{2\lambda} (a_{32} - a_{23}); \quad Q_y = \frac{1}{2\lambda} (a_{13} - a_{31}); \quad Q_z = \frac{1}{2\lambda} (a_{21} - a_{12}); \quad (1.20)$$

где обозначено $\lambda = \sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}$.

На основе параметров Родрига-Гамильтона можно вычислить углы ориентации аппарата:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta &= 2(Q_x Q_y + Q_0 Q_z); \quad \cos \vartheta = \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}; \\ \sin \gamma &= \frac{2}{\cos \vartheta} (Q_0 Q_x - Q_y Q_z); \quad \cos \gamma = \frac{1}{\cos \vartheta} [2(Q_0^2 + Q_y^2) - 1]; \\ \sin \psi &= \frac{2}{\cos \vartheta} (Q_0 Q_y - Q_x Q_z); \quad \cos \psi = \frac{1}{\cos \vartheta} [2(Q_0^2 + Q_x^2) - 1]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Наоборот, зная углы ориентации, можно вычислить параметры Родрига-Гамильтона:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}; \\ Q_x &= \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \\ Q_y &= \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}; \\ Q_z &= \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Матрица \mathbf{A} перехода от связанной системы координат к инерциальной определяется из углов ориентации следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.23)$$

Углы же ориентации из матрицы \mathbf{A} определяются так:

$$\begin{aligned}
\sin \vartheta &= a_{21}, & \cos \vartheta &= \sqrt{1 - a_{21}^2}; \\
\sin \gamma &= \frac{-a_{23}}{\sqrt{1 - a_{21}^2}}, & \cos \gamma &= \frac{a_{22}}{\sqrt{1 - a_{21}^2}}; \\
\sin \psi &= \frac{-a_{31}}{\sqrt{1 - a_{21}^2}}, & \cos \psi &= \frac{a_{11}}{\sqrt{1 - a_{21}^2}}.
\end{aligned} \tag{1.24}$$

1.1.5 Поступательное движение

Для вычисления местоположения аппарата в пространстве (определения координат x, y, z вектора \mathbf{R} в инерциальной системе) необходимо интегрировать кинематические уравнения поступательного движения

$$\frac{dx}{dt} = V_{Xu}, \quad \frac{dy}{dt} = V_{Yu}, \quad \frac{dz}{dt} = V_{Zu}.$$

Здесь V_{Xu}, V_{Yu}, V_{Zu} – координаты вектора скорости \mathbf{V} в инерциальной системе.

Однако уравнения (1.8)–(1.10) позволяют определить координаты V_x, V_y, V_z вектора \mathbf{V} в проекциях на оси связанной системы. Перевести координаты из связанной системы в инерциальную позволяет матрица \mathbf{A} направляющих косинусов, рассмотренная выше. Имеем:

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \tag{1.25}$$

1.1.6 Внешние силы и моменты

В представленных выше уравнениях динамики фигурируют суммарные (главные) векторы внешних сил \mathbf{F}_Σ и моментов \mathbf{M}_Σ в проекциях на оси связанной системы координат. Рассмотрим способы их расчета.

Из всех внешних воздействий выделим следующие силы и моменты: гидродинамические \mathbf{F}, \mathbf{M} ; двигательной установки $\mathbf{F}_P, \mathbf{M}_P$; тяжести $\mathbf{F}_G, \mathbf{M}_G$ и

Архимеда \mathbf{F}_A , \mathbf{M}_A . Все остальные воздействия будем рассматривать как возмущения \mathbf{F}_B , \mathbf{M}_B . Таким образом

$$\mathbf{F}_\Sigma = \mathbf{F} + \mathbf{F}_P + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_A + \mathbf{F}_B, \quad \mathbf{M}_\Sigma = \mathbf{M} + \mathbf{M}_P + \mathbf{M}_G + \mathbf{M}_A + \mathbf{M}_B. \quad (1.26)$$

В соответствии с (1.10) необходимо найти проекции векторов \mathbf{F}_Σ и \mathbf{M}_Σ на оси связанной системы координат $OXYZ$, которые совпадают с осями симметрии аппарата. Начало O этой системы расположено в центре водоизмещения.

В качестве инерциальной системы координат $O_{II}X_{II}Y_{II}Z_{II}$ будем рассматривать стартовую систему, пренебрегая кривизной и вращением Земли. Ось $O_{II}Y_{II}$ стартовой системы направлена по местной вертикали вверх, ось $O_{II}X_{II}$ может иметь любое направление в горизонтальной плоскости, ось $O_{II}Z_{II}$ дополняет систему до правой. Начало O_{II} может быть любым, но, как правило, совпадает с точкой старта на поверхности моря.

Будем считать, что сила тяги \mathbf{F}_P и момент \mathbf{M}_P двигателя направлены по продольной оси аппарата. Сила тяжести \mathbf{F}_G – по местной вертикали вниз, сила Архимеда \mathbf{F}_A – вверх.

Для принятых систем координат векторы сил и моментов будут иметь следующий вид.

Сила тяги и момент от двигателя в проекциях на оси связанной системы координат:

$$\mathbf{F}_P = (P \ 0 \ 0)^T, \quad \mathbf{M}_P = (M_P \ 0 \ 0)^T.$$

Гидродинамическая сила и момент в проекциях на оси связанной системы координат:

$$\mathbf{F} = (-X \ Y \ Z)^T, \quad \mathbf{M} = (M_x \ M_y \ M_z)^T.$$

Возмущающие силу и момент также считаем заданными в проекциях на оси связанной системы координат:

$$\mathbf{F}_B = (F_{Bx} \ F_{By} \ F_{Bz})^T, \quad \mathbf{M}_B = (M_{Bx} \ M_{By} \ M_{Bz})^T.$$

Силы тяжести и Архимеда в проекциях на оси инерциальной системы координат:

$$\mathbf{F}_G = (0 \ -G \ 0)^T, \quad \mathbf{F}_A = (0 \ A \ 0)^T.$$

Для перевода в связанную систему их следует умножить на матрицу направляющих косинусов \mathbf{A}^T . Тогда

$$\begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 0 \\ -G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{pmatrix} 0 \\ A \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.27)$$

Или, если использовать (1.23):

$$\begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G \sin \vartheta \\ -G \cos \vartheta \cos \gamma \\ G \cos \vartheta \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \sin \vartheta \\ A \cos \vartheta \cos \gamma \\ -A \cos \vartheta \sin \gamma \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Момент от силы Архимеда равен нулю, т. к. начало связанной системы координат находится в центре объема аппарата. Момент от силы тяжести запишется так:

$$\begin{pmatrix} M_{Gx} \\ M_{Gy} \\ M_{Gz} \end{pmatrix} = \mathbf{p}_c \times \mathbf{F}_G = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y_c \sin \gamma + z_c \cos \gamma) G \cos \vartheta \\ -(z_c \sin \vartheta + x_c \cos \vartheta \sin \gamma) G \\ (y_c \sin \vartheta - x_c \cos \vartheta \cos \gamma) G \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

С учетом полученных выражений запишем (1.26) в проекциях на оси связанной системы координат

$$\begin{pmatrix} F_{\Sigma x} \\ F_{\Sigma y} \\ F_{\Sigma z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_x \\ G_y \\ G_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{Bx} \\ F_{By} \\ F_{Bz} \end{pmatrix}. \quad (1.30)$$

$$\begin{pmatrix} M_{\Sigma x} \\ M_{\Sigma y} \\ M_{\Sigma z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_P \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{Gx} \\ M_{Gy} \\ M_{Gz} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{Bx} \\ M_{By} \\ M_{Bz} \end{pmatrix}. \quad (1.31)$$

Или

$$\begin{aligned}
F_{\Sigma x} &= -X + P + (A - G) \sin \vartheta + F_{Bx}; \\
F_{\Sigma y} &= Y + (A - G) \cos \vartheta \cos \gamma + F_{By}; \\
F_{\Sigma z} &= Z - (A - G) \cos \vartheta \sin \gamma + F_{Bz};
\end{aligned} \tag{1.32}$$

$$\begin{aligned}
M_{\Sigma x} &= M_x + M_P + (y_c \sin \gamma + z_c \cos \gamma) G \cos \vartheta + M_{Bx}; \\
M_{\Sigma y} &= M_y - (z_c \sin \vartheta + x_c \cos \vartheta \sin \gamma) G + M_{By}; \\
M_{\Sigma z} &= M_z + (y_c \sin \vartheta - x_c \cos \vartheta \cos \gamma) G + M_{Bz}.
\end{aligned}$$

Остается определить проекции X , Y , Z , M_x , M_y , M_z гидродинамической силы \mathbf{F} и момента \mathbf{M} . Традиционно их принято вычислять в следующем виде:

$$\begin{aligned}
X &= c_x q S, & Y &= c_y q S, & Z &= c_z q S; \\
M_x &= m_x q S L, & M_y &= m_y q S L, & M_z &= m_z q S L;
\end{aligned} \tag{1.33}$$

где c_x , c_y , c_z – коэффициенты лобового сопротивления, а также гидродинамических подъемной и боковой сил; m_x , m_y , m_z – коэффициенты гидродинамических моментов крена, рысканья и дифферента; $q = \frac{\rho V^2}{2}$ – скоростной напор; ρ – плотность атмосферы; S – характерная площадь (как правило, площадь миделя); L – характерный линейный размер аппарата (его длина).

В свою очередь, гидродинамические коэффициенты c_x , c_y , c_z , m_x , m_y , m_z являются функциями параметров движения аппарата: его скорости, углов атаки, скольжения, отклонения рулей, угловой скорости и т.д.

Эти коэффициенты рассчитываются по полуэмпирическим методикам либо путем аппроксимации экспериментальных данных и представляются в виде соответствующих таблиц, графиков, формул. Единого универсального представления не существует. Для каждого конкретного аппарата оно может быть уникальным.

В качестве примера приведем простые, но во многих случаях приемлемые по точности зависимости для гидродинамических коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 c_x &= c_x^0 + c_x^{\alpha^2} \alpha^2 + c_x^{\beta^2} \beta^2; \\
 c_y &= c_y^\alpha \alpha + c_y^\delta \delta_z + c_y^{\omega_z} \frac{L}{V} \omega_z; \\
 c_z &= c_z^\beta \beta + c_z^\delta \delta_y + c_z^{\omega_y} \frac{L}{V} \omega_y; \\
 m_x &= m_x^\delta \delta_x + m_x^{\omega_x} \frac{L}{V} \omega_x; \\
 m_y &= m_y^\beta \beta + m_y^\delta \delta_y + m_y^{\omega_y} \frac{L}{V} \omega_y; \\
 m_z &= m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta_z + m_z^{\omega_z} \frac{L}{V} \omega_z;
 \end{aligned} \tag{1.34}$$

где коэффициенты: c_x^0 , $c_x^{\alpha^2}$, $c_x^{\beta^2}$, c_y^α , c_y^δ , $c_y^{\omega_z}$, c_z^β , c_z^δ , $c_z^{\omega_y}$, m_x^δ , $m_x^{\omega_x}$, m_y^β , m_y^δ , $m_y^{\omega_y}$, m_z^α , m_z^δ , $m_z^{\omega_z}$ в первом приближении могут считаться постоянными для каждого конкретного режима движения; δ_z , δ_y , δ_x – углы отклонения органов управления дифферентом, рысканьем и креном; α , β – углы атаки и скольжения, определяемые по формуле:

$$\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x}; \quad \beta = \operatorname{arcsin} \frac{V_z}{V}. \tag{1.35}$$

На рис. 1.1 представлена типичная схема расположения рулей подводного аппарата.

Оси поворота рулей направлены вдоль поперечной и боковой связанных осей. Положительному углу поворота соответствует вектор поворота (или вектор угловой скорости поворота), сонаправленный соответствующей связанной осью. Если этот вектор направлен в противоположную сторону, то угол считается отрицательным. Все углы поворота, изображенные на рисунке, положительны.

Нумеровать рули принято, начиная с верхнего, против часовой стрелки, если смотреть с кормы.

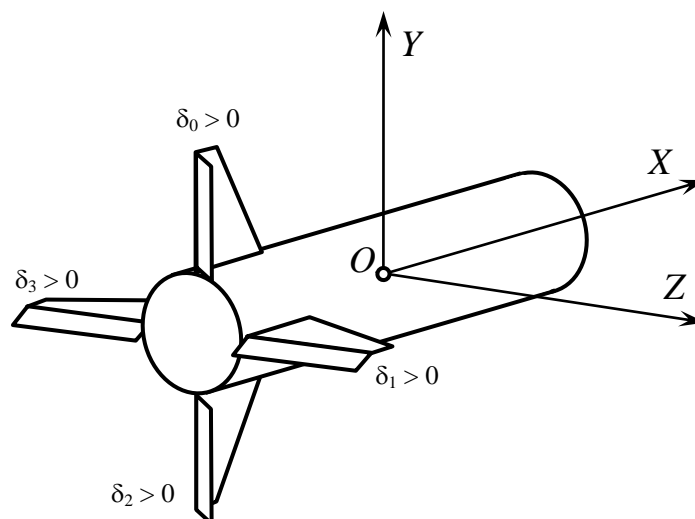


Рис.1.1 - Типичная схема расположения рулей

Для данной схемы расположения рулей имеем:

$$\delta_x = \frac{1}{4}(\delta_0 + \delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \quad \delta_y = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_2), \quad \delta_z = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3). \quad (1.36)$$

1.1.7 Полная система уравнений движения

Выше рассматривались различные части модели движения по-отдельности. Это были: уравнения динамики и кинематики, геометрические связи, формулы для расчета сил и моментов. Многие из них представлены в различных альтернативных вариантах (например, кинематические уравнения), при различных допущениях (уравнения динамики).

Задачей этого раздела является сборка из всего множества рассмотренных вариантов одной замкнутой модели. Эта модель не претендует на самую полную общность или оптимальность, но, с другой стороны, принятые в ней допущения позволяют использовать ее для широкого класса изделий и задач. Она обладает большей точностью, чем это требуется для подавляющего числа исследований. Другими словами, модель годится для проводимых в данной диссертационной работе исследований, хотя требует больших вычислительных затрат.

Следуя традиции, модель записана в скалярном виде, хотя в векторном виде типа (1.8) она выглядела бы более компактно и была бы намного удобнее для программирования на современных языках высокого уровня.

В модели учитываются: гидродинамические силы и моменты, сила и момент от двигательной установки, воздействие силы тяжести и силы Архимеда. Все остальные воздействия (например, инерционные силы за счет вращения Земли) могут рассматриваться в качестве возмущений.

Используются две системы координат: связанная $OXYZ$ и стартовая $O_{II}X_{II}Y_{II}Z_{II}$.

Стартовая система считается инерциальной (вращение Земли не учитывается). Не учитывается также кривизна Земли. Ось $O_{II}Y_{II}$ стартовой системы направлена по местной вертикали вверх, ось $O_{II}X_{II}$ может иметь любое направление в горизонтальной плоскости, ось $O_{II}Z_{II}$ дополняет систему до правой. Начало O_{II} может быть любым, но, как правило, совпадает с точкой старта на поверхности моря.

Начало O связанной системы координат расположено в центре водоизмещения (объема) аппарата. Оси связанной системы совпадают с его главными осями инерции (осями симметрии), таким образом, центробежные моменты инерции аппарата оказываются нулевыми.

В матрице присоединенных масс и моментов инерции ненулевыми считаются только диагональные элементы, а также λ_{26} и λ_{35} .

Массово-геометрические и гидродинамические характеристики фигурируют в модели как константы, но их всегда можно заменить на переменные величины, например, функции времени или других параметров.

Итак, уравнения динамики (1.10) с учетом (1.32) принимают вид:

$$\begin{aligned}
& (m+\lambda_{11})\frac{dV_x}{dt} + mz_c\frac{d\omega_y}{dt} - my_c\frac{d\omega_z}{dt} = -X + P + (A - G) \sin \vartheta + F_{B_x} - \\
& - (m+\lambda_{33})V_z\omega_y + (m+\lambda_{22})V_y\omega_z + (mx_c-\lambda_{35})\omega_y^2 + (mx_c+\lambda_{26})\omega_z^2 - \\
& - my_c\omega_x\omega_y - mz_c\omega_x\omega_z; \\
& (m+\lambda_{22})\frac{dV_y}{dt} - mz_c\frac{d\omega_x}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{d\omega_z}{dt} = Y + (A - G) \cos \vartheta \cos \gamma + F_{B_y} - \\
& - (m+\lambda_{11})V_x\omega_z + (m+\lambda_{33})V_z\omega_x + my_c(\omega_x^2+\omega_z^2) - mz_c\omega_y\omega_z - (mx_c-\lambda_{35})\omega_x\omega_y; \\
& (m+\lambda_{33})\frac{dV_z}{dt} + my_c\frac{d\omega_x}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{d\omega_y}{dt} = Z - (A - G) \cos \vartheta \sin \gamma + F_{B_z} - \quad (1.37) \\
& - (m+\lambda_{22})V_y\omega_x + (m+\lambda_{11})V_x\omega_y + mz_c(\omega_x^2+\omega_y^2) - my_c\omega_y\omega_z - (mx_c+\lambda_{26})\omega_x\omega_z; \\
& (J_{xx}+\lambda_{44})\frac{d\omega_x}{dt} - mz_c\frac{dV_y}{dt} + my_c\frac{dV_z}{dt} = \\
& = M_x + M_P + (y_c \sin \gamma + z_c \cos \gamma) G \cos \vartheta + M_{B_x} + \\
& + my_c(V_x\omega_y - V_y\omega_x) - (\lambda_{26}+\lambda_{35})(V_y\omega_y - V_z\omega_z) - mz_c(V_z\omega_x - V_x\omega_z) - \\
& - [(J_{zz}+\lambda_{66}) - (J_{yy}+\lambda_{55})]\omega_y\omega_z; \\
& (J_{yy}+\lambda_{55})\frac{d\omega_y}{dt} + mz_c\frac{dV_x}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{dV_z}{dt} = \\
& = M_y - (z_c \sin \vartheta + x_c \cos \vartheta \sin \gamma) G + M_{B_y} + \\
& + (mx_c+\lambda_{26})V_y\omega_x - (mx_c-\lambda_{35})V_x\omega_y - mz_c(V_z\omega_y - V_y\omega_z) - \\
& - [(J_{xx}+\lambda_{44}) - (J_{zz}+\lambda_{66})]\omega_x\omega_z; \\
& (J_{zz}+\lambda_{66})\frac{d\omega_z}{dt} - my_c\frac{dV_x}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{dV_y}{dt} = \\
& = M_z + (y_c \sin \vartheta - x_c \cos \vartheta \cos \gamma) G + M_{B_z} - \\
& - (mx_c+\lambda_{26})V_x\omega_z + (mx_c-\lambda_{35})V_z\omega_x - my_c(V_y\omega_z - V_z\omega_y) + \\
& + [(J_{xx}+\lambda_{44}) - (J_{yy}+\lambda_{55})]\omega_x\omega_y.
\end{aligned}$$

Кинематические уравнения (1.11) вращательного движения:

$$\begin{aligned}\frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_y \sin \gamma + \omega_z \cos \gamma; \\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma); \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma).\end{aligned}\quad (1.38)$$

Кинематические уравнения (1.25) поступательного движения с учетом (1.23):

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \sin \psi \sin \gamma & \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma & -\cos \vartheta \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma & -\sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \cos \psi \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Формулы (1.33) для расчета гидродинамических сил и моментов:

$$\begin{aligned}X &= c_x \frac{\rho V^2}{2} S, & Y &= c_y \frac{\rho V^2}{2} S, & Z &= c_z \frac{\rho V^2}{2} S; \\ M_x &= m_x \frac{\rho V^2}{2} S L, & M_y &= m_y \frac{\rho V^2}{2} S L, & M_z &= m_z \frac{\rho V^2}{2} S L.\end{aligned}\quad (1.40)$$

Формулы (1.34) для расчета гидродинамических коэффициентов:

$$\begin{aligned}c_x &= c_x^0 + c_x^\alpha \alpha^2 + c_x^\beta \beta^2; \\ c_y &= c_y^\alpha \alpha + c_y^\delta \delta_z + c_y^{\omega_z} \frac{L}{V} \omega_z; \\ c_z &= c_z^\beta \beta + c_z^\delta \delta_y + c_z^{\omega_y} \frac{L}{V} \omega_y; \\ m_x &= m_x^\delta \delta_x + m_x^{\omega_x} \frac{L}{V} \omega_x; \\ m_y &= m_y^\beta \beta + m_y^\delta \delta_y + m_y^{\omega_y} \frac{L}{V} \omega_y; \\ m_z &= m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta_z + m_z^{\omega_z} \frac{L}{V} \omega_z.\end{aligned}\quad (1.41)$$

Формулы (1.35) для расчета углов атаки и скольжения:

$$\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{V_y}{V_x}; \quad \beta = \operatorname{arcsin} \frac{V_z}{V}. \quad (1.42)$$

Формулы (1.36) для перерасчета отклонений рулей по каналам управления:

$$\delta_x = \frac{1}{4}(\delta_0 + \delta_1 - \delta_2 - \delta_3), \quad \delta_y = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_2), \quad \delta_z = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_3). \quad (1.43)$$

Для моделирования движения по формулам (1.37)–(1.43) необходимо задать:

- значения всех массово-геометрических и гидродинамических характеристик;
- начальные условия движения;
- углы отклонения рулей.

Еще раз отметим, что модель (1.37)–(1.43) обладает высокой степенью общности за исключением, пожалуй, выражений (1.41) для расчета гидродинамических коэффициентов, которые часто рассчитываются по уникальным для конкретного аппарата методикам. Тем не менее, большинство этих методик в первом приближении можно представить в виде (1.41).

1.2 Линеаризованная модель движения подводного аппарата

Рассмотренная выше нелинейная модель движения является достаточно точной, но требует значительных вычислительных затрат. В ряде случаев столь высокая точность не требуется, следовательно, можно упростить модель, уменьшив тем самым вычислительные затраты. Также не столь важным оказывается уменьшение вычислительных затрат, сколь упрощение структуры модели и самих уравнений. В этих случаях удастся применить принципиально иные, более мощные методы исследований, не только численные, но и теоретические. Например, для линейных моделей становятся применимыми классические методы синтеза теории автоматического управления, что крайне затруднительно при использовании численных методов.

В теории полета наиболее мощными приемами упрощения уравнений движения являются:

- разделение движения на короткопериодическое и длиннопериодическое;
- линеаризация;
- разделение модели на продольное, боковое и движение по крену.

Используем эти приемы для получения линеаризованных уравнений движения по крену, рысканью и глубине.

Представим вектор \mathbf{x} параметров движения в виде:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \Delta\mathbf{x}; \quad (1.44)$$

где \mathbf{x}^* – постоянные параметры установившегося (номинального) движения; $\Delta\mathbf{x}$ – малые отклонения параметров движения от их номинальных значений.

Малыми будем также считать отклонения центра масс аппарата от его продольной оси:

$$y_c, z_c \approx 0.$$

Синус и косинус от параметра движения x_i представим в следующем виде

$$\sin x_i = \sin(x_i^* + \Delta x_i) = \sin x_i^* \cos \Delta x_i + \cos x_i^* \sin \Delta x_i \approx \sin x_i^* + \Delta x_i \cos x_i^*;$$

$$\cos x_i = \cos(x_i^* + \Delta x_i) = \cos x_i^* \cos \Delta x_i - \sin x_i^* \sin \Delta x_i \approx \cos x_i^* - \Delta x_i \sin x_i^*.$$

В частности, если $x_i^* = 0$, то

$$\sin x_i \approx \Delta x_i; \quad \cos x_i \approx 1.$$

Обозначим $V_x^* = V$. Кроме того, следующие параметры номинального движения будем считать нулевыми:

$$V_x^* = V; \quad V_y^* = V_z^* = \omega_x^* = \omega_y^* = \omega_z^* = \gamma^* = 0. \quad (1.45)$$

Подставляя приведенные выражения в (1.37) и пренебрегая слагаемыми второго порядка малости и выше (считаем, например, $\Delta x_i \Delta x_j \sim 0^2$), получим следующую модель движения:

$$\begin{aligned}
(m+\lambda_{11})\frac{d\Delta V_x}{dt} &= -X + P + (A - G) (\sin \vartheta^* + \cos \vartheta^* \Delta \vartheta) + F_{Bx}; \\
(m+\lambda_{22})\frac{d\Delta V_y}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{d\Delta \omega_z}{dt} + (m+\lambda_{11})V\Delta \omega_z &= \\
&= Y + (A - G) (\cos \vartheta^* - \sin \vartheta^* \Delta \vartheta) + F_{By}; \\
(m+\lambda_{33})\frac{d\Delta V_z}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{d\Delta \omega_y}{dt} - (m+\lambda_{11})V\Delta \omega_y &= \\
&= Z - (A - G) \cos \vartheta^* \Delta \gamma + F_{Bz}; \\
(J_{xx}+\lambda_{44})\frac{d\Delta \omega_x}{dt} &= \\
&= M_x + M_P + (\cos \vartheta^* - \sin \vartheta^* \Delta \vartheta) z_c G + M_{Bx}; \\
(J_{yy}+\lambda_{55})\frac{d\Delta \omega_y}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{d\Delta V_z}{dt} + (mx_c-\lambda_{35})V\Delta \omega_y &= \\
&= M_y - (z_c \sin \vartheta^* + x_c \cos \vartheta^* \Delta \gamma) G + M_{By}; \\
(J_{zz}+\lambda_{66})\frac{d\Delta \omega_z}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{d\Delta V_y}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})V\Delta \omega_z &= \\
&= M_z + (y_c \sin \vartheta^* - x_c \cos \vartheta^*) G + M_{Bz}.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

В правых частях полученных уравнений фигурируют слагаемые с множителями A и G , соответствующие плавучести аппарата и моменту от силы тяжести. Отнесем эти слагаемые к возмущающим воздействиям \mathbf{F}_B , \mathbf{M}_B . Сюда же отнесем и момент от двигателя M_P .

С учетом сказанного, опуская символ Δ , перепишем систему (1.46) в виде:

$$\begin{aligned}
(m+\lambda_{11})\frac{dV_x}{dt} &= -X + P + F_{B_x}; \\
(m+\lambda_{22})\frac{dV_y}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{d\omega_z}{dt} + (m+\lambda_{11})V\omega_z &= Y + F_{B_y}; \\
(m+\lambda_{33})\frac{dV_z}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{d\omega_y}{dt} - (m+\lambda_{11})V\omega_y &= Z + F_{B_z}; \\
(J_{xx}+\lambda_{44})\frac{d\omega_x}{dt} &= M_x + M_{B_x}; \\
(J_{yy}+\lambda_{55})\frac{d\omega_y}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{dV_z}{dt} + (mx_c-\lambda_{35})V\omega_y &= M_y + M_{B_y}; \\
(J_{zz}+\lambda_{66})\frac{d\omega_z}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})\frac{dV_y}{dt} + (mx_c+\lambda_{26})V\omega_z &= M_z + M_{B_z}.
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Система (1.47) является линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, неразрешенной относительно производных. Но в ней еще не раскрыты выражения для гидродинамических сил и моментов, которые также линейно зависят от параметров движения (см. (1.41)).

Проведенные упрощения позволили добиться не только линейности уравнений движения, но и разделения модели на независимые подсистемы, соответствующие: изменению скорости аппарата (первое уравнение); вращательному движению по крену (четвертое уравнение); продольному движению в вертикальной плоскости (второе и шестое уравнения) и боковому движению в горизонтальной плоскости (третье и пятое уравнения).

Рассмотрим эти подсистемы по отдельности, исключая первое уравнение, которое имеет тривиальное решение.

1.2.1 Движение по крену

Выпишем из (1.47) четвертое уравнение, соответствующее движению крена:

$$(J_{xx} + \lambda_{44}) \frac{d\omega_x}{dt} = M_x + M_{B_x}. \quad (1.48)$$

Из (1.40), (1.41) имеем

$$M_x = m_x \frac{\rho V^2}{2} S L = (m_x^\delta \delta_x + m_x^{\omega_x} \frac{L}{V} \omega_x) \frac{\rho V^2}{2} S L.$$

Подставляя выражение для M_x в (1.48) получим:

$$(J_{xx} + \lambda_{44}) \frac{d\omega_x}{dt} = (m_x^\delta \delta_x + m_x^{\omega_x} \frac{L}{V} \omega_x) \frac{\rho V^2}{2} S L + M_{B_x}. \quad (1.49)$$

Вводя формально оператор дифференцирования

$$p = \frac{d}{dt};$$

перепишем (1.49) в виде

$$(U_1 p + U_2 V) \omega_x = U_3 V^2 \delta_x + M_{B_x}. \quad (1.50)$$

где:

$$U_1 = J_{xx} + \lambda_{44}, \quad U_2 = -\frac{1}{2} m_x^{\omega_x} \rho S L^2, \quad U_3 = \frac{1}{2} m_x^\delta \rho S L.$$

Из (1.50) можно получить передаточные функции для угловой скорости крена ω_x по управляющему δ_x и возмущающему M_{B_x} воздействиям:

$$W_{\delta}^{\omega_x} = \frac{U_3 V^2}{U_1 p + U_2 V}; \quad W_{M_{B_x}}^{\omega_x} = \frac{1}{U_1 p + U_2 V}. \quad (1.51)$$

Поскольку передаточные функции $W_{\delta}^{\omega_x}$ и $W_{M_{B_x}}^{\omega_x}$ отличаются постоянным множителем $U_3 V^2$, то учет возмущающего момента M_{B_x} можно производить по двум эквивалентным схемам (рис. 1.2).

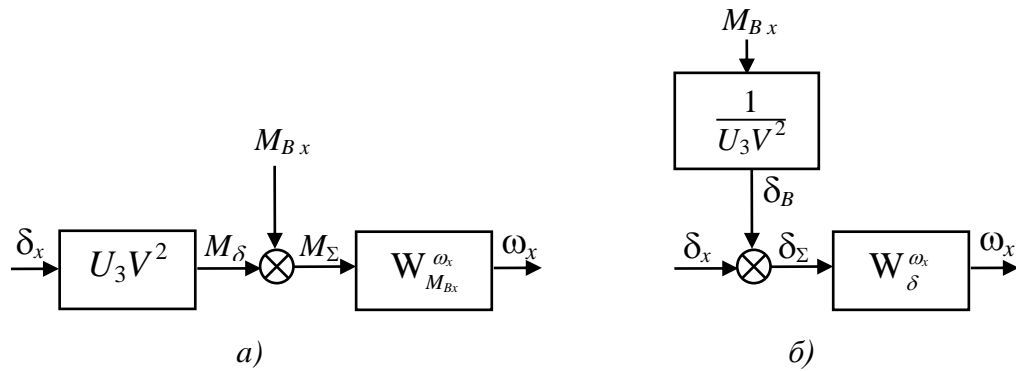


Рис.1.2 - Эквивалентные схемы учета возмущений

Если на аппарат действует постоянный возмущающий момент, а таковым в частности является момент от двигателя M_p , то он приведет к систематическому (т. н. балансировочному) отклонению рулей. Это отклонение соответствует установившемуся движению, когда угловая скорость равна нулю. Подставив $\omega_x = 0$ в (1.50) получим

$$\delta_x^{bal} = \frac{-1}{U_3 V^2} M_{Bx}^{cism}. \quad (1.52)$$

Передаточные функции можно представить в виде т. н. элементарных звеньев. $W_{\delta}^{\omega_x}$ соответствует аperiodическому звену

$$W_{\delta}^{\omega_x} = \frac{U_3 V^2}{U_1 p + U_2 V} = \frac{\frac{U_3}{U_2} V}{\frac{U_1}{U_2} \frac{1}{V} p + 1} = \frac{K_x V}{T_x p + 1}. \quad (1.53)$$

Здесь обозначено $K_x = U_3/U_2$, $T_x = U_1/U_2$.

1.2.2 Боковое движение

Выпишем из (1.47) третье и пятое уравнения, соответствующие боковому движению:

$$\begin{aligned}
(m+\lambda_{33})\frac{dV_z}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{d\omega_y}{dt} - (m+\lambda_{11})V\omega_y &= Z + F_{Bz}; \\
(J_{yy}+\lambda_{55})\frac{d\omega_y}{dt} - (mx_c-\lambda_{35})\frac{dV_z}{dt} + (mx_c-\lambda_{35})V\omega_y &= M_y + M_{By}.
\end{aligned} \tag{1.54}$$

Из (1.40), (1.41) имеем

$$\begin{aligned}
Z &= c_z \frac{\rho V^2}{2} S = (c_z^\beta \beta + c_z^\delta \delta_y + c_z^{\omega_y} \frac{L}{V} \omega_y) \frac{\rho V^2}{2} S; \\
M_y &= m_y \frac{\rho V^2}{2} S L = (m_y^\beta \beta + m_y^\delta \delta_y + m_y^{\omega_y} \frac{L}{V} \omega_y) \frac{\rho V^2}{2} S L.
\end{aligned}$$

Кроме того, угол скольжения (см. (1.35)) и его производную можно приблизительно определить следующим образом

$$\beta = \arcsin \frac{V_z}{V} \approx \frac{V_z}{V}, \quad \frac{d\beta}{dt} \approx \frac{1}{V} \frac{dV_z}{dt}.$$

С учетом чего (1.54) примет вид:

$$\begin{aligned}
(m+\lambda_{33})V\frac{d\beta}{dt} - c_z^\beta \frac{\rho V^2}{2} S \beta - (mx_c-\lambda_{35})\frac{d\omega_y}{dt} - (m + \lambda_{11} + \frac{\rho}{2} c_z^{\omega_y} SL)V\omega_y &= \\
= c_z^\delta \frac{\rho V^2}{2} S \delta_y + F_{Bz}; \\
(\lambda_{35}-mx_c)V\frac{d\beta}{dt} - m_y^\beta \frac{\rho V^2}{2} SL\beta + (J_{yy}+\lambda_{55})\frac{d\omega_y}{dt} + (mx_c - \lambda_{35} - \frac{\rho}{2} m_y^{\omega_y} SL^2)V\omega_y &= \\
= m_y^\delta \frac{\rho V^2}{2} S L \delta_y + M_{By}.
\end{aligned}$$

Далее, вводя оператор дифференцирования p , а также обозначения

$$\begin{aligned}
E_1 &= m + \lambda_{33}, \quad E_2 = -\frac{\rho}{2} S c_z^\beta, \quad E_3 = \lambda_{35} - mx_c, \\
E_4 &= -m - \lambda_{11} - \frac{\rho}{2} SL c_z^{\omega_y}, \quad E_5 = 1, \quad E_6 = \frac{\rho}{2} S c_z^\delta; \\
E_7 &= \lambda_{35} - mx_c, \quad E_8 = -\frac{\rho}{2} SL m_y^\beta, \quad E_9 = J_{yy} + \lambda_{55}, \\
E_{10} &= mx_c - \lambda_{35} - \frac{\rho}{2} SL^2 m_y^{\omega_y}, \quad E_{11} = 1, \quad E_{12} = \frac{\rho}{2} SL m_y^\delta;
\end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} (E_1 V p + E_2 V^2) \beta + (E_3 p + E_4 V) \omega_y &= E_5 F_{Bz} + E_6 V^2 \delta_y; \\ (E_7 V p + E_8 V^2) \beta + (E_9 p + E_{10} V) \omega_y &= E_{11} M_{By} + E_{12} V^2 \delta_y. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Решая систему уравнений (1.55) относительно β , ω_y находим

$$\begin{aligned} \omega_y &= W_{\delta}^{\omega_y} \delta_y + W_F^{\omega_y} F_{Bz} + W_M^{\omega_y} M_{By}; \\ \beta &= W_{\delta}^{\beta} \delta_y + W_F^{\beta} F_{Bz} + W_M^{\beta} M_{By}; \end{aligned} \quad (1.56)$$

где

$$W_{\delta}^{\omega_y} = \frac{(E_1 E_{12} - E_6 E_7) V^2 p + (E_{12} E_2 - E_6 E_8) V^3}{D_y};$$

$$W_F^{\omega_y} = \frac{-E_7 p - E_8 V}{D_y}; \quad W_M^{\omega_y} = \frac{E_1 p + E_2 V}{D_y};$$

$$W_{\delta}^{\beta} = \frac{(E_9 E_6 - E_3 E_{12}) V p + (E_{10} E_6 - E_4 E_{12}) V^2}{D_y};$$

$$W_F^{\beta} = \frac{\frac{E_9}{V} p + E_{10}}{D_y}; \quad W_M^{\beta} = \frac{\frac{-E_3}{V} p - E_4}{D_y};$$

$$D_y = (E_1 E_9 - E_7 E_3) p^2 + (E_1 E_{10} + E_2 E_9 - E_7 E_4 - E_8 E_3) V p + (E_2 E_{10} - E_8 E_4) V^2.$$

Введем следующие обозначения для коэффициентов передаточных функций:

$$F_1 = E_1 E_{12} - E_6 E_7, \quad F_0 = E_2 E_{12} - E_6 E_8;$$

$$H_2 = E_1 E_9 - E_7 E_3, \quad H_1 = E_1 E_{10} + E_2 E_9 - E_7 E_4 - E_8 E_3, \quad H_0 = E_2 E_{10} - E_8 E_4;$$

$$Q_1 = E_9 E_6 - E_3 E_{12}, \quad Q_0 = E_{10} E_6 - E_4 E_{12}.$$

Тогда можно записать более кратко

$$W_{\delta}^{\omega_y} = \frac{F_1 V^2 p + F_0 V^3}{D_y}, \quad W_F^{\omega_y} = \frac{-E_7 p - E_8 V}{D_y}, \quad W_M^{\omega_y} = \frac{E_1 p + E_2 V}{D_y};$$

$$W_{\delta}^{\beta} = \frac{Q_1 V p + Q_0 V^2}{D_y}, \quad W_F^{\beta} = \frac{\frac{E_9}{V} p + E_{10}}{D_y}, \quad W_M^{\beta} = \frac{\frac{-E_3}{V} p - E_4}{D_y}; \quad (1.57)$$

$$D_y = H_2 p^2 + H_1 V p + H_0 V^2.$$

Если возмущающие сила F_{B_z} и/или момент M_{B_y} постоянны или имеют систематические составляющие, то соответствующие им балансировочные углы β и δ_y можно найти, подставив в (1.56) $\omega_y = p = 0$:

$$\delta_y^{\text{бал}} = \frac{E_8}{F_0 V^2} F_{B_z}^{\text{сист}} - \frac{E_2}{F_0 V^2} M_{B_y}^{\text{сист}}; \quad \beta^{\text{бал}} = \frac{E_{12}}{F_0 V^2} F_{B_z}^{\text{сист}} - \frac{E_6}{F_0 V^2} M_{B_y}^{\text{сист}}. \quad (1.58)$$

Как правило, подводные аппараты имеют осесимметричную форму, поэтому систематические возмущающие сила и момент в боковом движении близки к нулю (в основном вызваны технологическими погрешностями изготовления корпуса и т. п.).

1.2.3 Продольное движение

Выпишем из (1.47) второе и шестое уравнения, соответствующие продольному движению:

$$(m + \lambda_{22}) \frac{dV_y}{dt} + (m x_c + \lambda_{26}) \frac{d\omega_z}{dt} + (m + \lambda_{11}) V \omega_z = Y + F_{B_y}; \quad (1.59)$$

$$(J_{zz} + \lambda_{66}) \frac{d\omega_z}{dt} + (m x_c + \lambda_{26}) \frac{dV_y}{dt} + (m x_c + \lambda_{26}) V \omega_z = M_z + M_{B_z}.$$

Из (1.40), (1.41) имеем

$$Y = c_y \frac{\rho V^2}{2} S = (c_y^{\alpha} \alpha + c_y^{\delta} \delta_z + c_y^{\omega_z} \frac{L}{V} \omega_z) \frac{\rho V^2}{2} S;$$

$$M_z = m_z \frac{\rho V^2}{2} S L = (m_z^{\alpha} \alpha + m_z^{\delta} \delta_z + m_z^{\omega_z} \frac{L}{V} \omega_z) \frac{\rho V^2}{2} S L.$$

Кроме того, угол атаки и его производную можно приблизительно определить следующим образом (см. (1.35))

$$\alpha = -\arctg \frac{V_y}{V_x} \approx \frac{-V_y}{V}, \quad \frac{d\alpha}{dt} \approx \frac{-1}{V} \frac{dV_y}{dt}. \quad (1.60)$$

С учетом чего (1.59) примет вид:

$$\begin{aligned} -(m+\lambda_{22})V \frac{d\alpha}{dt} - c_y^\alpha \frac{\rho V^2}{2} S \alpha + (mx_c + \lambda_{26}) \frac{d\omega_z}{dt} + (m + \lambda_{11} - \frac{\rho}{2} c_y^{\omega_z} SL) V \omega_z = \\ = c_y^\delta \frac{\rho V^2}{2} S \delta_z + F_{By}; \\ -(mx_c + \lambda_{26})V \frac{d\alpha}{dt} - m_z^\alpha \frac{\rho V^2}{2} SL \alpha + (J_{zz} + \lambda_{66}) \frac{d\omega_z}{dt} + (mx_c + \lambda_{26} - \frac{\rho}{2} m_z^{\omega_z} SL^2) V \omega_z = \\ = m_z^\delta \frac{\rho V^2}{2} S L \delta_z + M_{Bz}. \end{aligned}$$

Далее, вводя оператор дифференцирования p , а также обозначения

$$\begin{aligned} C_1 = -m - \lambda_{22}, \quad C_2 = -\frac{\rho}{2} S c_y^\alpha, \quad C_3 = mx_c + \lambda_{26}; \\ C_4 = m + \lambda_{11} - \frac{\rho}{2} c_y^{\omega_z} SL, \quad C_5 = 1, \quad C_6 = \frac{\rho}{2} S c_y^\delta; \\ C_7 = -mx_c - \lambda_{26}, \quad C_8 = -\frac{\rho}{2} S L m_z^\alpha, \quad C_9 = J_{zz} + \lambda_{66}; \\ C_{10} = mx_c + \lambda_{26} - \frac{\rho}{2} m_z^{\omega_z} SL^2, \quad C_{11} = 1, \quad C_{12} = \frac{\rho}{2} S L m_z^\delta; \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} (C_1 V p + C_2 V^2) \alpha + (C_3 p + C_4 V) \omega_z = C_5 F_{By} + C_6 V^2 \delta_z; \\ (C_7 V p + C_8 V^2) \alpha + (C_9 p + C_{10} V) \omega_z = C_{11} M_{Bz} + C_{12} V^2 \delta_z. \end{aligned} \quad (1.61)$$

Сравнивая (1.61) с (1.55) можно видеть, что они совпадают с точностью до обозначений. Поэтому, проводя выкладки, аналогичные боковому движению, придем к следующему результату

$$\begin{aligned} \omega_z = W_\delta^{\omega_z} \delta_z + W_F^{\omega_z} F_{By} + W_M^{\omega_z} M_{Bz}; \\ \alpha = W_\delta^\alpha \delta_z + W_F^\alpha F_{By} + W_M^\alpha M_{Bz}; \end{aligned} \quad (1.62)$$

где

$$W_{\delta}^{\omega_z} = \frac{O_1 V^2 p + O_0 V^3}{D_z}, \quad W_F^{\omega_z} = \frac{-C_7 p - C_8 V}{D_z}, \quad W_M^{\omega_z} = \frac{C_1 p + C_2 V}{D_z};$$

$$W_{\delta}^{\alpha} = \frac{D_1 V p + D_0 V^2}{D_z}, \quad W_F^{\alpha} = \frac{\frac{C_9}{V} p + C_{10}}{D_z}, \quad W_M^{\alpha} = \frac{\frac{-C_3}{V} p - C_4}{D_z};$$

$$D_z = R_2 p^2 + R_1 V p + R_0 V^2;$$

$$O_1 = C_1 C_{12} - C_6 C_7, \quad O_0 = C_2 C_{12} - C_6 C_8;$$

$$R_2 = C_1 C_9 - C_7 C_3, \quad R_1 = C_1 C_{10} + C_2 C_9 - C_7 C_4 - C_8 C_3, \quad R_0 = C_2 C_{10} - C_8 C_4;$$

$$D_1 = C_9 C_6 - C_3 C_{12}, \quad D_0 = C_{10} C_6 - C_4 C_{12}.$$

Аналогично боковому движению определяются балансирующие углы α и δ_z :

$$\delta_z^{\text{бал}} = \frac{C_8}{O_0 V^2} F_{By} - \frac{C_2}{O_0 V^2} M_{Bz}; \quad \alpha^{\text{бал}} = \frac{C_{12}}{O_0 V^2} F_{By} - \frac{C_6}{O_0 V^2} M_{Bz}. \quad (1.63)$$

В отличие от бокового, в продольном движении практически всегда существуют систематические возмущающие сила (плавучесть) и момент (от силы тяжести). Выражения для них присутствуют во втором и шестом уравнениях модели (1.46):

$$F_{By}^{\text{сист}} = (A - G) \cos \vartheta^*, \quad M_{Bz}^{\text{сист}} = -x_c \cos \vartheta^* G.$$

Подставляя эти выражения в (1.63) найдем соответствующие балансирующие углы

$$\delta_z^{\text{бал}} = \frac{C_8}{O_0 V^2} (A - G) \cos \vartheta^* + \frac{C_2}{O_0 V^2} x_c \cos \vartheta^* G;$$

$$\alpha^{\text{бал}} = \frac{C_{12}}{O_0 V^2} (A - G) \cos \vartheta^* + \frac{C_6}{O_0 V^2} x_c \cos \vartheta^* G. \quad (1.64)$$

Другим существенным отличием продольного движения от бокового являются повышенные требования к точности выдерживания аппаратом заданной глубины хода. Для этих целей аппарат снабжают датчиками глубины, показания которых используются системой стабилизации. Для решения подобных задач

необходимо моделировать изменение глубины. Разработаем соответствующую модель.

Согласно определению используемой инерциальной системы координат $O_{II}X_{II}Y_{II}Z_{II}$ ее ось $O_{II}Y_{II}$ совпадает с направлением местной вертикали, а ее начало O_{II} располагается на поверхности моря. В этом случае глубина h равна координате y вектора \mathbf{R} положения аппарата в проекциях на оси $O_{II}X_{II}Y_{II}Z_{II}$, взятой с противоположным знаком

$$h = -y.$$

В свою очередь изменение координаты y описывается вторым уравнением системы (1.39)

$$\frac{dy}{dt} = V_x \sin \vartheta + V_y \cos \vartheta \cos \gamma - V_z \cos \vartheta \sin \gamma.$$

Линеаризуем эти формулы, считая $\vartheta^* = \gamma^* = 0$:

$$\frac{dh}{dt} \approx -V\Delta\vartheta - V_y.$$

Вспомнив, что $V_y \approx -V\alpha$ (см. (1.60)), и опуская символ Δ , получаем окончательно:

$$\frac{dh}{dt} \approx V(\alpha - \vartheta). \quad (1.65)$$

Кроме того, из первого уравнения (1.11), при условии $\gamma \approx 0$, получаем

$$\frac{d\vartheta}{dt} \approx \omega_z. \quad (1.66)$$

Две последние формулы позволяют моделировать изменение глубины по схеме, изображенной на рис. 1.3.

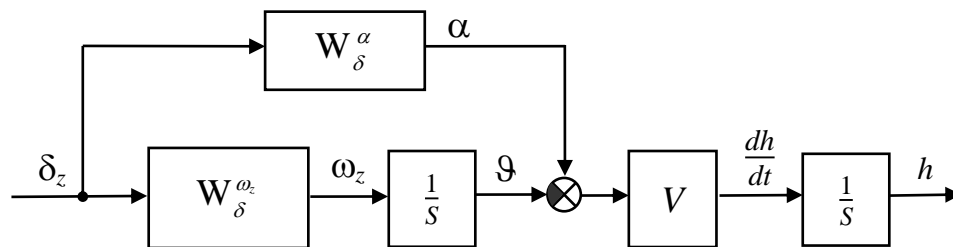


Рис. 1.3 - Моделирование глубины

1.3 Практическая реализация моделирования движения подводного аппарата

Приведенная выше линеаризованная модель движения подводного аппарата реализована в виде программного обеспечения. На рисунке 1.4 приведена укрупненная блок-схема программы, моделирующая:

- движение подводного аппарата;
- показания бортовой навигационной системы;
- отклонения рулей подводного аппарата.

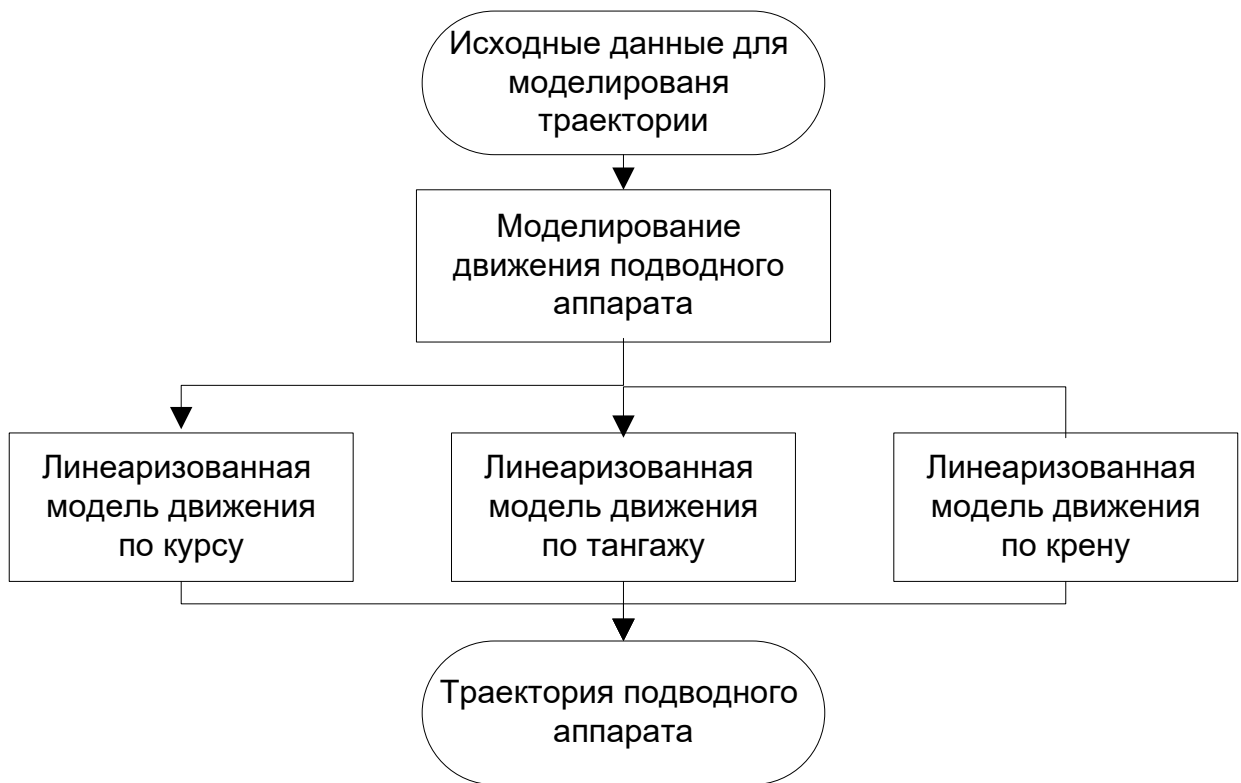


Рисунок 1.4 - Блок-схема программы линеаризованной модели движения подводного аппарата

Результаты моделирования движения подводного аппарата с использованием разработанного программного обеспечения приведены на рисунках 1.5 - 1.10.

На рисунках 1.5 и 1.6 приведена траектория подводного аппарата в горизонтальной и вертикальной плоскостях.

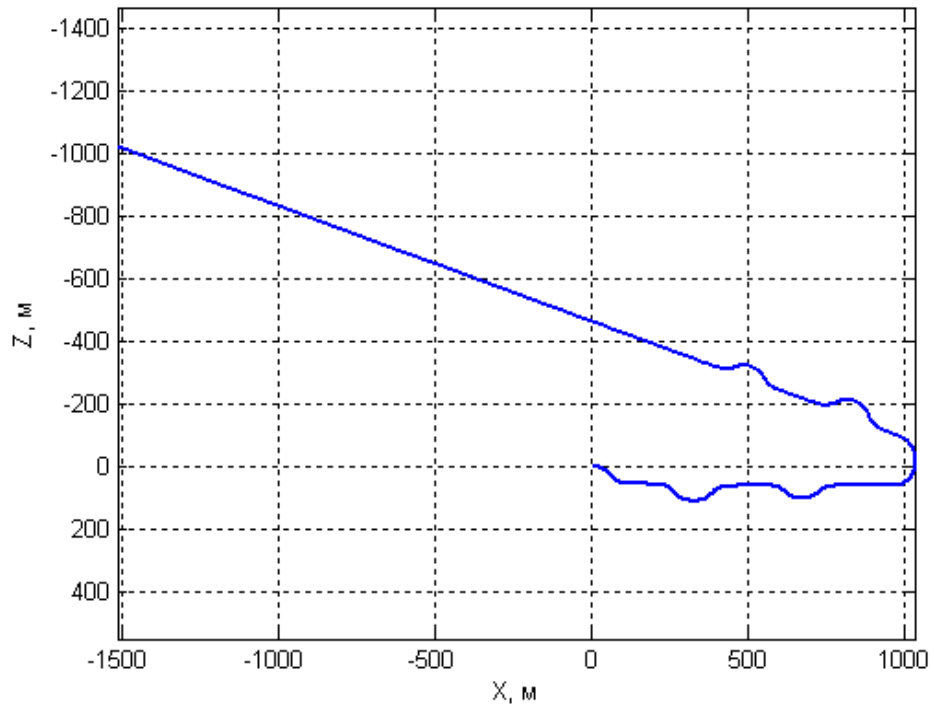


Рисунок 1.5 - Траектория движения подводного аппарата в горизонтальной плоскости

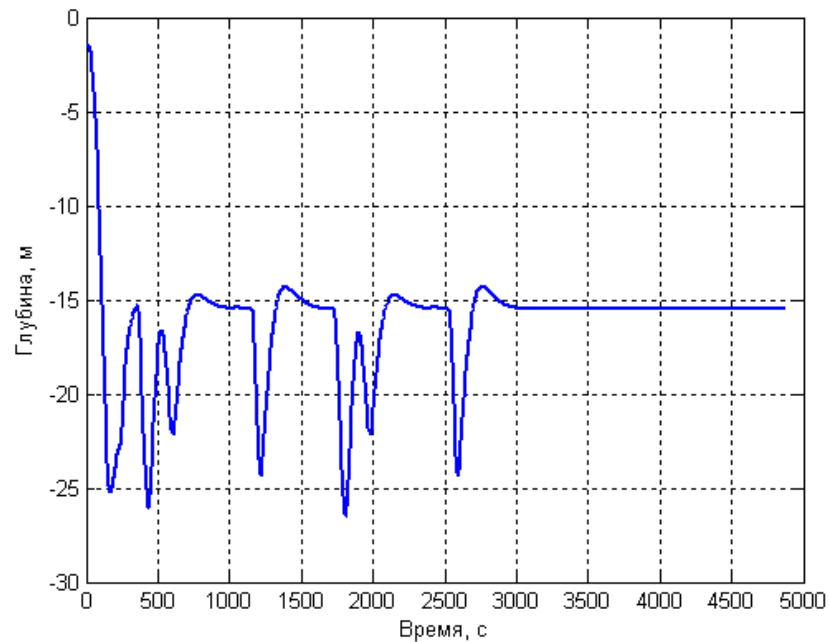


Рисунок 1.6 - Траектория движения подводного аппарата в вертикальной плоскости

На рисунках 1.7 и 1.8 показаны углы ориентации подводного аппарата и скорости изменения углов ориентации подводного аппарата.

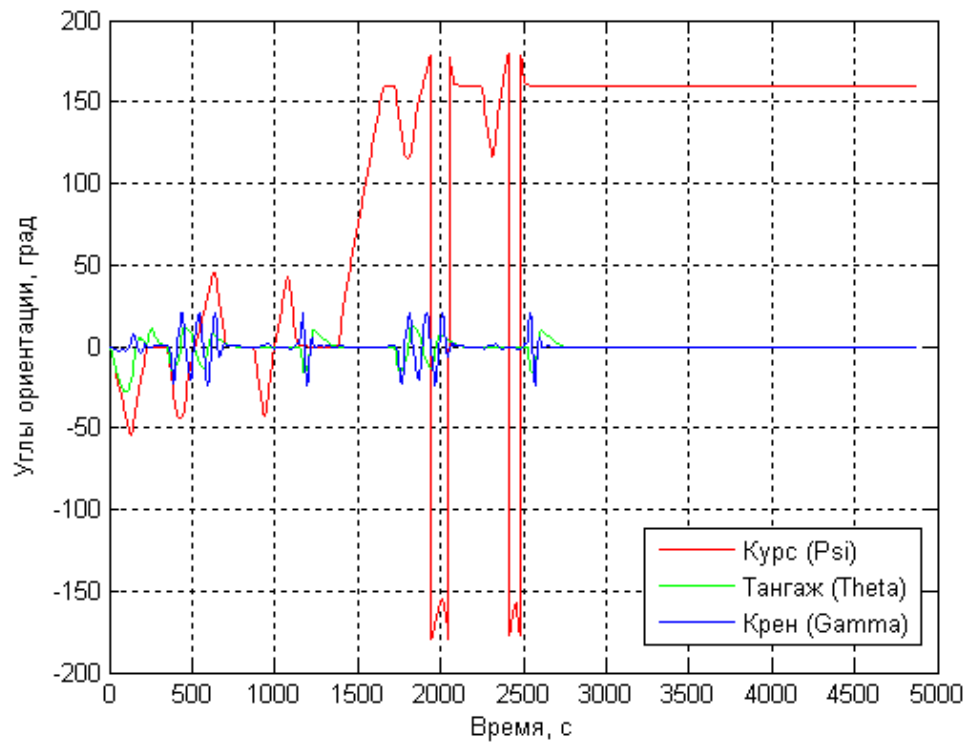


Рисунок 1.7 - Углы ориентации подводного аппарата

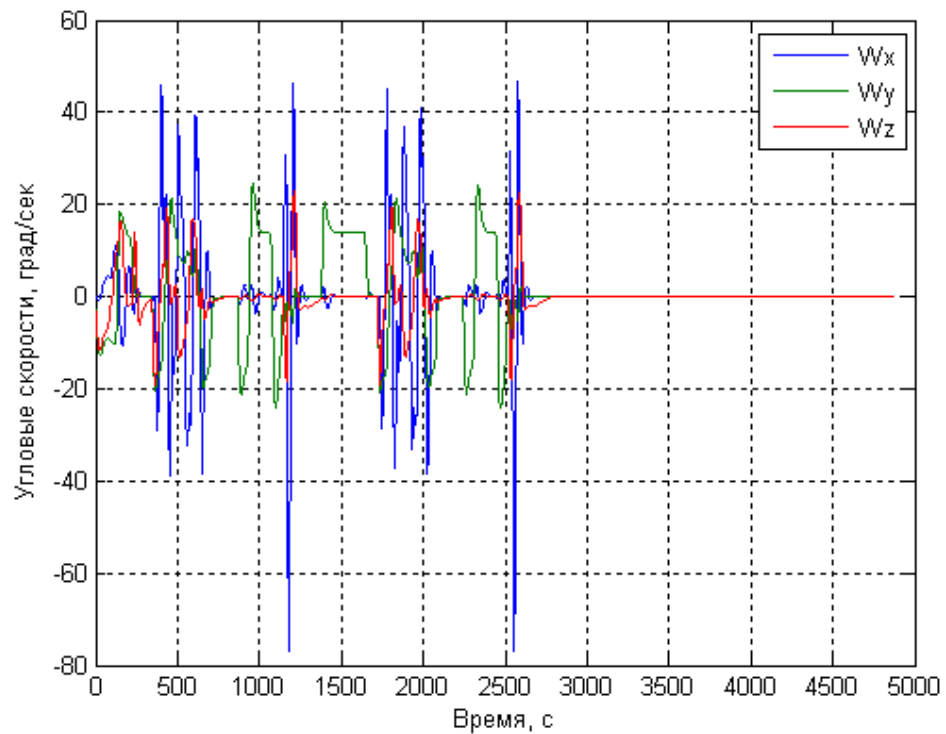


Рисунок 1.8 - Угловые скорости подводного аппарата

На рисунке 1.9 показана скорость подводного аппарата.

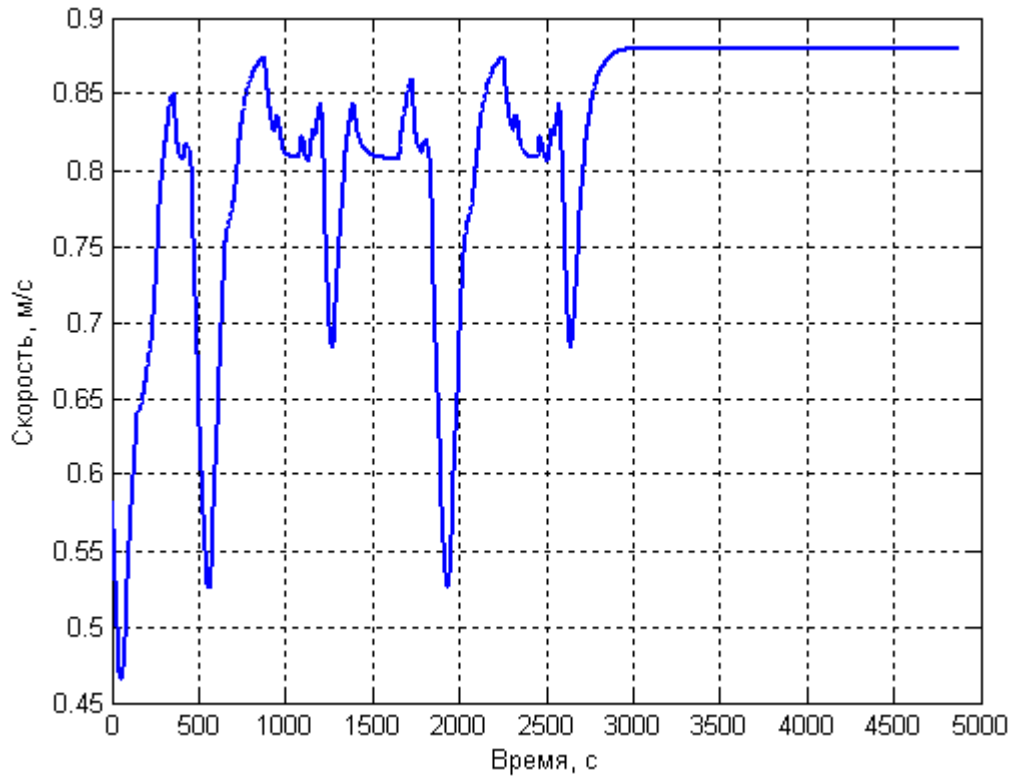


Рисунок 1.9 - Скорость подводного аппарата

На рисунке 1.10 показано отклонение вертикальных и горизонтальных рулей подводного аппарата.

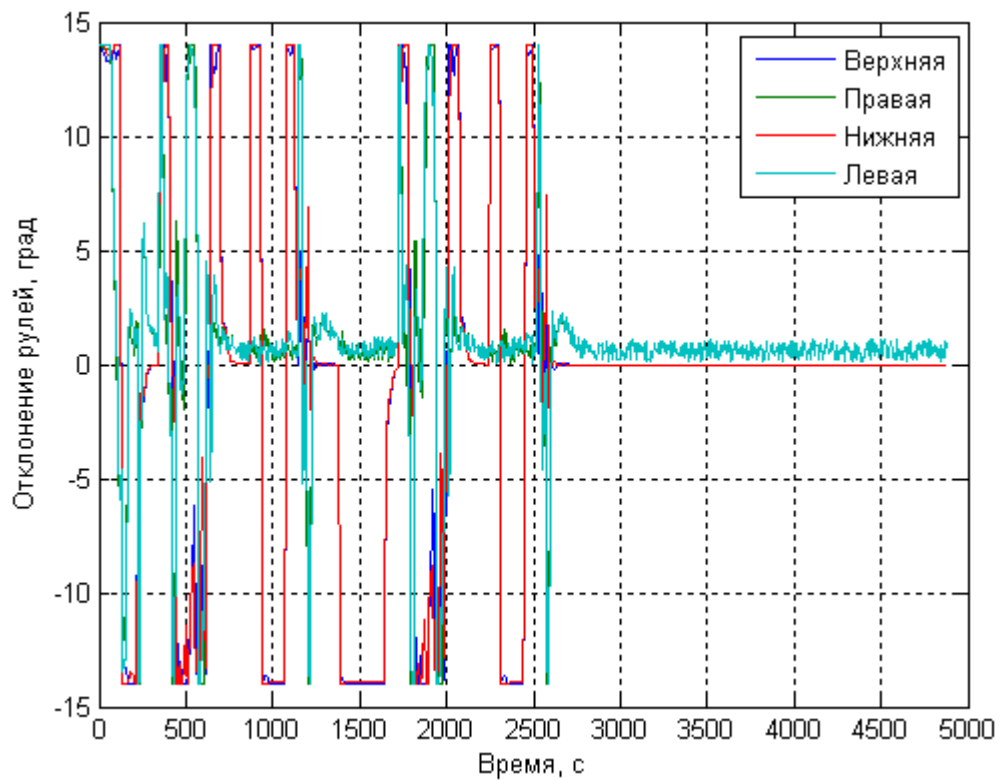


Рисунок 1.10 - Отклонение рулей подводного аппарата

1.4 Выводы к главе 1

1. Рассмотрена задача моделирования движения подводного аппарата. Приведены уравнения движения подводного аппарата, описывающие его движение в различных формах. Данные уравнения используются при решении задачи навигации подводного аппарата с использованием измерений от инерциальной навигационной системы и магнитометра.
2. Приведены уравнения динамики подводного аппарата, дополненные различными альтернативными вариантами кинематических уравнений, основанных на: углах ориентации, матрице направляющих косинусов и параметрах Родрига-Гамильтона. Приведены формулы расчета одного набора кинематических параметров на основе другого.
3. Приведены модели основных воздействий на аппарат: сил тяжести и Архимеда, двигательной установки, гидродинамических сил и моментов, включая силы и моменты от рулей.
4. Рассмотрена упрощенная модель движения с использованием метода линеаризации и разделения движения на боковое, продольное и вращательное. Данная упрощенная модель не требует значительных вычислительных затрат и может использоваться при приближенных расчетах.
5. На основе представленных моделей разработано программное математическое обеспечение моделирования движения подводного аппарата. Приведены результаты моделирования движения подводного аппарата с использованием разработанного программного обеспечения.

2 Моделирование инерциальной навигационной системы

В данной главе приводятся математические модели, описывающие работу инерциальной навигационной системы. Сюда относятся модели датчиков и устройств, а также алгоритмы первичной и последующей обработки их показаний.

Приведены модели работы следующих датчиков: блока чувствительных элементов и датчиков глубины. Также рассмотрены алгоритмы первичной обработки показаний датчиков, в том числе с учетом систематических погрешностей.

Приведены алгоритмы вторичной обработки измерений, выходом которых являются оценки координат и параметров ориентации подводного аппарата. Даются традиционные алгоритмы, а также проводится анализ их использования для подводных аппаратов.

В отдельном разделе приводятся математические модели датчиков. На вход таких моделей поступают параметры движения подводного аппарата, а на выходе – значения сигналов в том виде, в котором они поступают в вычислительную систему подводного аппарата (счетчики импульсов, коды АЦП).

На основе приведенных алгоритмов разработано программное математическое обеспечение моделирования работы инерциальной навигационной системы подводного аппарата.

2.1 Блок чувствительных элементов

2.1.1 Устройство блока чувствительных элементов

Используемый на подводном аппарате комплект датчиков угловой скорости и акселерометров обычно поставляется в виде блока чувствительных элементов (БЧЭ). Этот блок предназначен для преобразования параметров

движения объекта (угловых скоростей и линейных ускорений, действующих по его осям чувствительности x , y , z) в электрические сигналы.

В качестве чувствительных элементов предлагается использовать:

- два динамически настраиваемых роторных вибрационных гироскопа, каждый из которых имеет две оси чувствительности (рис. 2.1–2.2);
- три маятниковых капиллярных акселерометра (рис. 2.3);
- три встроенных датчика температуры (рис. 2.2–2.3).

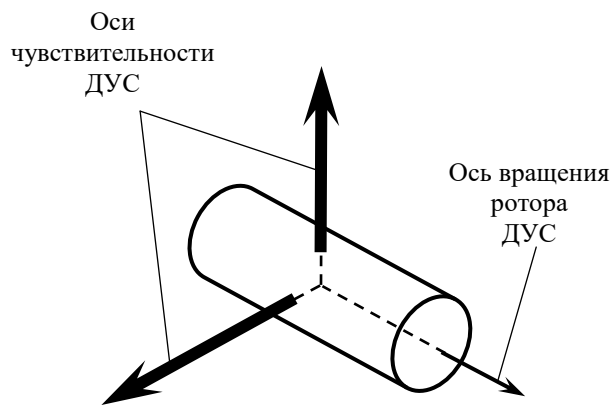


Рис. 2.1 - Оси чувствительности ДУС

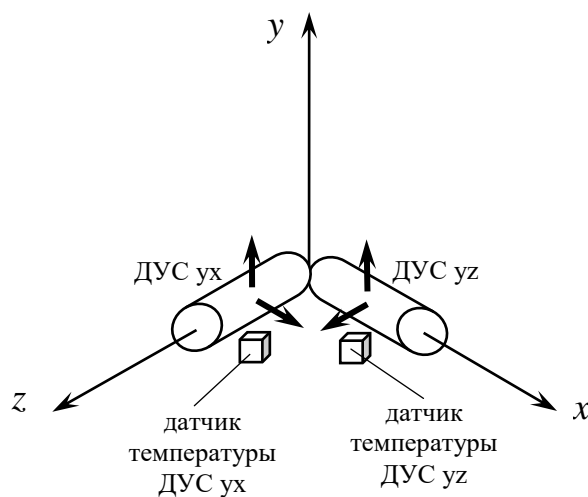


Рис. 2.2 - Расположение ДУСов

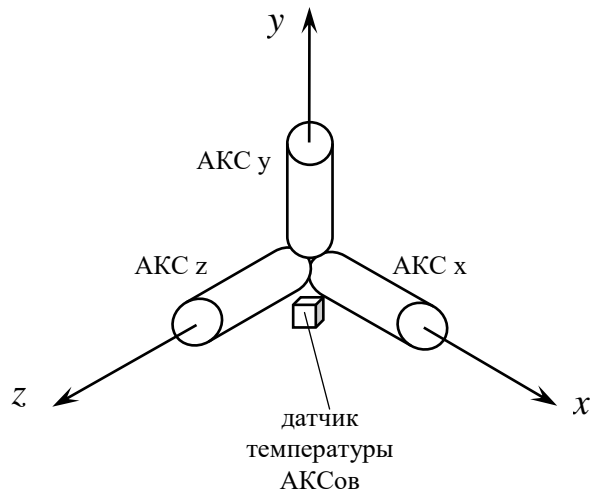


Рис. 2.3 - Расположение АКСов

Ориентация осей чувствительности гироскопов и акселерометров в блоке БЧЭ представлена на рис 2.4.

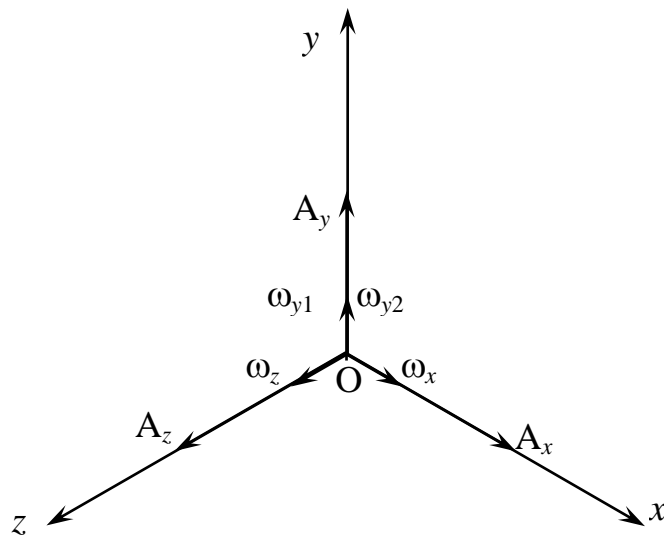


Рис. 2.4 - Ориентация осей чувствительности гироскопов и акселерометров БЧЭ

Ox , Oy , Oz – оси БЧЭ (как правило оси БЧЭ совпадают с осями ССК подводного аппарата с точностью до погрешностей установки);

$O\omega_x$, $O\omega_{y1}$, $O\omega_{y2}$, $O\omega_z$, – оси чувствительности преобразователей угловых скоростей;

OA_x , OA_y , OA_z , – оси чувствительности преобразователей линейных ускорений.

В блоке БЧЭ четырнадцать выходных каналов, соответствующих параметрам движения:

- восемь каналов (четыре положительных и четыре отрицательных канала) преобразования угловых скоростей:
 - канал составляющей вектора угловой скорости по оси x ;
 - канал составляющих вектора угловой скорости по оси y (дублирован y_1 , y_2);
 - канал составляющей вектора угловой скорости по оси z ;
- шесть каналов (три положительных и три отрицательных) преобразования линейных ускорений:
 - канал составляющей вектора линейного ускорения по оси x ;
 - канал составляющей вектора линейного ускорения по оси y ;
 - канал составляющей вектора линейного ускорения по оси z .

А также три канала измерения температуры:

- канал температуры ДУС ux ;
- канал температуры ДУС uz ;
- канал температуры АКСов.

Информация о преобразованных параметрах движения представляется в виде последовательности импульсов, генерируемых с положительного или отрицательного канала преобразователя напряжения-частота (ПНЧ). В отсутствие ошибок преобразования частота следования импульсов из каналов ПНЧ пропорциональна абсолютному значению соответствующей составляющей

угловой скорости, а частота следования импульсов пропорциональна соответствующей составляющей вектора линейного ускорения - см.рис. 2.5.

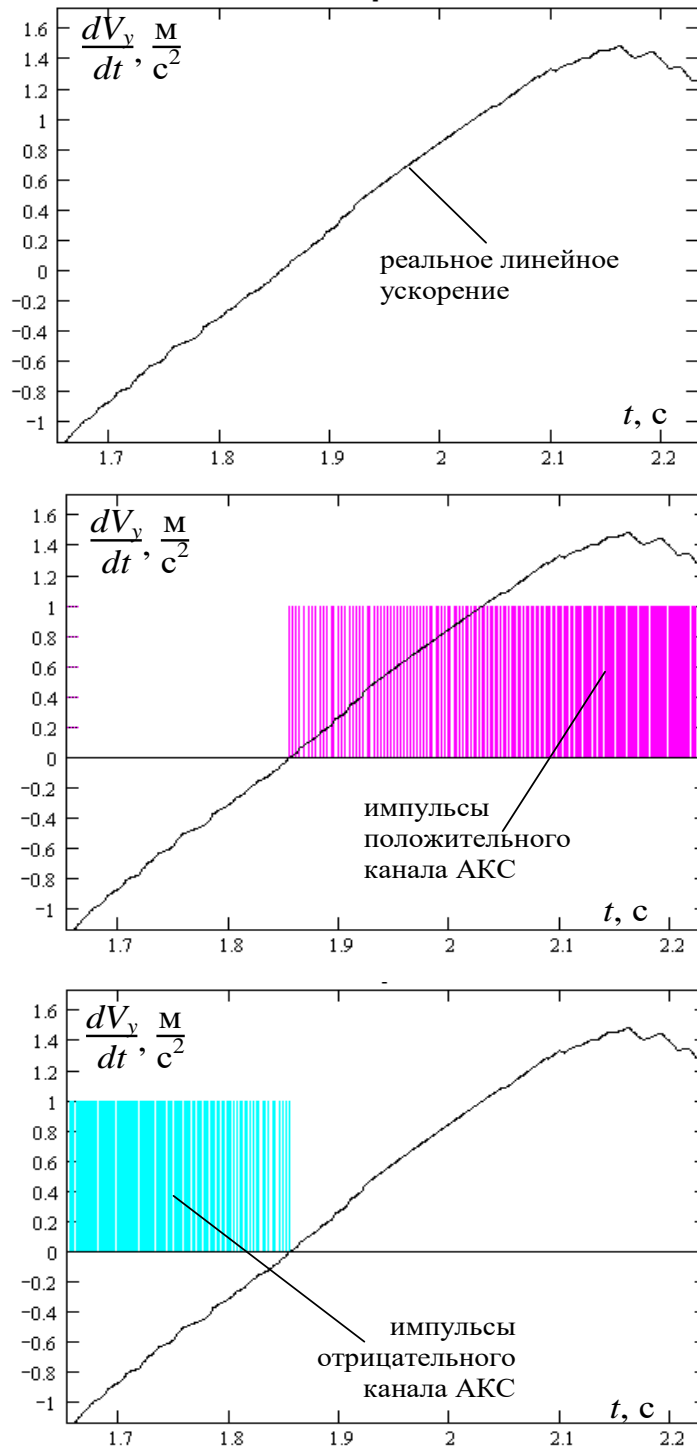


Рис. 2.5 - Импульсы по каналу линейного ускорения

2.1.2 Составляющие погрешностей блока чувствительных элементов

Ошибки показаний датчиков можно классифицировать на систематические (проявляющиеся одинаково в каждом опыте) и случайные (флюктуационные, непредсказуемые от опыта к опыту). Флюктуационные составляющие ошибок (порождённые воздействием вибраций, ошибки определения поправок на систематические погрешности и т.д.) не компенсируются.

Систематические ошибки можно частично компенсировать. Ниже рассматриваются компенсируемые систематические погрешности блока чувствительных элементов (БЧЭ).

Систематические составляющие погрешностей БЧЭ в наибольшей мере зависят от температуры, перегрузок и перекрёстных связей между каналами (в соответствии с физическими принципами работы преобразователей БЧЭ, погрешностью ориентации осей чувствительности датчиков относительно осей БЧЭ, неортогональностью их установки, погрешностью крутизны переходной характеристики от их номиналов и т.д.).

Линейная интерполяция функций, определяющих зависимость систематических составляющих ошибок от температуры, осуществляется по кодам температур. Текущие значения кодов температур окружающей среды выдаются тремя датчиками температур, встроенными в БЧЭ.

2.1.3 Компенсация погрешностей блока чувствительных элементов по каналу линейного ускорения

Составляющие вектора линейного ускорения по осям связанной с БЧЭ системы координат оцениваются по выходным сигналам акселерометров (частотам генерируемых импульсов) в соответствии с формулой [7, 9, 19]:

$$A_i = K F_{Ai} M_{Ai}(T) \quad \left[\frac{\text{М}}{\text{с}^2} \right] \quad (2.1)$$

где $i = x, y, z$ – оси чувствительности акселерометров (канал измерения линейного ускорения),

K – знак соответствующего канала ПНЧ акселерометра (± 1),

F_{Ai} – частоты импульсов, генерируемых соответствующим положительным/отрицательным каналом ПНЧ акселерометра [Гц],

$M_{Ai}(T)$ – цена импульса $\left[\frac{\text{М}}{\text{Гц с}^2} \right]$ соответствующего канала ПНЧ.

Повысить точность АКСов можно путём компенсации систематических погрешностей. Скомпенсированные линейные ускорения $A_{i \text{ ск}}$ определяются формулами:

$$A_{i \text{ ск}} = A_i - \Delta A_{i \text{ сист}} \quad (2.2)$$

где $\Delta A_{i \text{ сист}}$ – оценка суммарной систематической погрешности сигнала i -го канала преобразования линейного ускорения.

Систематические погрешности для акселерометров определяются формулами:

$$\begin{aligned} \Delta A_{x \text{ сист}} &= \delta A_{ox}(T) + B_{xy} A_{y \text{ ск}} + B_{xz} A_{z \text{ ск}} \\ \Delta A_{y \text{ сист}} &= \delta A_{oy}(T) + B_{yx} A_{x \text{ ск}} + B_{yz} A_{z \text{ ск}} \\ \Delta A_{z \text{ сист}} &= \delta A_{oz}(T) + B_{zx} A_{x \text{ ск}} + B_{zy} A_{y \text{ ск}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Уравнения (2.2) - (2.3) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $A_{i \text{ ск}}$.

Входящие в формулы (2.1), (2.3) цена импульса $M_{Ai}(T)$, дрейф нуля АКСов $\delta A_{oi}(T)$ вычисляются с помощью значений, взятых из колонок прилагаемых к каждому БЧЭ таблиц 2.2-2.3, соответствующих каналу ПНЧ акселерометра, генерирующего снимаемый сигнал. Определение текущих значений параметров, зависящих от температуры, осуществляется на основе

линейного интерполирования по кодам T температур, выдаваемым встроенными в БЧЭ преобразователями температур.

2.1.4 Компенсация погрешностей блока чувствительных элементов по каналу угловой скорости

Значения составляющих вектора угловой скорости подводного аппарата по осям связанной с БЧЭ системы координат оцениваются по выходным сигналам ДУСов (частотам генерируемых импульсов) в соответствии с формулой:

$$\omega_i = K F_{\omega i} M_{\omega i}(T) \quad \left[\frac{\text{рад}}{\text{с}} \right] \quad (2.4)$$

где $i = x, y_1, y_2, z$ – оси чувствительности ДУСов (канал измерения угловых скоростей по вертикали дублирован),

K – знак соответствующего канала ПНЧ ДУСа (± 1),

$F_{\omega i}$ – частоты импульсов, генерируемых соответствующим положительным/отрицательным каналом ПНЧ ДУСа [Гц],

$M_{\omega i}(T)$ – цена импульса $\left[\frac{\text{рад}}{\text{с Гц}} \right]$ соответствующего канала ПНЧ.

Скомпенсированные угловые скорости $\omega_{i \text{ СК}}$, выдаваемые ДУСами, определяются формулами:

$$\omega_{i \text{ СК}} = \omega_i - \Delta\omega_{i \text{ сист}} \quad (2.5)$$

где $\Delta\omega_{i \text{ сист}}$ – оценка суммарной систематической погрешности сигнала i -го канала преобразования угловой скорости.

Систематические погрешности преобразования угловых скоростей выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_{x \text{ сист}} &= \delta\omega_{ox}(T) + \omega_x^{HB}(T) A_{x \text{ ск}} + \omega_x^{KB}(T) A_{y \text{ ск}} + \omega_x^P(T) A_{z \text{ ск}} + H_{xy} \omega_{y \text{ ск}} + H_{xz} \omega_{z \text{ ск}} \\
\Delta\omega_{y1 \text{ сист}} &= \delta\omega_{oy1}(T) + \omega_{y1}^{HB}(T) A_{y \text{ ск}} + \omega_{y1}^{KB}(T) A_{x \text{ ск}} + \omega_{y1}^P(T) A_{z \text{ ск}} + H_{y1x} \omega_{x \text{ ск}} + H_{y1z} \omega_{z \text{ ск}} \\
\Delta\omega_{y2 \text{ сист}} &= \delta\omega_{oy2}(T) + \omega_{y2}^{HB}(T) A_{y \text{ ск}} + \omega_{y2}^{KB}(T) A_{z \text{ ск}} + \omega_{y2}^P(T) A_{x \text{ ск}} + H_{y2x} \omega_{x \text{ ск}} + H_{y2z} \omega_{z \text{ ск}} \\
\Delta\omega_{z \text{ сист}} &= \delta\omega_{oz}(T) + \omega_z^{HB}(T) A_{z \text{ ск}} + \omega_z^{KB}(T) A_{y \text{ ск}} + \omega_z^P(T) A_{x \text{ ск}} + H_{zx} \omega_{x \text{ ск}} + H_{zy} \omega_{y \text{ ск}}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $A_{i \text{ ск}}$ – скомпенсированные составляющие линейного ускорения.

Уравнения (2.4) - (2.6) представляют собой систему линейных алгебраических уравнений относительно $\omega_{i \text{ ск}}$.

Входящие в формулы (2.4), (2.6) цена импульса $M_{oi}(T)$, дрейфы нулей ДУСов $\delta\omega_{oi}(T)$, составляющие $\omega_i^{HB}(T)$, $\omega_i^{KB}(T)$, $\omega_i^P(T)$ вычисляются путем интерполяции аналогично, как и для АКСов.

2.2 Датчик глубины

2.2.1 Устройство датчика глубины

В качестве примера рассмотрим датчик глубины (ДГ).

Датчик глубины представляет собой прибор, который на входе воспринимает давление, а на выходе выдает аналоговые напряжения по каналам давления и температуры рис. 2.6.

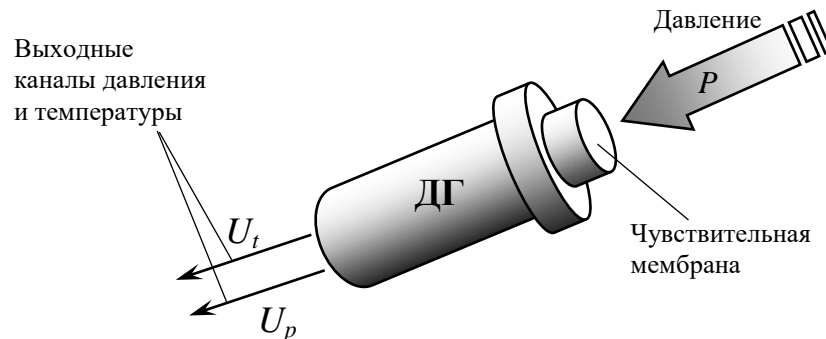


Рис.2.6 - Датчик глубины

Каждый ДГ сопровождается паспортом с таблицами градуировочных характеристик каналов давления и температуры, где приводятся значения

напряжений, снятых с соответствующего канала ДГ при различных внешних условиях, создаваемых во время тарирования.

2.2.2 Расчет глубины

Используя вышеприведенную таблицу, по снятым показаниям напряжений с каналов измерения температуры и давления можно оценить значение давления. Вычисления осуществляются на основе линейного интерполирования по снятым показаниям напряжений, выдаваемых каналами измерения ДГ:

$$P = P(P_{mv}, T_{mv}); \quad \left[\frac{\text{КГ С}}{\text{СМ}^2} \right] \quad (2.7)$$

где P_{mv} – напряжение, снятое с канала давления ДГ [мВ];

T_{mv} – напряжение, снятое с канала температуры ДГ [мВ];

P – рассчитанное давление $\left[\frac{\text{КГ С}}{\text{СМ}^2} \right]$.

Полученное давление переводится в систему СИ:

$$P^{СИ} = \frac{P g}{0.0001} \quad [\text{Па}] \quad (2.8)$$

g – ускорение свободного падения $\left[\frac{\text{М}}{\text{С}^2} \right]$,

P – давление $\left[\frac{\text{КГ С}}{\text{СМ}^2} \right]$,

0.0001 – коэффициент перемасштабирования размерности [$1 \text{ см}^2 = 0.0001 \text{ м}^2$].

Далее искомая оценка глубины получается из формулы:

$$h = \frac{P^{СИ}}{\rho_{\text{воды}} g} = \frac{P g}{0.0001 \rho_{\text{воды}} g} = \frac{P}{0.0001 \rho_{\text{воды}}}; \quad (2.9)$$

где $\rho_{\text{воды}}$ – плотность воды $\left[\frac{\text{КГ}}{\text{М}^3} \right]$,

g – ускорение свободного падения [$\frac{M}{c^2}$],

$P^{СИ}$ – давление [Па],

h – глубина [м].

2.3 Обработка показаний блока чувствительных элементов и датчика глубины

2.3.1 Используемые системы координат

На борту используются две основные системы координат:

- связанная система координат (ССК);
- инерциальная (земная) система координат (ЗСК).

Связанная система координат $Oxyz$ используется для определения ориентации подводного аппарата относительно Земли. Начало ССК O находится в центре водоизмещения объекта; ось Ox направлена вдоль его продольной оси; ось Oy лежит в вертикальной плоскости симметрии объекта; Oz – дополняет систему до правой. Считается, что оси ССК совпадают с осями БЧЭ.

Инерциальная (земная) система координат $O_3x_3y_3z_3$ необходима для задач управления центром масс подводного аппарата. Эта система неподвижна относительно поверхности Земли (моря); начало ее O_3 для каждого подводного аппарата определяется по-разному. Как правило, начало связано с точкой старта; ось O_3z_3 направлена вверх по местной вертикали; оси O_3x_3 и O_3y_3 выбираются, исходя из удобства решения задачи.

Поворот между системами координат определяется с помощью параметров Родрига-Гамильтона, объединенных в кватернион Q [7]. Используемые кватернионы снабжены соответствующими индексами. Например, $Q_{ЗС}$ – кватернион поворота от ЗСК к ССК. Два последовательных поворота,

характеризуемые соответственно кватернионами \mathbf{Q}_1 и \mathbf{Q}_2 можно заменить одним поворотом, характеризуемым кватернионом \mathbf{Q}_3 . Связь между ними следующая:

$$\mathbf{Q}_3 = \mathbf{Q}_1 \odot \mathbf{Q}_2; \quad (2.10)$$

где \odot – оператор умножения кватернионов.

2.3.2 Оценка углового положения подводного аппарата

Опрос датчиков ИНС происходит дискретно в моменты t_i . После первичной обработки показаний ДУСов в момент t_i получается сигнал (вектор в проекциях на оси ССК):

$$\Delta\boldsymbol{\varphi}_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \boldsymbol{\omega} dt. \quad (2.11)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – вектор абсолютной угловой скорости объекта в проекциях на оси ССК.

Параметры Родрига-Гамильтона, объединенные в кватернион $\mathbf{Q}_{ЗС} = (Q_{ЗС0}, Q_{ЗСx}, Q_{ЗСy}, Q_{ЗСz})$ поворота ССК относительно ЗСК, определяются по рекуррентным формулам 2-го порядка точности (при необходимости с периодической нормировкой):

$$\mathbf{Q}_{ЗС, i+1} = \mathbf{Q}_{ЗС, i} \odot \mathbf{N}_i; \quad (2.12)$$

$$\mathbf{N}_i = [1 - \frac{1}{8}(\Delta\varphi_{xi}^2 + \Delta\varphi_{yi}^2 + \Delta\varphi_{zi}^2), \frac{1}{2}\Delta\varphi_{xi}, \frac{1}{2}\Delta\varphi_{yi}, \frac{1}{2}\Delta\varphi_{zi}].$$

где \odot – операция умножения кватернионов; $\Delta\varphi_{xi}, \Delta\varphi_{yi}, \Delta\varphi_{zi}$ – компоненты измеренного вектора $\Delta\boldsymbol{\varphi}_i$.

Зная кватернион $\mathbf{Q}_{ЗС}$ можно вычислить элементы матрицы $\mathbf{A}_{ЗС}$ перехода из ССК в ЗСК:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 2(Q_{3C0} Q_{3C0} + Q_{3Cx} Q_{3Cx}) - 1; \\
a_{12} &= 2(Q_{3Cx} Q_{3Cy} - Q_{3C0} Q_{3Cz}); \\
a_{13} &= 2(Q_{3Cx} Q_{3Cz} + Q_{3C0} Q_{3Cy}); \\
a_{21} &= 2(Q_{3Cx} Q_{3Cy} + Q_{3C0} Q_{3Cz}); \\
a_{22} &= 2(Q_{3C0} Q_{3C0} + Q_{3Cy} Q_{3Cy}) - 1; \\
a_{23} &= 2(Q_{3Cy} Q_{3Cz} - Q_{3C0} Q_{3Cx}); \\
a_{31} &= 2(Q_{3Cx} Q_{3Cz} - Q_{3C0} Q_{3Cy}); \\
a_{32} &= 2(Q_{3Cy} Q_{3Cz} + Q_{3C0} Q_{3Cx}); \\
a_{33} &= 2(Q_{3C0} Q_{3C0} + Q_{3Cz} Q_{3Cz}) - 1.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

И углы Эйлера:

$$\begin{aligned}
\sin \vartheta &= 2(Q_{3Cx} Q_{3Cy} + Q_{3C0} Q_{3Cz}); & \cos \vartheta &= \sqrt{1 - \sin^2 \vartheta}; \\
\sin \gamma &= \frac{2}{\cos \vartheta} (Q_{3C0} Q_{3Cx} - Q_{3Cy} Q_{3Cz}); \\
\cos \gamma &= \frac{1}{\cos \vartheta} [2(Q_{3C0} Q_{3C0} + Q_{3Cy} Q_{3Cy}) - 1]; \\
\sin \psi &= \frac{2}{\cos \vartheta} (Q_{3C0} Q_{3Cy} - Q_{3Cx} Q_{3Cz}); \\
\cos \psi &= \frac{1}{\cos \vartheta} [2(Q_{3C0} Q_{3C0} + Q_{3Cx} Q_{3Cx}) - 1].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

При приближении дифферента к $\pm 90^\circ$ приведенные формулы вырождаются. Во избежание этого полагают угол крена (или курса) равными нулю.

Зная матрицу направляющих косинусов можно вычислить параметры Родрига-Гамильтона:

$$Q_{3C0} = \frac{1}{2} \lambda; \quad Q_{3Cx} = \frac{1}{2\lambda} (a_{32} - a_{23}); \quad Q_{3Cy} = \frac{1}{2\lambda} (a_{13} - a_{31}); \quad Q_{3Cz} = \frac{1}{2\lambda} (a_{21} - a_{12}); \tag{2.15}$$

$$\text{где } \lambda = \sqrt{1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}}.$$

При приближении параметра λ к нулю во избежание ошибки с плавающей запятой можно использовать дополнительный промежуточный (фиктивный) поворот системы координат.

2.3.3 Оценка глубины хода подводного аппарата

Оценка глубины хода производится по датчикам глубины. Требования к точности расчета глубины хода подводного аппарата по датчикам глубины возле

носителя и у поверхности составляют, как правило, величину порядка 1 м. Низковольтное аналоговое напряжение на выходе датчиков делает канал чувствительным к наводкам со стороны аппаратуры, амплитуда помех может достигать 1-го метра. На это накладываются ошибки дискретизации величиной около 30 см.

Указанные шумы вызывают проблемы со стабилизацией подводного аппарата, когда в обратной связи используются показания датчиков глубины. Рули начинают реагировать на зашумлённый высокочастотный сигнал так, что амплитуда их колебаний достигает предельно возможных отклонений.

Следует также учесть аддитивные составляющие ошибок измерения ДГ. Эти ошибки связаны со смещением показаний датчиков от реальной глубины на некоторое Δh . Обрабатывают их следующим образом: во время предстартовой подготовки подводного аппарата на глубине носителя измеряют показания датчиков, регистрируя Δh отклонение датчика от реальной глубины. В дальнейшем, при обработке показаний ДГ, учитывают эту статическую аддитивную составляющую при расчете глубины хода подводного аппарата:

$$h = h_{\text{изм}} - \Delta h; \quad (2.16)$$

где Δh – статическая ошибка смещения показаний датчика (предстартовая подготовка);

$h_{\text{изм}}$ – измеренная датчиком глубина хода подводного аппарата;

h – рассчитанная глубина хода подводного аппарата.

2.3.4 Оценка координат в горизонте

Опрос АКСов, как и ДУСов, происходит дискретно в моменты t_i . На интервалах между опросами измеряемое ускорение интегрируется непосредственно в блоке БЧЭ. После первичной обработки на выходе в момент t_i получается сигнал (вектор в проекциях на оси ССК):

$$\Delta \mathbf{V}_i^{\text{AKC}} = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{n} dt. \quad (2.17)$$

Здесь \mathbf{n} – вектор кажущегося ускорения.

Алгоритм рекуррентной оценки радиус-вектора \mathbf{R}_i подводного аппарата, а также вектора \mathbf{V}_i его земной скорости имеет вид:

$$\mathbf{V}_{i+1} = \mathbf{V}_i + \Delta \mathbf{V}_i, \quad \mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + (\mathbf{V}_i + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{V}_i) \Delta t_i, \quad \Delta \mathbf{V}_i = \Delta \mathbf{V}_i^{\text{AKC}} + \mathbf{g} \Delta t_i. \quad (2.18)$$

Формулы (2.18) приведены в векторной форме записи безотносительно той или иной системы координат.

Для решения тактических задач интерес представляют координаты подводного аппарата в ЗСК. Координаты и линейная скорость подводного аппарата в ЗСК имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{i+1}^{\text{ЗСК}} &= \mathbf{V}_i^{\text{ЗСК}} + \Delta \mathbf{V}_i^{\text{ЗСК}}, \quad \mathbf{R}_{i+1}^{\text{ЗСК}} = \mathbf{R}_i^{\text{ЗСК}} + (\mathbf{V}_i^{\text{ЗСК}} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{V}_i^{\text{ЗСК}}) \Delta t_i, \\ \Delta \mathbf{V}_i^{\text{ЗСК}} &= \mathbf{A}_{\text{ЗС}} \Delta \mathbf{V}_i^{\text{AKC}} + \mathbf{g} \Delta t_i. \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\Delta \mathbf{V}_i^{\text{AKC}}$ – приращение линейной скорости, выдаваемое АКСами в проекциях на оси ССК;

$\Delta \mathbf{V}_i^{\text{ЗСК}}$ – приращение линейной скорости подводного аппарата в ЗСК;

$\mathbf{A}_{\text{ЗС}}$ – матрица перехода из ССК в ЗСК;

$\mathbf{V}_i^{\text{ЗСК}}$ – линейная скорость подводного аппарата в ЗСК;

$\mathbf{R}_i^{\text{ЗСК}}$ – координаты подводного аппарата в ЗСК,

\mathbf{g} – ускорение свободного падения в ЗСК, $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Однако, приведенный алгоритм обладает приемлемой точностью лишь на непродолжительных участках движения. Из-за \mathbf{g} в канале глубины, а также из-за накопления ошибок за счет двойного интегрирования по времени, оценка

глубины по АКС не точна. Поэтому оценку $h(y)$ в (2.19) - (2.21) заменяют на оценку h глубины по ДГ:

$$R_y^{3СК} = -h; \quad (2.20)$$

Аналогично для избежания двойного интегрирования в горизонте можно задать номинальную для конкретного режима скорость V_i движения, в предположении, что она направлена по продольной оси подводного аппарата:

$$\mathbf{R}_{i+1} = \mathbf{R}_i + \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cos \psi \\ \sin \vartheta \\ -\cos \vartheta \sin \psi \end{pmatrix} V_i \Delta t_i. \quad (2.21)$$

Глубину, как и ранее, следует оценивать по датчикам глубины.

2.3.5 Оценка угловой скорости подводного аппарата

ДУСы выдают не значения угловой скорости, а приращения углов $\Delta\varphi_i$ (см. (2.19)) по связанным осям за такт опроса. Выдаваемая ими информация является дискретной, и получается она путем частотной модуляции непрерывного сигнала (импульсы постоянной величины приходят в случайные моменты времени, частота их прихода пропорциональна величине угловой скорости).

Для оценки угловой скорости требуется численное дифференцирование сложного дискретного сигнала, что существенно расширяет полосу пропускания системы и ведет к значительным шумам на ее выходе, и в конечном итоге может привести к недопустимым колебаниям рулей.

Простейшая формула для оценки вектора $\boldsymbol{\omega}_i$ угловой скорости подводного аппарата имеет вид:

$$\boldsymbol{\omega}_i \approx \frac{1}{\Delta t_i} \Delta\boldsymbol{\varphi}_i. \quad (2.22)$$

Однако эта оценка будет корректной только при значительных значениях угловой скорости.

При малых значениях угловой скорости дискретные импульсы из ДУС будут поступать с шагом ΔT_i , большим такта Δt_i БЦВМ. Поэтому (2.22) следует заменить на

$$\omega_i \approx \frac{1}{\Delta T_i} \Delta \phi_i. \quad (2.23)$$

В момент прихода импульса формула (2.23) дает правильную оценку скорости, но если импульс не пришел, то она дает ноль. Другими словами на всех тактах оценка угловой скорости будет нулевой за исключением тактов, в которые импульсы приходят, что, в общем, неверно.

Во избежание указанной проблемы, при отсутствии импульсов можно оставлять оценку скорости такой, какой она была в предыдущий момент прихода импульса. Но такой алгоритм, как оказалось, обладает плохими характеристиками стабилизации подводного аппарата (т.к. система стабилизации не оставляет угловую скорость постоянной, а обрабатывает ее).

В результате численного моделирования был выбран следующий алгоритм оценки угловой скорости.

При приходе одного или более импульсов за такт опроса ДУС скорость оценивается по формуле (2.23). При отсутствии импульса угловая скорость считается нулевой. Оценка угловой скорости фильтруется рекурсивным фильтром (БИХ-фильтром) первого порядка.

2.4 Моделирование показаний датчиков блока чувствительных элементов и датчика глубины

Для отладки бортового алгоритма подводного аппарата в комплексе необходимо моделировать показания датчиков БЧЭ и ДГ. Соответствующая модель рассматривается в данном разделе.

В программном комплексе для имитации чувствительных элементов используется модель, описанная ниже. Вход чувствительного элемента – параметры движения подводного аппарата \mathbf{R} , \mathbf{V} , ω , \mathbf{Q} , рассчитанные в модели

динамики подводного аппарата. Выход – показания датчиков с учетом всех ошибок и преобразований.

2.4.1 Модель акселерометра

Параметры движения подводного аппарата относятся к центру водоизмещения (ЦВ), а БЧЭ смещен относительно центра водоизмещения на ρ , поэтому нужно пересчитать линейные ускорения из ЦВ в точку крепления АКС ($\mathbf{R} + \rho$). АКСы измеряют ускорения в точке их крепления.

Представим положение \mathbf{r} АКСов относительно ЗСК в виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \rho; \quad (2.24)$$

где ρ – смещение АКС относительно центра водоизмещения подводного аппарата;

\mathbf{R} – радиус-вектор центра водоизмещения подводного аппарата относительно начала ЗСК.

Абсолютную скорость получим, дифференцируя это выражение по времени:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\rho}{dt}; \quad (2.25)$$

Согласно теореме о локальной производной:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\delta\rho}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \rho; \quad (2.26)$$

где: $\frac{d\rho}{dt}$ – производная вектора относительно инерциальной системы координат;

$\frac{\delta\rho}{\delta t}$ – производная вектора относительно вращающейся СК (ССК); $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости подводного аппарата.

Подставляя (2.26) в (2.25) получим следующее выражение для абсолютной скорости:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} + \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t}; \quad (2.27)$$

Полученная формула представляет собой теорему о сложении скоростей в сложном движении. Слагаемое $\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$ называется *переносной*, а $\frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t}$ – *относительной скоростями*.

Переносная скорость состоит из скорости $\frac{d\mathbf{R}}{dt}$ начала ССК и скорости $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}$, определяемой вращением подводного аппарата.

Полное ускорение точки крепления АКСов получим, дифференцируя (2.27) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho} \right) = \\ &= \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} + \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t}; \end{aligned} \quad (2.28)$$

Полученная формула представляет собой известную теорему о сложении ускорений в сложном движении точки.

Слагаемое $\frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2}$ называют *относительным*, $\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$ – *переносным*, а $2\boldsymbol{\omega} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t}$ – *кориолисовым ускорениями* точки.

Переносное ускорение состоит из ускорения $\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2}$ начала ССК, а также ускорений точки, вызванных угловым ускорением $\frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho}$ и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$ связанной системы координат. Слагаемое $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})$ называют *центробежным ускорением*.

В качестве начала (полюса) ССК выбран центр водоизмещения (ЦВ) подводного аппарата, который не перемещается (жестко связан) относительно

корпуса, как и БЧЭ, поэтому ρ не изменен относительно ССК, значит $\frac{\delta \rho}{\delta t} = 0$, кориолисово и $\frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} = 0$ относительные ускорения отсутствуют. В итоге, ускорение точки крепления АКСов имеет вид:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} + \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}); \quad (2.29)$$

Согласно теореме о локальной производной:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d \mathbf{R}}{dt} \right) = \frac{d \mathbf{V}}{dt} = \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}; \quad (2.30)$$

где \mathbf{V} – вектор линейной скорости подводного аппарата;

$\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}$ – вектор линейного ускорения подводного аппарата относительно ССК;

$\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости подводного аппарата.

Подставив (2.32) в (2.31) получим полное ускорение точки места крепления АКСов в проекциях на оси ССК:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}); \quad (2.31)$$

Блок акселерометров содержит три АКСа, измеряющих кажущееся ускорение \mathbf{W}' :

$$\mathbf{W}' = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - \mathbf{g}; \quad (2.32)$$

Вектор кажущегося ускорения \mathbf{W} в проекциях на оси ССК имеет вид:

$$\mathbf{W} = \frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} + \frac{\delta \boldsymbol{\omega}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{A}_{СЗ} \mathbf{g}; \quad (2.33)$$

где \mathbf{V} – вектор линейной скорости подводного аппарата в ССК;

$\frac{\delta \mathbf{V}}{\delta t}$ – вектор линейного ускорения подводного аппарата в ССК;

$\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости подводного аппарата в ССК;

\mathbf{g} – ускорение свободного падения в ЗСК, $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.81 \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\mathbf{A}_{СЗ}$ – матрица перехода из ЗСК в ССК;

\mathbf{p} – вектор размещения акселерометров относительно центра водоизмещения подводного аппарата в ССК.

Также необходимо учесть систематические и флюктуационные ошибки измерения:

$$A_i = W_i + \Delta A_{i \text{ сист}} + \Delta A_{i \text{ флюкт}} \quad (2.34)$$

где W_i – компоненты вектора кажущегося ускорения, $i \in \{x, y, z\}$;

$\Delta A_{i \text{ сист}}$ – систематическая погрешность измерения соответствующего компонента вектора кажущегося ускорения;

$\Delta A_{i \text{ флюкт}}$ – флюктуационная погрешность измерения соответствующего компонента вектора кажущегося ускорения;

A_i – моделируемое значение компонент вектора линейного ускорения, измеряемое АКСаами.

Для расчета систематических погрешностей производятся действия, обратные описанным в разделе 2.1.3 компенсациям систематических погрешностей соответствующих составляющих линейных ускорений. Систематические погрешности рассчитываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta A_{x \text{ сист}} &= \delta A_{ox}(T) + B_{xy} W_y + B_{xz} W_z + \Delta A_x \\ \Delta A_{y \text{ сист}} &= \delta A_{oy}(T) + B_{yx} W_x + B_{yz} W_z + \Delta A_y \\ \Delta A_{z \text{ сист}} &= \delta A_{oz}(T) + B_{zx} W_x + B_{zy} W_y + \Delta A_z \end{aligned} \quad (2.35)$$

где ΔA_i – случайная в каждом пуске составляющая ошибки измерения (или тренд – постоянна в конкретном пуске, но в каждом отдельно разная);

B_{ij} – константы перекрестных связей, взятые из паспорта БЧЭ.

Входящие в формулы (2.36) дрейф нуля АКСоВ $\delta A_{oi}(T)$ вычисляется с помощью значений, взятых из паспорта БЧЭ, соответствующих АКСу. Определение текущих значений параметров, зависящих от температуры, осуществляется на основе линейного интерполирования по кодам T температур.

Показания датчиков температур, встроенных в БЧЭ, могут моделироваться разными способами. Одним из возможных вариантов является задание температурной зависимости в виде полинома от времени. Для проверки алгоритма обработки показаний датчиков БЧЭ желательно охватить весь диапазон температур, выдаваемый датчиком (паспортные данные). БЧЭ имеет свойство нагреваться со временем, возрастание значений выдаваемых температур происходит монотонно, можно считать линейно по времени, в пределах заданного температурного диапазона.

Флюктуационные составляющие погрешности $\Delta A_{i \text{ флюкт}}$ из-за малости их влияния не моделируются.

2.4.2 Модель датчика угловой скорости

Для моделирования значений компонент векторов угловой скорости по соответствующим осям необходимо учесть систематические и флюктуационные составляющие погрешности измерения:

$$\omega_i = \omega'_i + \Delta\omega_{i \text{ сист}} + \Delta\omega_{i \text{ флюкт}} \quad (2.36)$$

где $\Delta\omega_{i \text{ сист}}$ – суммарная систематическая погрешность измерения угловой скорости по оси $i \in \{x, y_1, y_2, z\}$;

$\Delta\omega_{i \text{ флюкт}}$ – флюктуационная погрешность измерения угловой скорости по оси i ;

ω'_i – компоненты вектора угловой скорости подводного аппарата, рассчитанной по модели динамики подводного аппарата;

ω_i – моделируемые показания на выходе ДУС.

Для расчета систематических погрешностей угловых скоростей, аналогично АКСам, производятся действия, обратные описанным в разделе 2.1.4 компенсациям погрешностей угловых скоростей. Систематические погрешности компонент вектора угловых скоростей выражаются формулами:

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{x \text{ сист}} &= \delta\omega_{ox}(T) + \omega_x^{HB}(T) W_x + \omega_x^{KB}(T) W_y + \omega_x^P(T) W_z + H_{xy} \omega'_y + H_{xz} \omega'_z + \Delta\omega_x \\ \Delta\omega_{y1 \text{ сист}} &= \delta\omega_{oy1}(T) + \omega_{y1}^{HB}(T) W_y + \omega_{y1}^{KB}(T) W_x + \omega_{y1}^P(T) W_z + H_{y1x} \omega'_x + H_{y1z} \omega'_z + \Delta\omega_{y1} \\ \Delta\omega_{y2 \text{ сист}} &= \delta\omega_{oy2}(T) + \omega_{y2}^{HB}(T) W_y + \omega_{y2}^{KB}(T) W_z + \omega_{y2}^P(T) W_x + H_{y2x} \omega'_x + H_{y2z} \omega'_z + \Delta\omega_{y2} \\ \Delta\omega_{z \text{ сист}} &= \delta\omega_{oz}(T) + \omega_z^{HB}(T) W_z + \omega_z^{KB}(T) W_y + \omega_z^P(T) W_x + H_{zx} \omega'_x + H_{zy} \omega'_y + \Delta\omega_z\end{aligned}\tag{2.37}$$

где $\Delta\omega_i$ – случайная в пуске (тренд) составляющая ошибки измерения;

H_{ij} – константы перекрестных связей, взятые из паспорта БЧЭ.

Входящие в формулы (2.37) дрейфы нулей ДУСов $\delta\omega_{oi}(T)$, составляющие $\omega_i^{HB}(T)$, $\omega_i^{KB}(T)$, $\omega_i^P(T)$ вычисляются путем интерполяции аналогично, как и для АКСов. В зависимости от знака компоненты вектора кажущегося ускорения W значения составляющих осевого небаланса, квадратурной, радиальной берутся из паспорта БЧЭ.

Флюктуационные составляющие погрешности $\Delta\omega_{i \text{ флюкт}}$ из-за малости их влияния не моделируются.

2.4.3 Модель датчика глубины

При моделировании показаний ДГ необходимо учесть шум датчиков по глубине:

$$h_{\text{изм}} = h + \xi;\tag{2.38}$$

где $h_{\text{изм}}$ – моделируемая глубина хода подводного аппарата, измеряемая ДГ;

h – реальная глубина хода подводного аппарата;

ξ – накладываемый шум измерений.

Модель ошибок измерения складывается из следующих составляющих:

- аддитивная систематическая ошибка датчика на нулевой глубине (Δh);
- мультипликативная ошибка, связанная с неточностью задания коэффициента пересчета выходных напряжений ДГ в давление;
- случайная коррелированная ошибка измерения;
- высокочастотные наводки аппаратуры на каналы измерения параметров.

Случайную коррелированную ошибку измерения моделируют, как корреляционный процесс, являющейся результатом работы формирующего фильтра. Фильтр представляют апериодическим звеном с постоянной времени T . На вход фильтра подают белый шум интенсивности N .

Высокочастотные помехи на каналы измерения ДГ представляют собой последовательность случайных некоррелируемых величин с шагом измерений Δt . Значение амплитуды ошибок измерения является равномерно-распределённой величиной в интервале $[-a; a]$.

При моделировании ДГ были приняты следующие значения параметров:

$$N = 0.1; T = 0.05; a = 0.2; \Delta t = 0.01.$$

Аддитивная систематическая и мультипликативные ошибки не учитывались.

При моделировании показаний ДГ необходимо произвести расчет давления на основании глубины хода по таблицам паспортных данных для каждого датчика глубины:

$$P = \rho_{\text{воды}} g h_{\text{изм}}; \quad (2.39)$$

где $\rho_{\text{воды}}$ – плотность воды;

g – ускорение свободного падения;

P – рассчитанное давление;

$h_{\text{изм}}$ – моделируемая глубина хода подводного аппарата.

После расчета значений напряжений по каналам температуры и давления, эти показания переводятся в коды АЦП, домножая на соответствующий масштабирующий коэффициент. Дробная часть отсекается, производится оцифровка полученного значения выделением целой части.

2.5 Практическая реализация моделирования работы ИНС

Приведенная в главе 2.5 модель ИНС реализована в виде программного обеспечения. На рисунке 2.7 приведена укрупненная блок-схема программы, моделирующая показания работу ИНС подводного аппарата с учетом погрешностей чувствительных элементов.

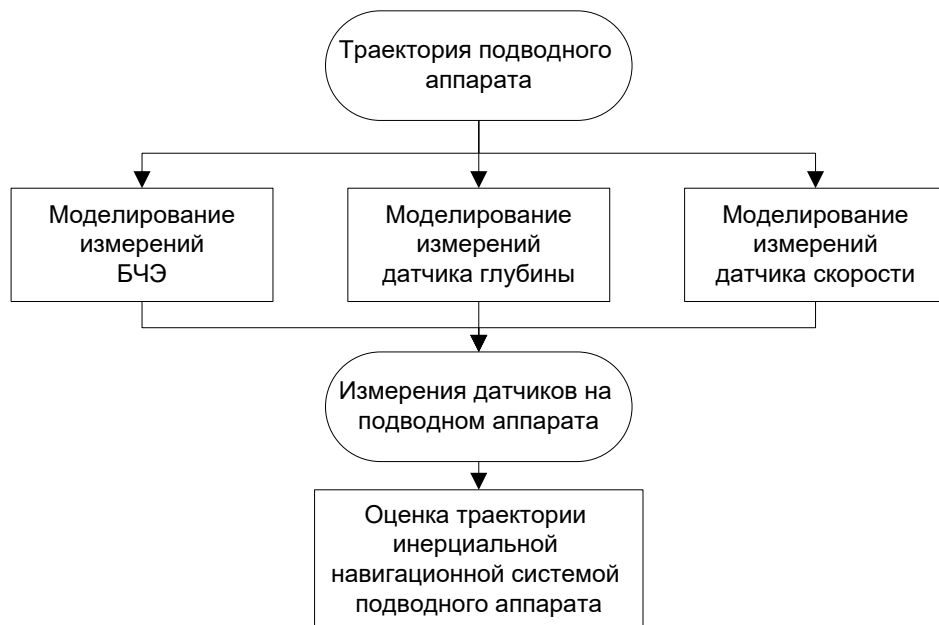


Рисунок 2.7 - Блок-схема моделирования ИНС подводного аппарата

На рисунке 2.8 представлена траектория подводного аппарата в плоскости, и оценка этой траектории на основе показаний ИНС. Синим цветом показана имитируемая (истинная) траектория, а зеленым цветом – ее оценка на основе данных ИНС. На рисунке видно, что в конце траектории ошибка оценки местоположения подводного аппарата составила более 200 метров.

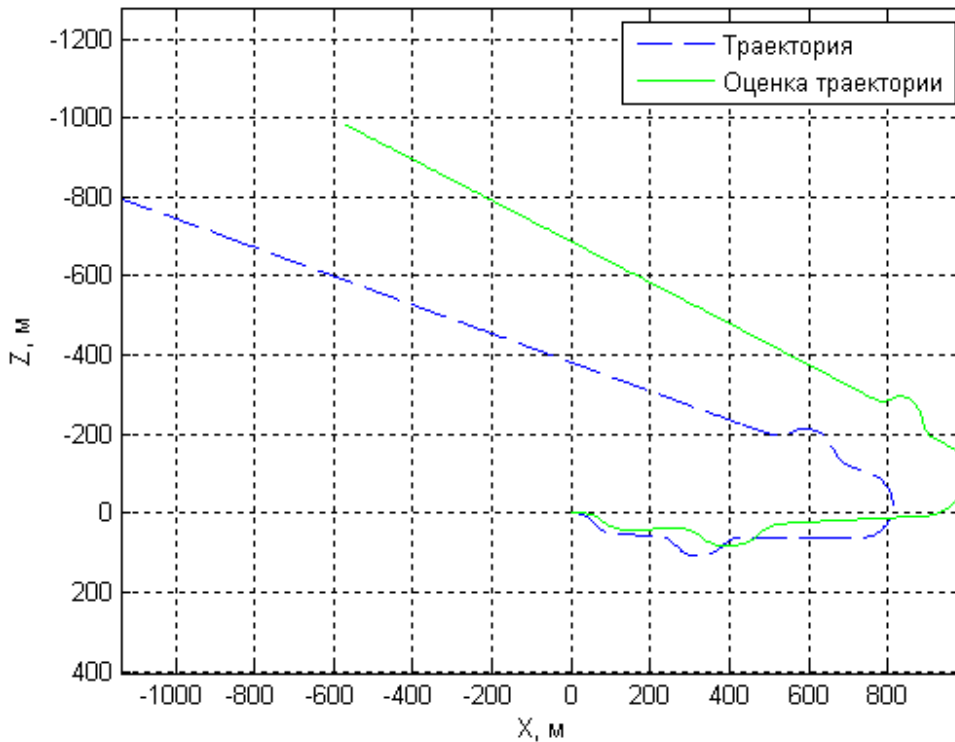


Рисунок 2.8 - Имитируемая траектория и ее оценка на основе ИНС

2.6 Выводы к главе 2

1. Рассмотрены и предложены математические модели, описывающие работу инерциальной навигационной системы. Данные модели включают модели блока чувствительных элементов и датчиков глубины.
2. Рассмотрены алгоритмы первичной обработки показаний датчиков (блока чувствительных элементов и датчиков глубины), в том числе с учетом систематических погрешностей.
3. Приведены алгоритмы вторичной обработки измерений, выходом которых являются оценки координат и параметров ориентации подводного аппарата. Проведен анализ их использования для подводных аппаратов.
4. Приведены математические модели датчиков. На вход таких моделей поступают параметры движения подводного аппарата, а на выходе — значения сигналов в том виде, в котором они поступают в вычислительную систему подводного аппарата (счетчики импульсов, коды АЦП).

5. На основе представленных моделей разработано программное математическое обеспечение моделирования работы инерциальной навигационной системы подводного аппарата. Приведены результаты моделирования траектории движения подводного аппарата и оценки этой траектории на основе показаний ИНС.

3 Комплексирование измерений магнитометра с ИНС

В данной главе рассматривается задача комплексирования измерений магнитометра с ИНС. Приводится описание метода калибровки магнитометра на движущемся подводном аппарате, метода комплексирования измерений магнитометра с инерциальной навигационной системой, установленной на аппарате. Необходимо отметить, что использование магнитометра для измерения магнитного поля Земли в навигации подводных аппаратов встречается достаточно редко [6, 34].

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод калибровки магнитометра подводного аппарата, определение собственного магнитного поля подводного аппарата, магнитного поля Земли, а также других калибровочных параметров непосредственно после пуска подводного аппарата.

Приводится метод калибровки инерциальной навигационной системы по измерениям магнитометра, с определением увода углов курса, тангажа и крена, измеренных гироскопом.

Разработаны и приведены метод комплексирования измерений магнитометра с инерциальной навигационной системой и метод поиска объектов, обладающих собственным магнитным полем.

Приведены результаты применения метода комплексирования измерений магнитометра с ИНС и метод поиска объектов, обладающих собственным магнитным полем.

3.1 Калибровка магнитометра

3.1.1 Математическая постановка задачи

Рассматривается подводный аппарат, приводимый в движение тяговым электродвигателем. На подводном аппарате установлен трехкомпонентный магнитометр, оси которого совпадают с осями системы координат $OXYZ$,

«жестко» связанной с подводным аппаратом (связанная система координат). Кроме того, используется инерциальная система координат $O_0X_0Y_0Z_0$, связанная с точкой старта подводного аппарата.

Модель измеренного магнитометром магнитного поля $\mathbf{E}_и = \begin{pmatrix} E_и^x \\ E_и^y \\ E_и^z \end{pmatrix}$ в связанной системе координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{E}_и = (C - C_0)\mathbf{E}_д + \mathbf{E}_с + \mathbf{M}\mathbf{E}_з + \mathbf{F}\dot{\mathbf{E}}_з + \boldsymbol{\xi}, \quad \text{где:} \quad (3.1)$$

C – измеренный ток тягового электродвигателя подводного аппарата;

C_0 – средний ток, потребляемый тяговым электродвигателем подводного аппарата на калибровочном участке;

$\mathbf{E}_д = \begin{pmatrix} E_д^x \\ E_д^y \\ E_д^z \end{pmatrix}$ – проекции магнитного поля тягового электродвигателя

подводного аппарата на оси связанной системы координат;

$\mathbf{E}_с = \begin{pmatrix} E_с^x \\ E_с^y \\ E_с^z \end{pmatrix}$ – проекции собственного магнитного поля подводного аппарата на

оси связанной системы координат;

$\mathbf{E}_з = \begin{pmatrix} E_з^x \\ E_з^y \\ E_з^z \end{pmatrix}$ – проекции магнитного поля Земли на оси связанной системы

координат;

$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}$ – матрица индуктивных коэффициентов магнитного

поля Земли;

\mathbf{I} – единичная матрица 3x3;

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$ – матрица вихревых коэффициентов магнитного поля Земли;

$\boldsymbol{\xi}$ – возмущающие факторы.

Магнитное поле Земли в проекции на оси связанной системы координат представляется в следующем виде:

$$\mathbf{E}_3 = \mathbf{A}\mathbf{E}_{30}, \text{ где:} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{E}_{30} = \begin{pmatrix} E_{30}^x \\ E_{30}^y \\ E_{30}^z \end{pmatrix} - \text{проекции магнитного поля Земли на оси инерциальной системы}$$

координат, принятые за постоянную величину, $\mathbf{E}_{30} = \text{const}$;

\mathbf{A} – матрица перехода из инерциальной системы координат в связанную,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\vartheta & \sin\vartheta & -\sin\psi\cos\vartheta \\ -\cos\psi\sin\vartheta\cos\gamma + \sin\psi\sin\gamma & \cos\vartheta\cos\gamma & \sin\psi\sin\vartheta\cos\gamma + \cos\psi\sin\gamma \\ -\cos\psi\sin\vartheta\sin\gamma + \sin\psi\cos\gamma & -\cos\vartheta\sin\gamma & -\sin\psi\sin\vartheta\sin\gamma + \cos\psi\cos\gamma \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

где ψ – угол курса (поворот вокруг оси Y связанной СК);

ϑ – угол тангажа (поворот вокруг оси Z связанной СК);

γ – угол крена (поворот вокруг оси X связанной СК).

Производная от магнитного поля Земли по времени вычисляется следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}_3 = \frac{\partial \mathbf{A}\mathbf{E}_{30}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{E}_{30} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{E}_{30}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \mathbf{E}_{30} = \mathbf{\Omega}\mathbf{A}\mathbf{E}_{30}, \text{ где:} \quad (3.4)$$

$\mathbf{\Omega}$ – производная от матрицы перехода \mathbf{A} из инерциальной системы координат в связанную,

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

где $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости вращения вокруг осей X, Y, Z связанной системы координат (рад/сек);

Таким образом, выражение (3.1) будет выглядеть следующим образом:

$$\mathbf{E}_и = (C - C_0)\mathbf{E}_д + \mathbf{E}_с + \mathbf{M}\mathbf{A}\mathbf{E}_{30} + \mathbf{F}\mathbf{\Omega}\mathbf{A}\mathbf{E}_{30} + \xi \quad (3.5)$$

Вынеся переменные за скобки, получим:

$$\mathbf{E}_и = (C - C_0)\mathbf{E}_д + \mathbf{E}_с + (\mathbf{M} + \mathbf{F}\mathbf{\Omega})\mathbf{A}\mathbf{E}_{30} + \xi \quad (3.7)$$

На этапе калибровки предполагается отсутствие во внешней среде объектов с собственным магнитным полем, то есть $\xi = 0$. Таким образом, имеется выборка измерений магнитометра, где измеренное магнитное поле на i -ом шаге $\mathbf{E}_и^i$ представляется в виде:

$$\mathbf{E}_n^i = (C^i - C_0)\mathbf{E}_d + \mathbf{E}_c + (\mathbf{M} + \mathbf{F}\Omega^i)\mathbf{A}^i \mathbf{E}_{30}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.8)$$

Необходимо найти переменные $\mathbf{E}_d, \mathbf{E}_c, \mathbf{M}, \mathbf{F}, \mathbf{E}_{30}$, обеспечивающие минимум квадратичной критериальной функции J :

$$J = \sum_i [\mathbf{E}_n^i - (C^i - C_0)\mathbf{E}_d - \mathbf{E}_c - (\mathbf{M} + \mathbf{F}\Omega^i)\mathbf{A}^i \mathbf{E}_{30}]^T [\dots] \rightarrow \min_{\mathbf{E}_d, \mathbf{E}_c, \mathbf{M}, \mathbf{F}, \mathbf{E}_{30}} \quad (3.9)$$

Запишем вектор оцениваемых параметров в виде вектора \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} = [E_c^x \ E_c^y \ E_c^z \ E_3^x \ E_3^y \ E_3^z \ M_{xy} \ M_{xz} \ M_{yx} \ M_{yy} \ M_{yz} \ M_{zx} \ M_{zy} \ M_{zz} \ F_{xx} \ F_{xy} \ F_{xz} \ F_{yx} \ F_{yy} \ F_{yz} \ F_{zx} \ F_{zy} \ F_{zz} \ E_d^x \ E_d^y \ E_d^z]^T \quad (3.10)$$

Разложим функцию J в ряд Тейлора в окрестности \mathbf{X}^* :

$$J \approx f(\mathbf{X}) = f(\mathbf{X}^*) + f'(\mathbf{X}^*)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)^T f''(\mathbf{X}^*)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) \quad (3.11)$$

Поскольку квадратичная функция J положительно определена, ее минимум расположен в точке равенства производной критериальной функции нулю:

$$f'(\mathbf{X}) = f'(\mathbf{X}^*) + f''(\mathbf{X}^*)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) = 0 \quad (3.12)$$

Алгоритм нахождения \mathbf{X} , доставляющий минимум функции $f(\mathbf{X})$, выглядит следующим образом:

1. Нахождения первого приближения \mathbf{X}^* методом наименьших квадратов по полной выборке, приняв следующие допущения:

$$M_{xy}=M_{xz}=M_{yx}=M_{yy}=M_{yz}=M_{zx}=M_{zy}=M_{zz}=F_{xx}=F_{xy}=F_{xz}=F_{yx}=F_{yy}=F_{yz}=F_{zx}=F_{zy}=F_{zz}=0.$$

Алгоритм нахождения первого приближения \mathbf{X}^* приведен в разделе 3.1.2;

2. Определение направления поиска $\mathbf{X} - \mathbf{X}^*$ путем решения линейного уравнения

$$f''(\mathbf{X}^*)(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) = f'(\mathbf{X}^*), \quad (3.13)$$

Алгоритм решения уравнения (3.13) приведен в разделе 3.1.3;

3. Нахождения действительного значения коэффициента k , доставляющее минимум критериальной функции, представленной в виде:

$$J = f(\mathbf{X}^* + (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)k) \rightarrow \min_k \quad (3.14)$$

Алгоритм численного одномерного поиска k (3.3) приведен в разделе 3.1.4;

4. В случае, если найденное значение критериальной функции J отличается от значения на предыдущем шаге меньше, чем на некоторое пороговое значение, подобранного, исходя из чувствительности магнитометра, остановка алгоритма, иначе возврат к шагу 2.

3.1.2 Нахождение вектора оцениваемых параметров

Поскольку в векторе состояния X (3.10) присутствуют линейно зависимые друг от друга элементы, для нахождения X^* в первом приближении воспользуемся следующими допущениями: матрица индуктивных коэффициентов

магнитного поля Земли в первом приближении равна $\mathbf{M} = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где \mathbf{I} –

единичная матрица 3×3 , матрица вихревых коэффициентов магнитного поля

Земли $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Таким образом, уравнение (3.8) принимает следующий вид:

$$\mathbf{E}_n^i = (C^i - C_0)\mathbf{E}_d + \mathbf{E}_c + \mathbf{A}^i \mathbf{E}_{30}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.15)$$

Для определения параметров \mathbf{E}_d , \mathbf{E}_c и \mathbf{E}_{30} воспользуемся методом наименьших квадратов по полной выборке.

Матрица G_i (размерности 3×9) частных производных функции (3.15) по вектору состояния $\mathbf{Y} = [E_c^x \ E_c^y \ E_c^z \ E_3^x \ E_3^y \ E_3^z \ E_d^x \ E_d^y \ E_d^z]^T$ на i -ом шаге выглядит следующим образом:

$$\mathbf{G}_i = [(C^i - C_0)\mathbf{I} \quad \mathbf{I} \quad \mathbf{A}^i]; \quad (3.16)$$

Вектор состояния (размерности 9×1) находится следующим образом:

$$\mathbf{Y} = (\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i)^{-1} (\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{E}_n^i) \quad (3.17)$$

Решение уравнения (3.17) осуществляется методом разложения Холецкого.

3.1.3 Определение направления одномерного поиска

Необходимо определить направление одномерного поиска $\mathbf{X} - \mathbf{X}^*$ путем решения линейного уравнения (3.13).

Первая производная $f'(\mathbf{X})$ функции (3.11) по значениям аргумента \mathbf{X}

(3.10) на шаге i есть вектор-строка размера (1×26) :

$$f'(\mathbf{X})^i = 2\Delta\mathbf{E}^T \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial\mathbf{X}} = 2[\Delta\mathbf{E}^T \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_1} \quad \Delta\mathbf{E}^T \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_2} \quad \dots]^T, \quad (3.1867)$$

где:

$$\Delta\mathbf{E} = \mathbf{E}_n^i - (C^i - C_0)\mathbf{E}_d - \mathbf{E}_c - (\mathbf{M} + \mathbf{F}\Omega^i)\mathbf{A}^i \mathbf{E}_{30}, \quad (3.19)$$

здесь и далее, для удобства, в $\Delta\mathbf{E}$ опущен индекс i ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_1} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial E_c^x} = -[1 \quad 0 \quad 0]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_2} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial E_c^y} = -[0 \quad 1 \quad 0]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_3} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial E_c^z} = -[0 \quad 0 \quad 1]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_4} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial E_{30}^{x0}} = -[P_{11}^i \quad P_{21}^i \quad P_{31}^i]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_5} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial E_{30}^{y0}} = -[P_{12}^i \quad P_{22}^i \quad P_{32}^i]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_6} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial E_{30}^{z0}} = -[P_{13}^i \quad P_{23}^i \quad P_{33}^i]^T, \end{aligned}$$

где: $\mathbf{P}^i = (\mathbf{M} + \mathbf{F}\Omega^i)\mathbf{A}^i$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_7} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{xy}} = -[E_3^{yi} \quad 0 \quad 0]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_8} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{xz}} = -[E_3^{zi} \quad 0 \quad 0]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_9} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{yx}} = -[0 \quad E_3^{xi} \quad 0]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_{10}} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{yy}} = -[0 \quad E_3^{yi} \quad 0]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_{11}} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{yz}} = -[0 \quad E_3^{zi} \quad 0]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_{12}} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{zx}} = -[0 \quad 0 \quad E_3^{xi}]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_{13}} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{zy}} = -[0 \quad 0 \quad E_3^{yi}]^T, \\ \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial X_{14}} &= \frac{\partial\Delta\mathbf{E}}{\partial M_{zz}} = -[0 \quad 0 \quad E_3^{zi}]^T, \end{aligned}$$

где: $\mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} E_3^x \\ E_3^y \\ E_3^z \end{pmatrix} = \mathbf{A}^i \mathbf{E}_{30}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{15}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{xx}} = -[\mathbf{Q}_1^i \ 0 \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{16}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{xy}} = -[\mathbf{Q}_2^i \ 0 \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{17}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{xz}} = -[\mathbf{Q}_3^i \ 0 \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{18}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{yx}} = -[0 \ \mathbf{Q}_1^i \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{19}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{yy}} = -[0 \ \mathbf{Q}_2^i \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{20}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{yz}} = -[0 \ \mathbf{Q}_3^i \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{21}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{zx}} = -[0 \ 0 \ \mathbf{Q}_1^i]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{22}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{zy}} = -[0 \ 0 \ \mathbf{Q}_2^i]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{23}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial F_{zz}} = -[0 \ 0 \ \mathbf{Q}_3^i]^T,
\end{aligned}$$

где: $\mathbf{Q}^i = \boldsymbol{\Omega}^i \mathbf{A}^i \mathbf{E}_{30}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{24}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial E_d^x} = -[(C^i - C_0) \ 0 \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{25}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial E_d^y} = -[0 \ (C^i - C_0) \ 0]^T, \\
\frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{26}} &= \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial E_d^z} = -[0 \ 0 \ (C^i - C_0)]^T,
\end{aligned}$$

Вторая производная $f''(\mathbf{X})$ функции (3.11) по значениям аргумента \mathbf{X} (3.10) на шаге i есть симметричная матрица размера (26x26).

$$f''(\mathbf{X})_{jk}^i = 2 \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_j} \frac{\partial \Delta \mathbf{E}}{\partial X_k} + 2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_k \partial X_j} \Delta \mathbf{E}^T, \quad j=1 \dots 26, \quad k=1 \dots 26. \quad (3.20)$$

где $\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_k \partial X_j} \Delta \mathbf{E}^T = 0$, за исключением следующих элементов:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_7 \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{21}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_8 \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{31}^i \Delta E_1, \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_9 \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{11}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{10} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{21}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{11} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{31}^i \Delta E_2, \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{12} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{11}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{13} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{21}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{14} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{31}^i \Delta E_3, \\
&\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_7 \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{22}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_8 \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{32}^i \Delta E_1, \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_9 \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{12}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{10} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{22}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{11} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{32}^i \Delta E_2, \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{12} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{12}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{13} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{22}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{14} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{32}^i \Delta E_3, \\
&\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_7 \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{23}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_8 \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{33}^i \Delta E_1, \\
\frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_9 \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{13}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{10} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{23}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{11} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T = -A_{33}^i \Delta E_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{12} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -A_{13}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{13} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -A_{23}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{14} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -A_{33}^i \Delta E_3, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{15} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{11}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{16} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{21}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{17} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{31}^i \Delta E_1, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{18} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{11}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{19} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{21}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{20} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{31}^i \Delta E_2, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{21} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{11}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{22} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{21}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{23} \partial X_4} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{31}^i \Delta E_3, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{15} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{12}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{16} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{22}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{17} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{32}^i \Delta E_1, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{18} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{12}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{19} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{22}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{20} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{32}^i \Delta E_2, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{21} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{12}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{22} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{22}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{23} \partial X_5} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{32}^i \Delta E_3, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{15} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{13}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{16} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{23}^i \Delta E_1, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{17} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{33}^i \Delta E_1, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{18} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{13}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{19} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{23}^i \Delta E_2, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{20} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{33}^i \Delta E_2, \\ \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{21} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{13}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{22} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{23}^i \Delta E_3, & \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{E}}{\partial X_{23} \partial X_6} \Delta \mathbf{E}^T &= -B_{33}^i \Delta E_3, \end{aligned}$$

где: $\mathbf{B}^i = \mathbf{\Omega}^i \mathbf{A}^i$.

Для определения направления одномерного поиска $\mathbf{X} - \mathbf{X}^*$ воспользуемся методом наименьших квадратов по полной выборке.

$$(\mathbf{X} - \mathbf{X}^*) = - \left(\sum_i f''(\mathbf{X})^i \right)^{-1} \left(\sum_i f'(\mathbf{X})^i \right) \quad (3.21)$$

Решение уравнения (3.21) осуществляется методом разложения Холецкого.

3.1.4 Одномерный поиск минимума критериальной функции

При одномерном поиске необходимо найти действительное значение коэффициента k , которое доставит минимум критериальной функции J (3.10), представленной в виде:

$$J = f(\mathbf{X}^* + (\mathbf{X} - \mathbf{X}^*)k) \rightarrow \min_k \quad (3.22)$$

Поиск действительно-значного значения аргумента k целевой функции (3.22), представленной в виде $y = f(k)$, выполняется на отрезке $[a, b]$ методом золотого сечения:

1. Задаются начальные границы отрезка a, b и точность вычисления ε .

$(a = -1; b = 5; \varepsilon = 0,01)$.

2. Рассчитываются начальные точки деления $k_1 = b - \frac{b-a}{\varphi}$, $k_2 = a + \frac{b-a}{\varphi}$, и значения целевой функции $y_1 = f(k_1)$, $y_2 = f(k_2)$, где:

$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618$ – пропорция золотого сечения.

Если $y_1 \geq y_2$, то $a = k_1$, иначе $b = k_2$.

3. Если $|b - a| < \varepsilon$, то решение найдено, $k = \frac{a+b}{2}$, иначе возврат к шагу 2.

После нахождения минимума критериальной функции значение вектора состояния системы X вычисляется как

$$X = X^* + (X - X^*)k \quad (3.23)$$

3.2 Калибровка ИНС по измерениям магнитометра

3.2.1 Математическая постановка задачи

Рассматривается подводный аппарат, оснащенный инерциальной системой навигации и трехкомпонентным магнитометром, оси систем координат которых совпадают с осями системы координат подводного аппарата.

Инерциальные навигационные системы (ИНС) имеют в своём составе датчики линейного ускорения (акселерометры) и угловой скорости (гироскопы или пары акселерометров, измеряющих центробежное ускорение). С их помощью можно определить отклонение связанной с корпусом прибора системы координат $OXYZ$ от инерциальной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$, связанной с Землёй, получив углы ориентации: угол кура ψ (поворот вокруг оси Y связанной СК), угол тангажа ϑ (поворот вокруг оси Z связанной СК), и угол крена γ (поворот вокруг оси X связанной СК).

В процессе работы ИНС возникают погрешности, связанные как с ошибкой измерения угловых скоростей гироскопа, так и с вращением Земли, угловая скорость вращения которой составляет $7,292115 \cdot 10^{-5}$ радиан/с. Для компенсации

накапливающихся погрешностей в углах ориентации предлагается использовать измерения магнитометра.

С учетом погрешностей ИНС, углы ориентации подводного аппарата будут определяться следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_{и} + \Delta\psi, \\ \vartheta &= \vartheta_{и} + \Delta\vartheta, \quad \text{где:} \\ \gamma &= \gamma_{и} + \Delta\gamma,\end{aligned}\tag{3.24}$$

ψ, ϑ, γ – углы курса, тангажа и крена подводного аппарата,

$\psi_{и}, \vartheta_{и}, \gamma_{и}$ – углы курса, тангажа и крена, измеренные ИНС,

$\Delta\psi, \Delta\vartheta, \Delta\gamma$ – ошибка измерения углов курса, тангажа и крена.

Таким образом, матрица \mathbf{A} (3.3) перехода из инерциальной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ в связанную $OXYZ$ можно представить как:

$$\mathbf{A} = \Delta\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}_{и}, \quad \text{где:}\tag{3.25}$$

$\mathbf{A}_{и}$ – матрица перехода от инерциальной системы координат $O_0X_0Y_0Z_0$ в некую промежуточную систему координат $O_{и}X_{и}Y_{и}Z_{и}$, оси которой совпадают с осями связанной системы координат $OXYZ$ с точностью до ошибки измерения ИНС углов ориентации подводного аппарата:

$$\mathbf{A}_{и} = \begin{pmatrix} \cos\psi_{и}\cos\vartheta_{и} & \sin\vartheta_{и} & -\sin\psi_{и}\cos\vartheta_{и} \\ -\cos\psi_{и}\sin\vartheta_{и}\cos\gamma_{и} + \sin\psi_{и}\sin\gamma_{и} & \cos\vartheta_{и}\cos\gamma_{и} & \sin\psi_{и}\sin\vartheta_{и}\cos\gamma_{и} + \cos\psi_{и}\sin\gamma_{и} \\ -\cos\psi_{и}\sin\vartheta_{и}\sin\gamma_{и} + \sin\psi_{и}\cos\gamma_{и} & -\cos\vartheta_{и}\sin\gamma_{и} & -\sin\psi_{и}\sin\vartheta_{и}\sin\gamma_{и} + \cos\psi_{и}\cos\gamma_{и} \end{pmatrix}\tag{3.26}$$

$\Delta\mathbf{A}$ – матрица перехода от промежуточной системы координат $O_{и}X_{и}Y_{и}Z_{и}$ в связанную систему координат $OXYZ$:

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos\Delta\psi\cos\Delta\vartheta & \sin\Delta\vartheta & -\sin\Delta\psi\cos\Delta\vartheta \\ -\cos\Delta\psi\sin\Delta\vartheta\cos\Delta\gamma + \sin\Delta\psi\sin\Delta\gamma & \cos\Delta\vartheta\cos\Delta\gamma & \sin\Delta\psi\sin\Delta\vartheta\cos\Delta\gamma + \cos\Delta\psi\sin\Delta\gamma \\ -\cos\Delta\psi\sin\Delta\vartheta\sin\Delta\gamma + \sin\Delta\psi\cos\Delta\gamma & -\cos\Delta\vartheta\sin\Delta\gamma & -\sin\Delta\psi\sin\Delta\vartheta\sin\Delta\gamma + \cos\Delta\psi\cos\Delta\gamma \end{pmatrix}\tag{3.27}$$

Принимая во внимание требования, предъявляемые к ИНС подводного аппарата, сделаем допущение, что углы $\Delta\psi, \Delta\vartheta, \Delta\gamma$ являются малыми, и к ним применимы формулы для малых углов: $\sin \alpha \approx \alpha, \sin^2 \alpha \approx 0, \cos \alpha \approx 1$. Тогда, формула (3.27) принимает следующий вид:

$$\Delta \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta \vartheta & -\Delta \psi \\ -\Delta \vartheta & 1 & \Delta \gamma \\ \Delta \psi & -\Delta \gamma & 1 \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Учитывая, что скорость вращения Земли постоянна, а зависимость ошибок измерения углов гироскопа от времени носит линейный характер, формулу (3.25) представим в следующем виде:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{J}_\Gamma + \mathbf{A}_и \mathbf{J}_{30}) \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} + \mathbf{A}_и, \quad \text{где:} \quad (3.29)$$

t – время с начала движения подводного аппарата;

\mathbf{J}_Γ – матрица скоростей нарастания ошибок измерения углов гироскопа (в связанной системе координат $OXYZ$):

$$\mathbf{J}_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_\Gamma & -\Delta \dot{\psi}_\Gamma \\ -\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma & 0 & \Delta \dot{\gamma}_\Gamma \\ \Delta \dot{\psi}_\Gamma & -\Delta \dot{\gamma}_\Gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где:} \quad (3.30)$$

$\Delta \dot{\psi}_\Gamma$, $\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma$, $\Delta \dot{\gamma}_\Gamma$ – скорости нарастания ошибки измерения углов курса, тангажа и крена гироскопом;

\mathbf{J}_{30} – матрица скоростей вращения Земли (в инерциальной системе координат $O_0X_0Y_0Z_0$):

$$\mathbf{J}_{30} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_{30} & -\Delta \dot{\psi}_{30} \\ -\Delta \dot{\vartheta}_{30} & 0 & \Delta \dot{\gamma}_{30} \\ \Delta \dot{\psi}_{30} & -\Delta \dot{\gamma}_{30} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где:} \quad (3.31)$$

$\Delta \dot{\psi}_{30}$, $\Delta \dot{\vartheta}_{30}$, $\Delta \dot{\gamma}_{30}$ – проекции скорости вращения Земли на плоскости поворота, нормальные оси Y_0 , Z_0 и X_0 соответственно.

Для определения \mathbf{J}_Γ и \mathbf{J}_{30} по измерениям магнитометра, необходимо провести калибровку магнитометра по методике, приведенной в разделе 3.1. Тогда, уравнение измерений магнитометра (3.7) в случае отсутствия во внешней среде объектов с собственным магнитным полем, то есть $\xi = 0$, на i -ом шаге $\mathbf{E}_и^i$ представляется в виде:

$$\mathbf{E}_n^i = (C^i - C_0)\mathbf{E}_д + \mathbf{E}_c + (\mathbf{M} + \mathbf{F}\mathbf{\Omega}^i) \left((\mathbf{J}_\Gamma + \mathbf{A}_n^i \mathbf{J}_{30}) \begin{pmatrix} t^i \\ t^i \\ t^i \end{pmatrix} + \mathbf{A}_n^i \right) \mathbf{E}_{30}, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.32)$$

где: $\mathbf{E}_n^i = \begin{pmatrix} E_n^x \\ E_n^y \\ E_n^z \end{pmatrix}$ – магнитное поле, измеренное магнитометром, в связанной

системе координат;

C – измеренный ток тягового электродвигателя подводного аппарата;

C_0 – средний ток, потребляемый тяговым электродвигателем подводного аппарата на калибровочном участке;

$\mathbf{E}_д = \begin{pmatrix} E_д^x \\ E_д^y \\ E_д^z \end{pmatrix}$ – проекции магнитного поля тягового электродвигателя подводного

аппарата на оси связанной системы координат;

$\mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} E_c^x \\ E_c^y \\ E_c^z \end{pmatrix}$ – проекции собственного магнитного поля подводного аппарата на

оси связанной системы координат;

$\mathbf{E}_{30} = \begin{pmatrix} E_{30}^x \\ E_{30}^y \\ E_{30}^z \end{pmatrix}$ – проекции магнитного поля Земли на оси инерциальной системы

координат;

$\mathbf{M} = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & M_{xy} & M_{xz} \\ M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix}$ – матрица индуктивных коэффициентов магнитного

поля Земли, \mathbf{I} – единичная матрица 3x3;

$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}$ – матрица вихревых коэффициентов магнитного поля Земли;

$\mathbf{\Omega}^i$ – производная от матрицы перехода \mathbf{A} из инерциальной системы координат в связанную, приведена в формуле (3.5).

Необходимо найти такие \mathbf{J}_Γ и \mathbf{J}_{30} , обеспечивающие минимум квадратичной критериальной функции J :

$$J = \sum_i [\mathbf{E}_n^i - (C^i - C_0)\mathbf{E}_d - \mathbf{E}_c - (\mathbf{M} + \mathbf{F}\Omega^i) ((\mathbf{J}_\Gamma + \mathbf{A}_n^i \mathbf{J}_{30}) \begin{pmatrix} t^i \\ t^i \\ t^i \end{pmatrix} + \mathbf{A}_n^i) \mathbf{E}_{30}]^T \cdot \dots \quad (3.33)$$

$$\dots \cdot [\dots] \rightarrow \min_{\mathbf{J}_\Gamma, \mathbf{J}_{30}}$$

С целью повышения обусловленности, задача решается в три этапа:

1. Осуществляется определение скорости ухода углов курса $\Delta \dot{\psi}_\Gamma$ и $\Delta \dot{\psi}_{30}$, приняв $\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma = \Delta \dot{\gamma}_\Gamma = \Delta \dot{\vartheta}_{30} = \Delta \dot{\gamma}_{30} = 0$. Методика определения скорости ухода углов курса приведена в разделе 3.2.2.
2. Осуществляется определение скорости ухода углов курса тангажа $\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma$ и $\Delta \dot{\vartheta}_{30}$. Методика определения скорости ухода углов тангажа приведена в разделе 3.2.3.
3. Осуществляется определение скорости ухода углов крена $\Delta \dot{\gamma}_\Gamma$ и $\Delta \dot{\gamma}_{30}$. Методика определения скорости ухода углов крена приведена в разделе 3.2.4.

3.2.2 Определение скорости ухода углов курса

Для определения скорости ухода углов курса $\Delta \dot{\psi}_\Gamma$ и $\Delta \dot{\psi}_{30}$ воспользуемся методом наименьших квадратов по полной выборке.

Матрица частных производных G_i (размерности 3×2) функции (3.33) по вектору состояния $\mathbf{Y} = [\Delta \dot{\psi}_\Gamma \quad \Delta \dot{\psi}_{30}]^T$ на i -ом шаге выглядит следующим образом:

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} -\mathbf{E}_{30}^z & \mathbf{E}_{30}^x \mathbf{A}_{n13}^i - \mathbf{E}_{30}^z \mathbf{A}_{n11}^i \\ 0 & \mathbf{E}_{30}^x \mathbf{A}_{n23}^i - \mathbf{E}_{30}^z \mathbf{A}_{n21}^i \\ \mathbf{E}_{30}^x & \mathbf{E}_{30}^x \mathbf{A}_{n33}^i - \mathbf{E}_{30}^z \mathbf{A}_{n31}^i \end{pmatrix}; \quad (3.34)$$

Матрица невязок \mathbf{R}_i (размерности 3×1) на i -ом шаге вычисляется по формуле:

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{E}_n^i - (C^i - C_0)\mathbf{E}_d - \mathbf{E}_c - (\mathbf{M} + \mathbf{F}\Omega^i) ((\mathbf{J}_\Gamma^* + \mathbf{A}_n^i \mathbf{J}_{30}^*) \begin{pmatrix} t^i \\ t^i \\ t^i \end{pmatrix} + \mathbf{A}_n^i) \mathbf{E}_{30}, \quad (3.35)$$

$$\text{где: } \mathbf{J}_\Gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_\Gamma & 0 \\ -\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma & 0 & \Delta \dot{\gamma}_\Gamma \\ 0 & -\Delta \dot{\gamma}_\Gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{30}^* = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_{30} & 0 \\ -\Delta \dot{\vartheta}_{30} & 0 & \Delta \dot{\gamma}_{30} \\ 0 & -\Delta \dot{\gamma}_{30} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, вектор состояния \mathbf{Y} (размерности 2×1) находится следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \left(\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i \right)^{-1} \left(\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{R}^i \right) \quad (3.36)$$

Решение уравнения (3.36) осуществляется методом разложения Холецкого.

3.2.3 Определение скорости ухода углов тангажа

Для определения скорости ухода углов тангажа $\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma$ и $\Delta \dot{\vartheta}_{30}$ воспользуемся методом наименьших квадратов по полной выборке.

Матрица частных производных \mathbf{G}_i (размерности 3×2) функции (3.33) по вектору состояния $\mathbf{Y} = [\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma \quad \Delta \dot{\vartheta}_{30}]^T$ на i -ом шаге выглядит следующим образом:

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_{30}^y & \mathbf{E}_{30}^y \mathbf{A}_{и 11}^i - \mathbf{E}_{30}^x \mathbf{A}_{и 12}^i \\ -\mathbf{E}_{30}^x & \mathbf{E}_{30}^y \mathbf{A}_{и 21}^i - \mathbf{E}_{30}^x \mathbf{A}_{и 22}^i \\ 0 & \mathbf{E}_{30}^y \mathbf{A}_{и 31}^i - \mathbf{E}_{30}^x \mathbf{A}_{и 32}^i \end{pmatrix}; \quad (3.37)$$

Вектор невязок \mathbf{R}_i (размерности 3×1) на i -ом шаге вычисляется по формуле:

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{E}_{и}^i - (C^i - C_0) \mathbf{E}_д - \mathbf{E}_с - (\mathbf{M} + \mathbf{F} \boldsymbol{\Omega}^i) \left((\mathbf{J}_\Gamma^* + \mathbf{A}_{и}^i \mathbf{J}_{30}^*) \begin{pmatrix} t^i \\ t^i \\ t^i \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{и}^i \right) \mathbf{E}_{30}, \quad (3.38)$$

$$\text{где: } \mathbf{J}_\Gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Delta \dot{\psi}_\Gamma \\ 0 & 0 & \Delta \dot{\gamma}_\Gamma \\ \Delta \dot{\psi}_\Gamma & -\Delta \dot{\gamma}_\Gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{30}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\Delta \dot{\psi}_{30} \\ 0 & 0 & \Delta \dot{\gamma}_{30} \\ \Delta \dot{\psi}_{30} & -\Delta \dot{\gamma}_{30} & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, вектор состояния \mathbf{Y} (размерности 2×1) находится следующим образом:

$$\mathbf{Y} = \left(\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i \right)^{-1} \left(\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{R}^i \right) \quad (3.39)$$

Решение уравнения (3.39) осуществляется методом разложения Холецкого.

3.2.4 Определение скорости ухода углов крена

Для определения скорости ухода углов крена $\Delta \dot{\gamma}_\Gamma$ и $\Delta \dot{\gamma}_{30}$ воспользуемся методом наименьших квадратов по полной выборке.

Матрица частных производных G_i (размерности 3×2) функции (3.33) по вектору состояния $\mathbf{Y} = [\Delta \dot{\gamma}_\Gamma \quad \Delta \dot{\gamma}_{30}]^T$ на i -ом шаге выглядит следующим образом:

$$\mathbf{G}_i = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{E}_{30}^z \mathbf{A}_{и 12}^i - \mathbf{E}_{30}^y \mathbf{A}_{и 13}^i \\ \mathbf{E}_{30}^z & \mathbf{E}_{30}^z \mathbf{A}_{и 22}^i - \mathbf{E}_{30}^y \mathbf{A}_{и 23}^i \\ -\mathbf{E}_{30}^y & \mathbf{E}_{30}^z \mathbf{A}_{и 32}^i - \mathbf{E}_{30}^y \mathbf{A}_{и 33}^i \end{pmatrix}; \quad (3.40)$$

Матрица невязок \mathbf{R}_i (размерности 3×1) на i -ом шаге вычисляется по формуле:

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{E}_{и}^i - (C^i - C_0) \mathbf{E}_д - \mathbf{E}_c - (\mathbf{M} + \mathbf{F} \Omega^i) ((\mathbf{J}_\Gamma^* + \mathbf{A}_{и}^i \mathbf{J}_{30}^*) \begin{pmatrix} t^i \\ t^i \\ t^i \end{pmatrix} + \mathbf{A}_{и}^i) \mathbf{E}_{30}, \quad (3.41)$$

$$\text{где: } \mathbf{J}_\Gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_\Gamma & -\Delta \dot{\psi}_\Gamma \\ -\Delta \dot{\vartheta}_\Gamma & 0 & 0 \\ \Delta \dot{\psi}_\Gamma & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}_{30}^* = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_{30} & -\Delta \dot{\psi}_{30} \\ -\Delta \dot{\vartheta}_{30} & 0 & 0 \\ \Delta \dot{\psi}_{30} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, вектор состояния \mathbf{Y} (размерности 2×1) находится следующим образом:

$$\mathbf{Y} = (\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{G}_i)^{-1} (\sum_i \mathbf{G}_i^T \mathbf{R}^i) \quad (3.42)$$

Решение уравнения (3.42) осуществляется методом разложения Холецкого.

3.3 Комплексирование магнитометра и ИНС

3.3.1 Алгоритм решения задачи комплексирования магнитометра и ИНС

Рассматривается подводный аппарат, приводимый в движение тяговым электродвигателем. На подводном аппарате установлен трехкомпонентный магнитометр и инерциальная навигационная система (ИНС), оси которых совпадают с осями системы координат $OXYZ$, «жестко» связанной с изделием (связанная система координат). Кроме того, используется инерциальная система координат $O_0X_0Y_0Z_0$, связанная с точкой старта подводного аппарата.

Алгоритм решения задачи комплексирования магнитометра и ИНС выглядит следующим образом:

1. После запуска, подводный аппарат отходит от носителя на расстояние, достаточное, чтобы собственное магнитное поле носителя не оказывало влияния на калибровку магнитометра (не менее 100 метров).
2. Выбирается траектория калибровки, при котором подводном аппарате совершает маневры по курсу, тангажу и крену (оптимально – подводный аппарат совершает поворот на 360 градусов с вращением вокруг своей оси, заглублением и всплытием). Выполняется калибровка магнитометра в соответствии с методикой, указанной в разделе 3.1, при этом вычисляется среднеквадратическое отклонение невязки измерения магнитометра по формуле:

$$\sigma = \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\mathbf{R}_1^{i,2} + \mathbf{R}_2^{i,2} + \mathbf{R}_3^{i,2})} \right), \text{ где} \quad (3.43)$$

\mathbf{R}^i – вектор невязок \mathbf{R}_i на i -ом шаге калибровки магнитометра,

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{E}_и^i - (C^i - C_0)\mathbf{E}_д - \mathbf{E}_с - (\mathbf{M} + \mathbf{F}\mathbf{\Omega}^i) \mathbf{A}_и^i \mathbf{E}_{з0} \quad (3.44)$$

3. После калибровочной траектории подводный аппарат осуществляет оценку своего вектора состояния с использованием показаний инерциальной навигационной системы и трехкомпонентного магнитометра. Сначала, определяется невязка измерений магнитометра по формуле:

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{E}_и^i - (C^i - C_0)\mathbf{E}_д - \mathbf{E}_с - (\mathbf{M} + \mathbf{F}\mathbf{\Omega}^i) \left((\mathbf{J}_Г^* + \mathbf{A}_и^i \mathbf{J}_{з0}^*) \begin{pmatrix} t^i \\ t^i \\ t^i \end{pmatrix} + \mathbf{A}_и^i \right) \mathbf{E}_{з0}, \quad (3.45)$$

$$\text{где: } \mathbf{J}_Г = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_Г & -\Delta \dot{\psi}_Г \\ -\Delta \dot{\vartheta}_Г & 0 & \Delta \dot{\gamma}_Г \\ \Delta \dot{\psi}_Г & -\Delta \dot{\gamma}_Г & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_{з0} = \begin{pmatrix} 0 & \Delta \dot{\vartheta}_{з0} & -\Delta \dot{\psi}_{з0} \\ -\Delta \dot{\vartheta}_{з0} & 0 & \Delta \dot{\gamma}_{з0} \\ \Delta \dot{\psi}_{з0} & -\Delta \dot{\gamma}_{з0} & 0 \end{pmatrix},$$

параметры $\Delta \dot{\psi}_Г$, $\Delta \dot{\vartheta}_Г$, $\Delta \dot{\gamma}_Г$, $\Delta \dot{\psi}_{з0}$, $\Delta \dot{\vartheta}_{з0}$, $\Delta \dot{\gamma}_{з0}$ в первой итерации и до момента, когда накоплена достаточная выборка измерений магнитометра, равны 0.

В случае, если $\sqrt{\mathbf{R}_1^{i2} + \mathbf{R}_2^{i2} + \mathbf{R}_3^{i2}} < 2\sigma$, измерение $\mathbf{E}_и^i$ применяется для оценки параметров $\Delta \dot{\psi}_Г$, $\Delta \dot{\vartheta}_Г$, $\Delta \dot{\gamma}_Г$, $\Delta \dot{\psi}_{30}$, $\Delta \dot{\vartheta}_{30}$, $\Delta \dot{\gamma}_{30}$ в соответствии с методикой, приведенной в разделе 3.2. Первая оценка параметров производится через 30 секунд после калибровочного участка, и выполняется каждые 30 секунд, набор же интервала оценки происходит непрерывно.

В случае, если $\sqrt{\mathbf{R}_1^{i2} + \mathbf{R}_2^{i2} + \mathbf{R}_3^{i2}} \leq 3\sigma$, невязка \mathbf{R}^i применяется в расчете среднеквадратическое отклонение невязки измерения магнитометра σ по формуле (3.43).

В случае, если $\sqrt{\mathbf{R}_1^{i2} + \mathbf{R}_2^{i2} + \mathbf{R}_3^{i2}} > 3\sigma$, измерение $\mathbf{E}_и^i$ считается аномальным.

3.3.2 Решение задачи комплексирования магнитометра и ИНС

Рассматривается подводный аппарат, идущий на небольшой глубине. Два раза при движении подводного аппарата возникают магнитные аномалии от объектов, обладающих собственным магнитным полем.

Траектория подводного аппарата и данные измерений магнитометра представлены на рисунках 3.1 и 3.2 соответственно.

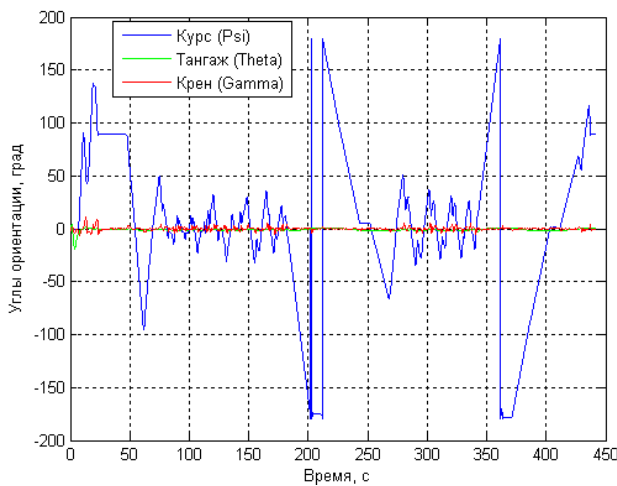


Рисунок 3.1 - Параметры траектории

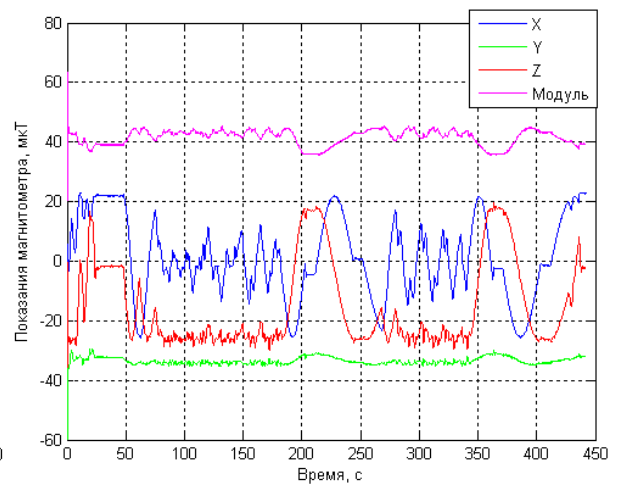


Рисунок 3.2 - Показания магнитометра

На рисунке 3.3 приведена оценка ухода углов ориентации подводного аппарата, выдаваемых инерциальной навигационной системой, выполненная на основе обработки измерений магнитометра.

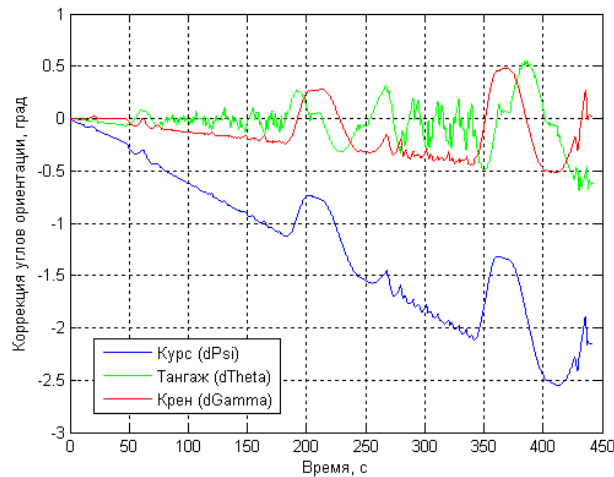


Рисунок 3.3 - Оценка ухода углов ориентации, выдаваемых ИНС

На рисунке 3.4 приведены невязки измерения магнитометра после калибровки, при этом оценка ухода углов, выдаваемых инерциальной навигационной системой, не проводилась.

На рисунке 3.5 приведены невязки измерения магнитометра после калибровки и компенсации ухода углов, выдаваемых инерциальной навигационной системой.

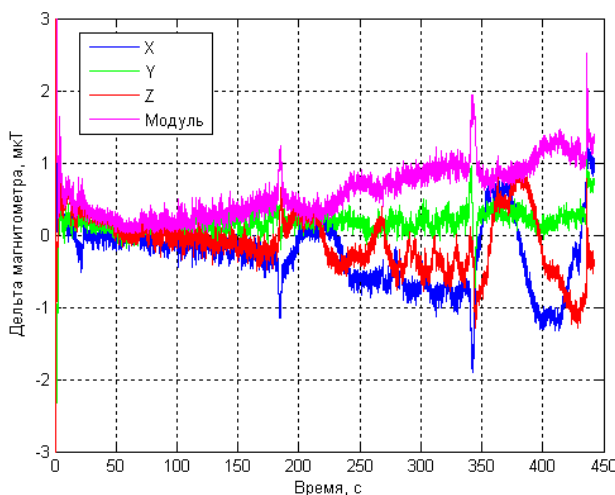


Рисунок 3.4 - Невязки магнитометра без компенсации ухода углов ИНС

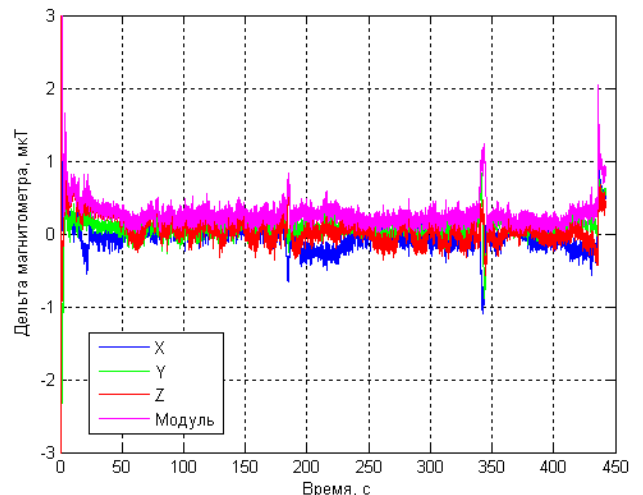


Рисунок 3.5 - Невязки магнитометра с компенсацией ухода углов ИНС

Из представленных на рисунках 3.4 и 3.5 данных видим, что на 170 и 340 секундах наблюдается магнитное поле стороннего объекта.

Таким образом, комплексирование измерений магнитометра с показаниями инерциальной навигационной системы позволяют как повысить чувствительность и качество обнаружения объектов с собственным магнитным полем, так и скомпенсировать ошибки инерциальной навигационной системы, особенно по углу курса.

3.4 Выводы к главе 3

1. Рассмотрена задача комплексирования измерений магнитометра с ИНС. Также рассмотрена задача обнаружения объектов, обладающих собственным магнитным полем, с использованием магнитометра.
2. Приведено описание метода калибровки магнитометра на движущемся подводном аппарате и метода комплексирования измерений магнитометра с инерциальной навигационной системой, установленной на аппарате, а также метод поиска объектов, обладающих собственным магнитным полем.
3. Для решения задачи обнаружения объектов, обладающих собственным магнитным полем, предложено использовать метод калибровки магнитометра подводного аппарата и определение собственного магнитного поля подводного аппарата, магнитного поля Земли, а также других калибровочных параметров непосредственно после пуска подводного аппарата.
4. Разработан и приведен метод калибровки инерциальной навигационной системы по измерениям магнитометра с определением увода углов курса, тангажа и крена, измеренных гироскопом.
5. Разработаны и приведены метод комплексирования измерений магнитометра с инерциальной навигационной системой и метод поиска объектов, обладающих собственным магнитным полем.
6. Приведен пример решения задачи комплексирования магнитометра и ИНС и обнаружения объектов, обладающих собственным магнитным полем.

4 Определение местоположения подводного аппарата с использованием ГНСС

В данной главе решается задача определения координат подводного аппарата с использованием глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). Приводится описание алгоритмов и методов определения местоположения подводного аппарата по сигналам ГНСС с возможностью кратковременного всплытия.

Приведен алгоритм определения местоположения подводного аппарата по сигналам глобальных спутниковых навигационных систем ГЛОНАСС и GPS. Данный алгоритм применим при использовании и других систем - Galileo и BeiDou.

Рассмотрены методы решения навигационной задачи потребителем - аппаратом, находящимся на водной поверхности. Предложены методы повышения обусловленности навигационной задачи за счет информации о начальных условиях: координаты точки запуска подводного аппарата, а также высоты над земным эллипсоидом с использованием модели геоида.

4.1 Алгоритм определения местоположения

4.1.1 Описание алгоритма определения местоположение

Рассматривается движущийся подводный аппарат с возможностью всплытия на поверхность. На аппарате установлена аппаратура приема сигналов спутниковых навигационных систем GPS/ГЛОНАСС.

Необходимо за время кратковременного всплытия обеспечить определение вектора состояния движущегося подводного аппарата

$$X = [x \ y \ z \ B \ \Delta B], \quad \text{где:} \quad (4.1)$$

x, y, z – координаты подводного аппарата;

B – смещение временной шкалы навигационного приемника относительно системного времени основной ГНСС;

ΔB – смещение временной шкалы системного времени дополнительной ГНСС относительно системного времени основной ГНСС, в случае, если навигация осуществляется по двум ГНСС GPS/ГЛОНАСС.

В случае, если навигация осуществляется по одной ГНСС, вектор состояния представляет:

$$X = [x \ y \ z \ B] \quad (4.2)$$

Число используемых навигационных систем, а также систему, выбранную за основную, выбирает адаптивный навигационный алгоритм, приведенный в разделе 4.1.2.

В промежутках между всплытиями, вектор состояния системы вычисляется как

$$X = [x \ y \ z] = [x_{\text{инс}} + V_x(t-t_0) \ y_{\text{инс}} + V_y(t-t_0) \ z_{\text{инс}} + V_z(t-t_0)] \quad (4.3)$$

где t_0 – время последней ГНСС коррекции;

$x_{\text{инс}}, y_{\text{инс}}, z_{\text{инс}}$ – текущая оценка координат подводного аппарата инерциальной навигационной системой;

t – текущее время;

V_x, V_y, V_z – компоненты скорости дрейфа инерциальной навигационной системы подводного аппарата, вычисляемые

в момент последней ГНСС коррекции:

$$V_x = (x_{\text{ГНСС}} - x_{\text{инс}}) / \Delta t, \quad V_y = (y_{\text{ГНСС}} - y_{\text{инс}}) / \Delta t, \quad V_z = (z_{\text{ГНСС}} - z_{\text{инс}}) / \Delta t \quad (4.4)$$

где $x_{\text{ГНСС}}, y_{\text{ГНСС}}, z_{\text{ГНСС}}$ – координаты подводного аппарата, определенные по измерениям ГНСС на момент коррекции ИНС;

$x_{\text{инс}}, y_{\text{инс}}, z_{\text{инс}}$ – оценка координат подводного аппарата инерциальной навигационной системой на момент ГНСС коррекции;

Δt – время, прошедшее от последней до предпоследней коррекции.

Аппаратура, предназначенная для организации определения местоположения группы движущихся подводных аппаратов по сигналам

глобальных навигационных спутниковых систем GPS и ГЛОНАСС, установленная на каждом из аппаратов, состоит из:

- Двухсистемного (GPS/ГЛОНАСС) спутникового навигационного приемника, установленного на движущемся подводном аппарате, с возможностью загрузки в него эфемерид и альманахов ГНСС, и выдачи принятых со спутника измерений, эфемерид и альманахов ГНСС;
- Антенно-фидерного устройства;
- Акустического канала связи между подводными аппаратами.

Пример схемы аппаратуры спутниковой навигации (подводный аппарат находится на водной поверхности) приведен на рисунке 4.1. Здесь НП – навигационный приемник, ЦБУ – центральный блок управления.

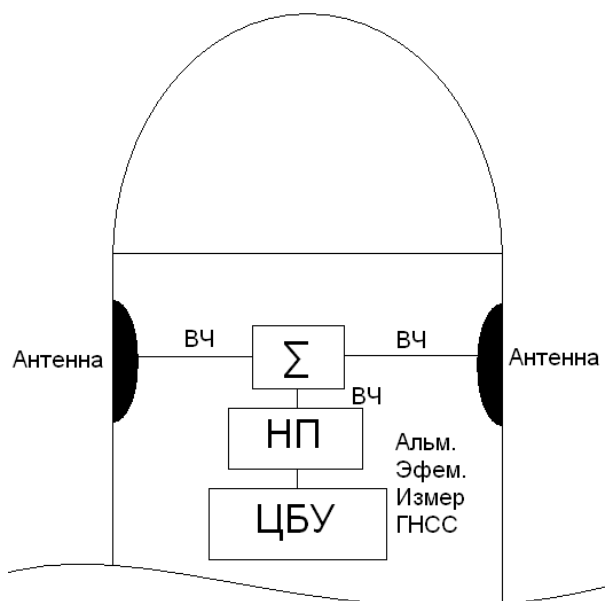


Рисунок 4.1 - Схема размещения аппаратуры спутниковой навигации в корпусе подводного аппарата

Другой вариант расположения навигационной аппаратуры – в гаргроте снаружи подводного аппарата, на выдвигающейся штанге, вместе с примером конструкции выдвигающейся штанги показан на рисунке 4.2. Сам подводный аппарат при этом остается под водой, что позволяет решать навигационную задачу даже при волнении моря.

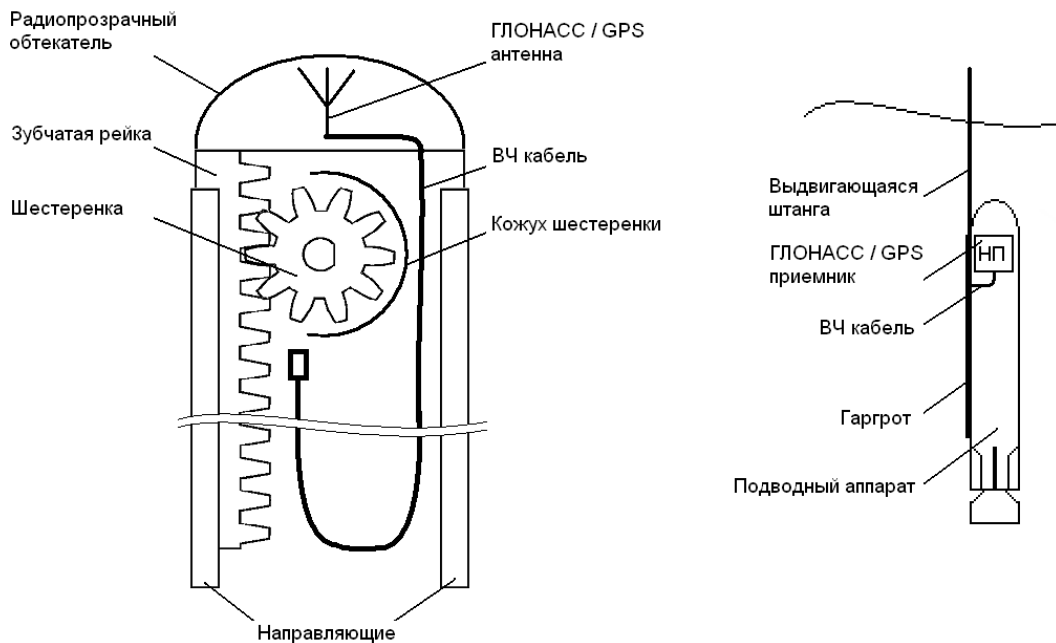


Рисунок 4.2 - Схема размещения аппаратуры спутниковой навигации в гаргроте подводного аппарата

Алгоритм применения группы движущихся подводных аппаратов выглядит следующим образом:

1. В случае, если это возможно – перед запуском движущегося подводного аппарата осуществляется загрузка эфемерид и альманахов ГНСС, а также координаты носителя. Это необходимо для задания навигационному приемнику параметров предварительной настройки каналов, позволяющей повысить скорость захвата навигационных спутников в 1,5-2 раза.
2. После пуска и прохождения определенного участка аппарат осуществляет всплытие (либо выдвижение штанги с антенной). Осуществляет прием эфемеридной информации, определяет свое местоположение по сигналам ГНСС GPS/ГЛОНАСС (см. рисунок 4.3). Минимальное время нахождения на поверхности для приема эфемерид ГЛОНАСС составляет 2,5 минуты, для GPS – 12 минут (так называемый «холодный старт»).
3. Аппарат погружается, по акустическому каналу устанавливает связь с другими аппаратами в группе. Передает обновленные эфемериды и альманахи ГНСС. Примерное время передачи эфемеридной информации ГЛОНАСС для 6

спутников при скорости передачи данных по акустическому каналу 9600 бит/с – 4 секунды, для 6 спутников GPS – 20 секунд.

4. При дальнейшей необходимости определения своих координат, решение навигационной задачи при наличии актуальной эфемеридной информации осуществляется за 5-10 секунд после всплытия или выдвижения штанги (так называемый «горячий старт»).

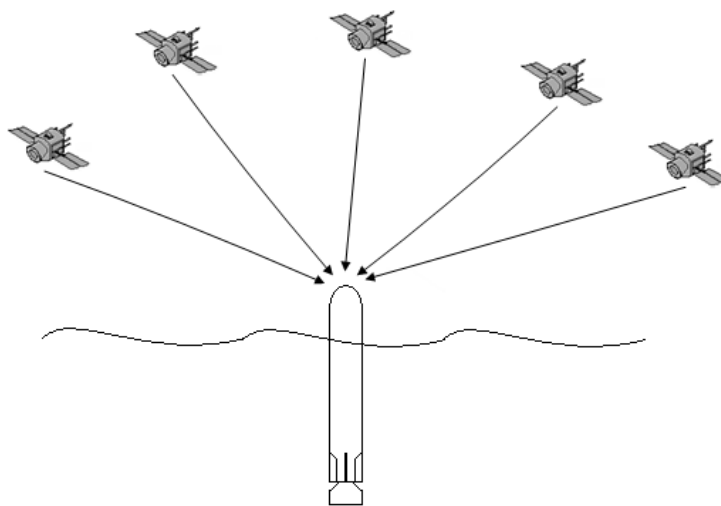


Рисунок 4.3 - Определение координат подводного аппарата при помощи навигационных спутников

Таким образом, учитывая скорость решения навигационной задачи при «холодном старте», основной спутниковой навигационной системой выбрана ГНСС ГЛОНАСС.

4.1.2 Адаптивный алгоритм спутниковой навигации

Основной целью навигационной задачи является определение пространственно-временных координат потребителя, а также составляющих его скорости, поэтому в результате решения навигационной задачи должен быть определен расширенный вектор состояния потребителя X (4.1).

Решение навигационной задачи осуществляется за счет обработки навигационных измерений R_i между i -м навигационным спутником и потребителем. Модель измерений выглядит следующим образом:

$$R_i = R_i^u + B + b_i + \zeta, \quad (4.5)$$

где

R_i^u – расстояние от i -ого спутника до навигационного приемника;

B – смещение временной шкалы навигационного приемника относительно системного времени ГНСС;

b_i – смещение временной шкалы i -м навигационного спутника относительно системного времени ГНСС (приводится в эфемеридах ГНСС);

ζ – погрешности навигационных измерений.

Таким образом, для определения вектора состояния \mathbf{X} при работе по одной ГНСС (4.2) необходимо принять измерения минимум от 4 спутников.

В случае, если навигация осуществляется по двум ГНСС (основной и дополнительной) модель измерения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} R_i^{och} &= R_i^u + B + b_i^{och} + \zeta, \\ R_i^{don} &= R_i^u + B + \Delta B + b_i^{don} + \zeta, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где ΔB – смещение временной шкалы системного времени дополнительной ГНСС относительно системного времени основной ГНСС.

Для определения вектора состояния \mathbf{X} при работе по двум ГНСС (4.1) необходимо принять измерения минимум от пяти спутников, не менее одного спутника от каждой ГНСС.

При использовании спутниковых навигационных систем в каждый момент времени подводный аппарат проводит измерения до N навигационных спутников.

Само решение навигационной задачи определения \mathbf{X} вектора состояния потребителя \mathbf{X} в один момент времени t_k с использованием метода наименьших квадратов имеет следующий вид:

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + (\mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{W}_k^{-1} \cdot \mathbf{H}_k)^{-1} \cdot \mathbf{H}_k^T \cdot \mathbf{W}_k^{-1} \cdot \Delta \eta^k, \quad (4.7)$$

где X_k – вектор состояния потребителя без учета измерений, проведенных в момент времени t_k , (априорный вектор потребителя);

X_{k+1} – вектор состояния потребителя с учетом измерений, проведенных в момент времени t_k , (апостериорный вектор потребителя);

W_k^{-1} – весовая матрица измерений, диагональная матрица, на главной диагонали которой находятся величины, обратные дисперсиям ошибок измерений;

H_k – матрица частных производных (матрица измерений),

$$H = \frac{\partial \Delta R}{\partial X_k}; \quad (4.8)$$

$\Delta \eta$ – вектор невязок измерений,

$$\Delta \eta = \eta_{\text{выч}} - \eta_{\text{изм}}, \quad (4.9)$$

Вектор $\eta_{\text{выч}}$ вычисляется на основе априорной информации векторе состояния потребителя и эфемеридной информации, передаваемой в навигационных сообщениях.

Вектор $\eta_{\text{изм}}$ определяется при помощи измерительного блока навигационного приемника.

В качестве метода, повышающего обусловленность решения навигационной задачи, можно использовать тот факт, что аппарат находится на поверхности Мирового океана, а в качестве модели Земли использовать геоид. Модель геоида приведена в главе 4.1.3.

Таким образом, при использовании модели геоида, потребитель с большой точностью знает свое расстояние до центра Земли. Поскольку, по определению, поверхность Мирового океана совпадает с поверхностью геоида, то, при использовании модели геоида, надводный потребитель с большой точностью знает свое расстояние до центра Земли. Следовательно, количество спутников, необходимых для определения вектора состояния X , сокращается до 3 при

использовании одной ГНСС, и до 4 при использовании двух ГНСС (не менее 2 спутников в каждой системе).

4.1.3 Модель геоида

Геоид — выпуклая замкнутая поверхность, совпадающая с поверхностью воды в морях и океанах в спокойном состоянии и перпендикулярная к направлению силы тяжести в любой её точке. Карта превышения геоида над земным WGS-84 эллипсоидом приведена на рисунке 4.4.

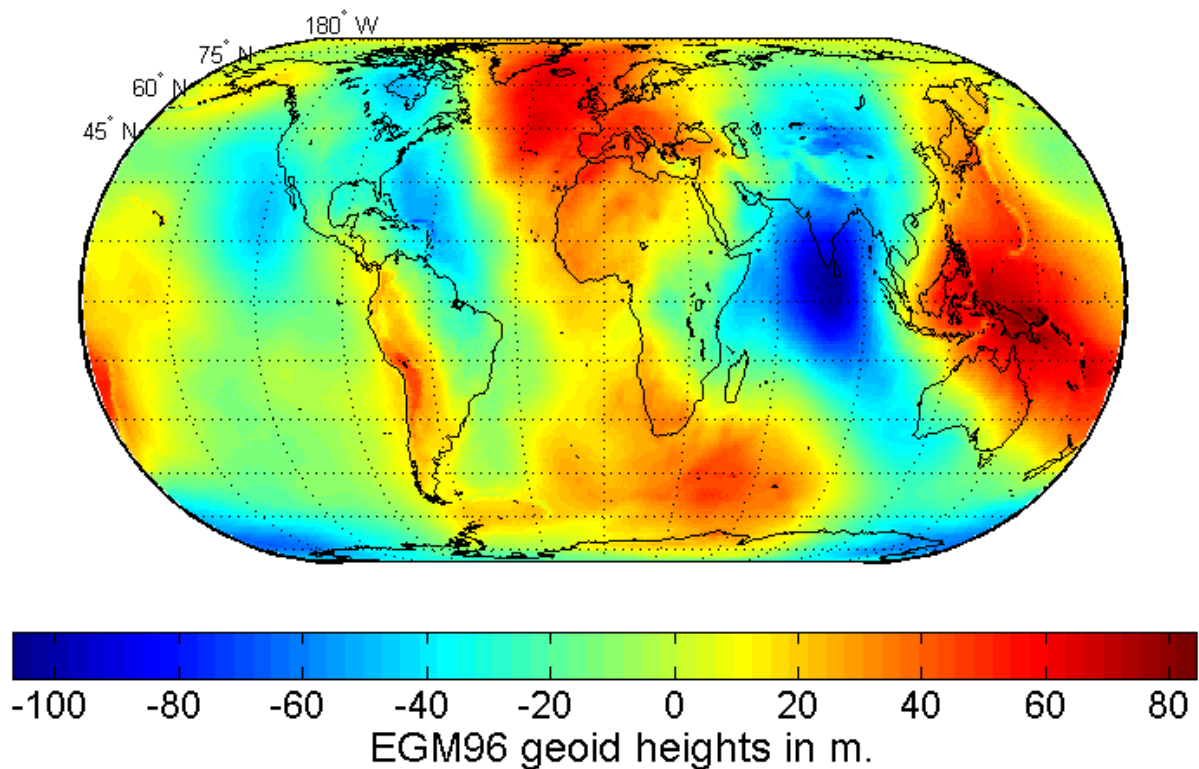


Рисунок 4.4 - Превышение геоида над земным WGS-84 эллипсоидом

Тот факт, что поверхность геоида совпадает с поверхностью воды в морях и океанах, позволяет использовать информацию о расстоянии от точки на поверхности геоида до центра Земли можно использовать как дальномерное измерение в уравнениях (4.5) - (4.6) для определения местоположения надводных объектов.

Расстояние от центра Земли до точки на поверхности геоида r_G с широтой f и долготой λ рассчитывается как:

$$r_G = r_{\text{Э}} + \Delta r, \quad (4.10)$$

где $r_{\text{Э}}$ – расстояние от центра Земли до точки на поверхности земного эллипсоида с геодезической широтой f и долготой λ , рассчитываемой по следующей формуле:

$$r_{\text{Э}} = a \sqrt{\frac{1 - e^2 (2 - e^2) \sin^2 f}{1 - e^2 \sin^2 f}}, \text{ где:} \quad (4.11)$$

$a = 6378137,0$ м – большая полуось земного эллипсоида;

$b = 6356752,3142$ м – малая полуось земного эллипсоида;

$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ – эксцентриситет земного эллипсоида;

Δr – превышение геоида над земным эллипсоидом для точки с геодезической широтой f и долготой λ , рассчитывается по табличным значениям, приведенным в таблице 4.1:

Таблица 4.1 – Превышение геоида над земным эллипсоидом, м

$f \backslash \lambda$	90° СШ	80° СШ	70° СШ	60° СШ	50° СШ	40° СШ	30° СШ	20° СШ	10° СШ	0°	10° ЮШ	20° ЮШ	30° ЮШ	40° ЮШ	50° ЮШ	60° ЮШ	70° ЮШ	80° ЮШ	90° ЮШ
180° ВД	13	33	51	47	47	52	36	31	22	18	12	17	22	18	25	16	16	-4	-30
170° ВД	13	34	43	41	48	48	28	26	23	12	13	23	27	26	26	19	16	-1	-30
160° ВД	13	28	29	21	42	35	29	15	2	-13	-2	21	34	31	34	25	17	1	-30
150° ВД	13	23	20	18	28	40	17	6	-3	-9	-14	8	29	33	39	30	21	4	-30
140° ВД	13	17	12	14	12	33	12	1	-7	-28	-25	-9	14	39	45	35	20	4	-30
130° ВД	13	13	5	7	-10	-9	-20	-29	-36	-49	-32	-10	15	41	45	35	26	6	-30
120° ВД	13	9	-2	-3	-19	-28	-15	-44	-59	-62	-38	-11	15	30	38	33	26	5	-30
110° ВД	13	4	-10	-22	-33	-39	-40	-61	-90	-89	-60	-20	7	24	39	30	22	4	-30
100° ВД	13	4	-14	-29	-43	-48	-33	-67	-95	-102	-75	-40	-9	13	28	27	16	2	-30
90° ВД	13	1	-12	-32	-42	-59	-34	-59	-63	-63	-63	-47	-25	-2	13	10	10	-6	-30

80° ВД	13	-2	-10	-32	-43	-50	-34	-36	-24	-9	-26	-45	-37	-20	-1	-2	-1	-15	-30
70° ВД	13	-2	-14	-26	-29	-28	-28	-11	12	33	0	-25	-39	-32	-15	-14	-16	-24	-30
60° ВД	13	0	-12	-15	-2	3	7	21	53	58	35	5	-23	-33	-22	-23	-29	-33	-30
50° ВД	13	2	-6	-2	17	23	29	39	60	73	52	23	-14	-27	-22	-30	-36	-40	-30
40° ВД	13	3	-2	13	23	37	43	49	58	74	68	45	15	-14	-18	-33	-46	-48	-30
30° ВД	13	2	3	17	22	18	20	39	46	63	76	58	33	-2	-15	-29	-55	-50	-30
20° ВД	13	1	6	19	6	-1	4	22	36	50	64	57	34	5	-14	-35	-54	-53	-30
10° ВД	13	1	4	6	2	-11	-6	10	26	32	52	63	45	20	-10	-43	-59	-52	-30
0°	13	3	2	2	-8	-12	-7	5	13	22	36	51	46	21	-15	-45	-61	-53	-30
10° ЗД	13	1	2	9	8	-10	-5	10	12	16	22	27	22	6	-18	-43	-60	-54	-30
20° ЗД	13	-2	1	17	8	-13	-8	7	11	17	11	10	5	1	-18	-37	-61	-55	-30
30° ЗД	13	-3	-1	10	1	-20	-15	-7	2	13	6	0	-2	-7	-16	-32	-55	-52	-30
40° ЗД	13	-3	-3	13	-11	-31	-28	-23	-11	1	-1	-9	-8	-12	-17	-30	-49	-48	-30
50° ЗД	13	-3	-7	1	-19	-34	-40	-39	-28	-12	-8	-11	-13	-12	-15	-26	-44	-42	-30
60° ЗД	13	-1	-14	-14	-16	-21	-42	-47	-38	-23	-10	-5	-10	-12	-10	-23	-38	-38	-30
70° ЗД	13	3	-24	-30	-18	-16	-29	-34	-29	-20	-8	-2	-7	-10	-10	-22	-31	-38	-30
80° ЗД	13	1	-27	-39	-22	-26	-22	-9	-10	-14	-11	-3	-4	-7	-8	-16	-25	-29	-30
90° ЗД	13	5	-25	-46	-35	-34	-26	-10	3	-3	-9	-1	1	-1	-2	-10	-16	-26	-30
100° ЗД	13	9	-19	-42	-40	-33	-32	-20	1	14	1	9	9	8	6	-2	-6	-26	-30
110° ЗД	13	11	3	-21	-26	-35	-51	-45	-11	10	32	35	32	23	14	10	1	-24	-30
120° ЗД	13	19	24	6	-12	-26	-40	-48	-41	-15	4	20	16	15	13	20	4	-23	-30
130° ЗД	13	27	37	29	24	2	-17	-32	-42	-27	-18	-5	4	-2	3	20	5	-21	-30
140° ЗД	13	31	47	49	45	33	17	-9	-16	-18	-13	-6	-8	-6	3	21	4	-19	-30
150° ЗД	13	34	60	65	63	59	31	17	3	3	-9	-5	4	6	10	24	2	-16	-30
160° ЗД	13	33	61	60	62	52	34	25	17	12	4	0	12	21	20	22	6	-12	-30
170° ЗД	13	34	58	57	59	51	44	31	33	20	14	13	15	24	27	17	12	-8	-30

4.2 Схема построения системы навигации подводного аппарата с использованием ИНС и ГНСС

Приведенный в разделе 4.1 алгоритм определения местоположения подводного аппарата с использованием ИНС и коррекций по измерениям ГНСС реализован в виде ПМО. Блок-схема построения системы ИНС+ГНСС навигации подводного аппарата приведена на рисунке 4.5.

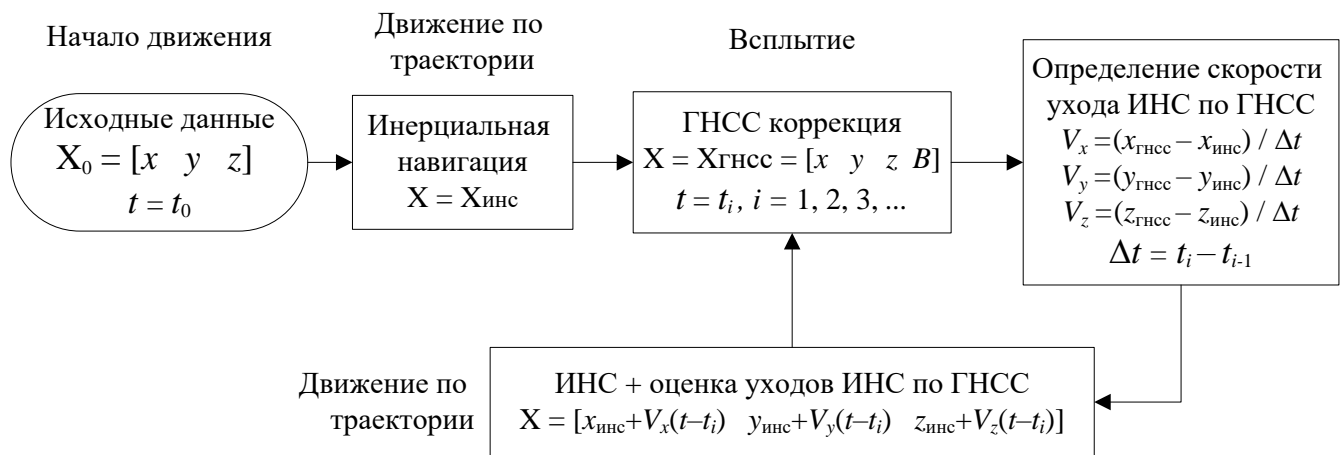


Рисунок 4.5 – Блок-схема системы ИНС+ГНСС навигации подводного аппарата

4.3 Результаты моделирования

В данном разделе приведены результаты имитационного моделирования подводного аппарата при использовании данных только ИНС и при использовании ИНС корректирующих данных от ГНСС. Результаты моделирования коррекции уходов ИНС подводного аппарата по измерениям ГНСС, полученным в момент кратковременного всплытия подводного аппарата, приведены на рисунках 4.6 – 4.10.

На рисунке 4.6 приведена моделируемая траектория подводного аппарата в вертикальной плоскости. На 950 и 2025 секундах подводный аппарат совершал всплытие с целью коррекции ИНС по измерениям ГНСС.

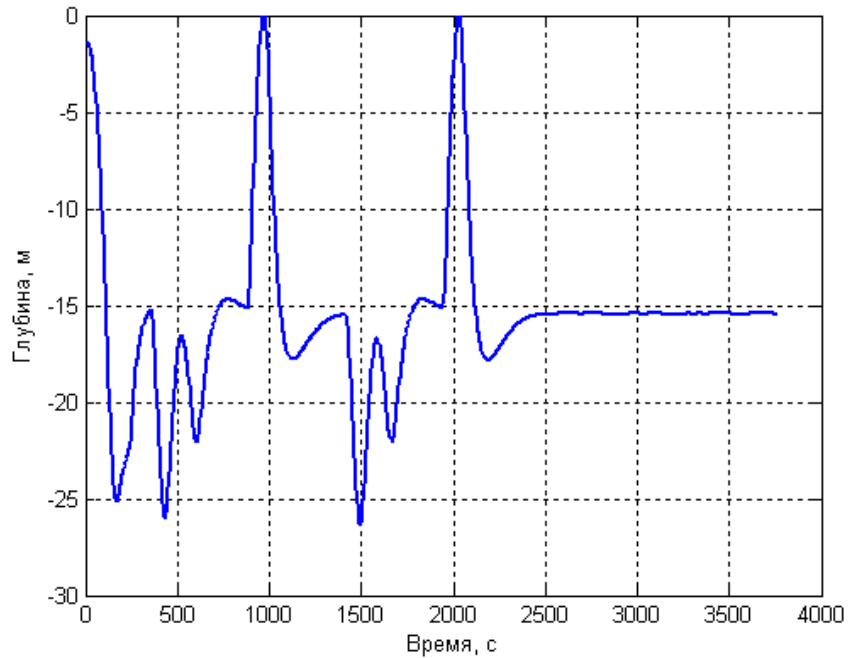


Рисунок 4.6 – Моделируемая траектория подводного аппарата в вертикальной плоскости

На рисунке 4.7 приведена моделируемая траектория подводного аппарата в горизонтальной плоскости (пунктирная синяя линия), и оценка траектории подводного аппарата на основе данных ИНС, у которой моделируется дрейф показаний чувствительных элементов.

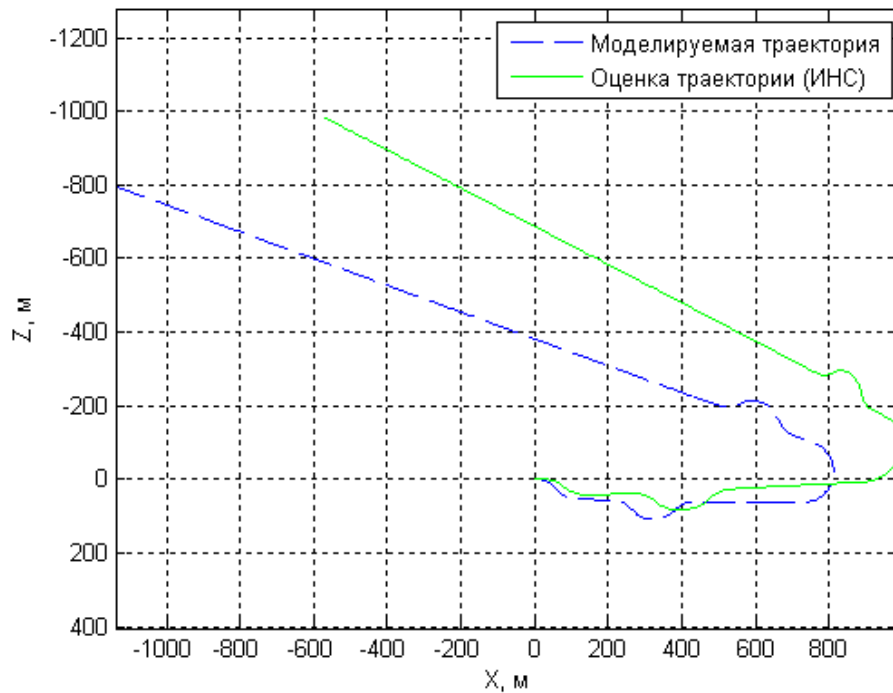


Рисунок 4.7 – Моделируемая траектория подводного аппарата и оценка траектории на основании данных ИНС

На рисунке 4.8 приведена моделируемая траектория подводного аппарата в горизонтальной плоскости (пунктирная синяя линия), и оценка траектории на основании данных ИНС при проведении коррекциями ИНС с помощью измерений ГНСС (пунктирная зеленая линия).

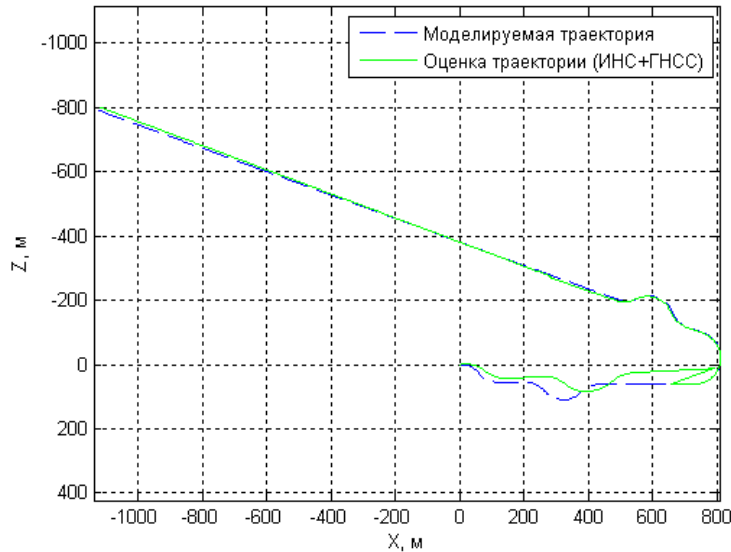


Рисунок 4.8 – Моделируемая траектория подводного аппарата и ее оценка с использованием данных ИНС+ГНСС

На рисунках 4.9 и 4.10 приведены для сравнения оценки траекторий (пунктирная синяя линия) и погрешности определения местоположения подводного аппарата с помощью только ИНС (пунктирная красная линия) и ИНС и коррекциями по измерениям ГНСС (сплошная зеленая линия).

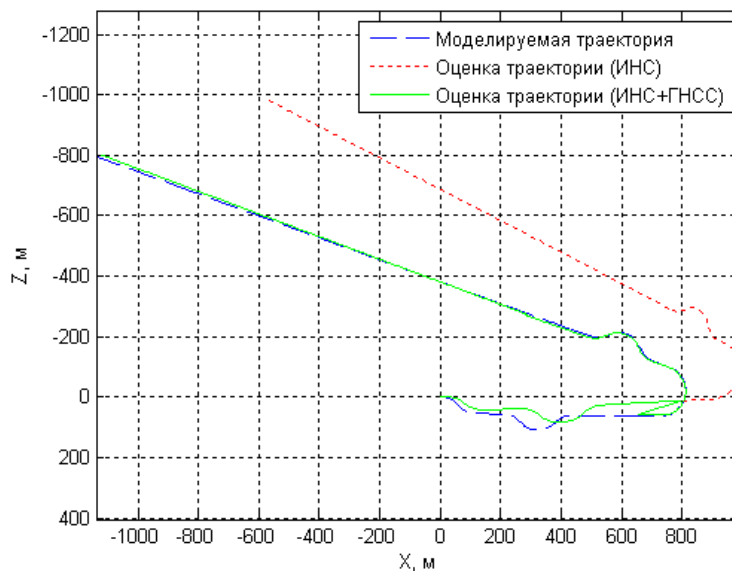


Рисунок 4.9 – Сравнение оценки траектории подводного аппарата с использованием данных только ИНС и данных ИНС+ГНСС

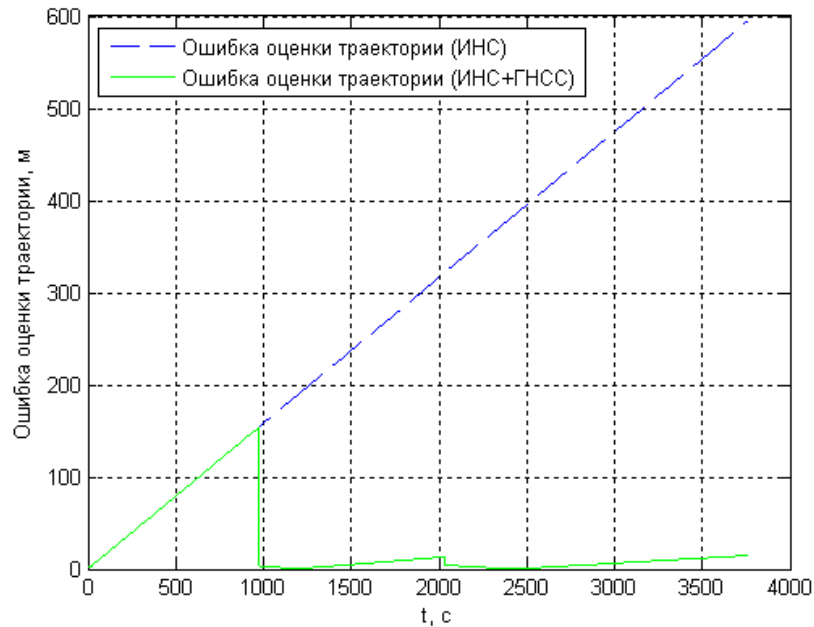


Рисунок 4.10 – Погрешности определения местоположения подводного аппарата с использованием данных только ИНС и данных ИНС+ГНСС

Из представленных на рисунках 4.8 и 4.9 результатов моделирования видно, что применение коррекции ИНС с использованием ГНСС уменьшает погрешность определения координат подводного аппарата до приблизительно 10 м, в то время как без коррекции ИНС ошибки определения местоположения могут достигать 500-600 м и более.

4.4 Выводы к главе 4

1. Рассмотрена задача определения координат подводного аппарата с использованием ГНСС. Приведено описание алгоритмов и методов определения местоположения подводного аппарата по сигналам ГНСС при кратковременном всплытии на поверхность воды.
2. Предложен метод повышения обусловленности навигационной задачи по сигналам ГНСС за счет информации о начальных условиях: координаты точки запуска подводного аппарата, а также высоты над земным эллипсоидом с использованием модели геоида.
3. Приведены результаты решения задачи корректировки ИНС подводного аппарата, осуществившего кратковременное всплытие, с использованием сигналов ГНСС (ГЛОНАСС, GPS, Galileo, Beidou).

4. Результаты имитационного моделирования показали, что применение коррекции ИНС с использованием ГНСС уменьшает погрешность определения координат подводного аппарата до приблизительно 10 м, в то время как без коррекции ИНС ошибки определения местоположения возрастают до 500-600 м и выше.

5 Формирование уточненной ЭВИ для повышения точности навигации подводного аппарата с использованием ГНСС

В данной главе решается задача вычисления уточненной ЭВИ для повышения точности навигации подводного аппарата с использованием измерений от спутниковых навигационных систем.

Вначале рассматривается задача определения форматов передачи дифференциальных поправок, которые могут быть использованы для передачи дифференциальных данных. Поскольку для подводного аппарата, всплывшего на поверхность на некоторое время, актуальным является уменьшение времени получения дифференциальных данных. Существующие форматы передачи данных – форматы SBAS и RTCM-104 – не ограничены временем передачи дифференциальных данных потребителю и они содержат ряд дополнительной информации, не требующейся при навигации подводного аппарата.

Следующей задачей является разработка алгоритмов и программного обеспечения вычисления уточненной ЭВИ на основе использования беззапросных измерений от навигационных спутников ГНСС. Данные измерения собираются при помощи глобальной сети измерений.

Применение уточненной ЭВИ ГЛОНАСС позволит повысить точность навигационных определений подводного аппарата при всплытии.

5.1 Предложения по форматам передачи дифференциальных данных

Дифференциальные данные предполагается передавать в режиме ретрансляции данных, то есть в режиме реального времени по космическим каналам связи. Это означает, что оперативность доставки информации зависит в основном от различных временных задержек в каналах передач данных. Поскольку, эти временные задержки достаточно малы, то можно предполагать, что оперативность доставки информации потребителю измеряется несколькими секундами.

Помимо дифференциальных данных предлагается также передавать данные о целостности систем ГЛОНАСС/GPS/Galileo/BeiDou. Это дает возможность, во-первых, поэтапно разрабатывать и реализовывать программное обеспечение. Так, на первом этапе будут передаваться только данные о целостности, а на втором – еще и данные о дифференциальных поправках. Во-вторых, это позволяет применять два типа навигационных алгоритмов: один тип (простой) использует данные только о целостности для повышения точности навигационных измерений в абсолютном режиме. Более сложный навигационный алгоритм будет использовать широкозонную дифференциальную коррекцию.

Следующее замечание относится к данным об ионосферных поправках. Широкозонные системы SBAS (американская WAAS, европейская EGNOS, японская MSAS, индийская GAGAN, российская СДКМ) передают данные на частоте L1 подобно гражданским сигналам GPS. То есть потребитель SBAS, в первую очередь – это гражданская авиация, использует одночастотный приемник, для которого данные об ионосфере важны. В настоящее время система ГЛОНАСС излучает сигналы в двух диапазонах - L1 и L2. Система GPS модернизируется и запланирована передача открытых сигналов также в двух диапазонах - L1 и L5. Система Galileo будет передавать сигналы тоже в двух диапазонах - L1 и L5 (E5). Поэтому для современного потребителя, оснащенного двухчастотным приемником, задача передачи данных об ионосферной задержке не столь актуальна. Заметим, что в настоящее время разрабатывается стандарт для использования в гражданской авиации сигналов в диапазонах L1 и L5.

Таким образом, дифференциальные поправки должны содержать:

- корректирующие данные к ЭВИ (поправки к эфемеридам и бортовой шкале);
- поправки к дальномерным кодовым измерениям;
- данные о точности дифференциальных измерений (UDRE).

Подробно рассмотрим эти поправки, причем выделим три аспекта:

- модель дифференциальных поправок;
- время старения данных (или интервал применения);

- формат поправок.

Также необходимо рассмотреть вопрос о выявлении ошибок при передаче данных.

5.1.1 Дифференциальные поправки к ЭВИ

Поправки к ЭВИ являются медленно меняющимися, то есть имеют долгопериодический характер. Так, в системах SBAS, данные поправки могут применяться до 240-300 с. Применяемая в SBAS модель поправок к ЭВИ – линейная.

Назначение данных поправок – уточнение эфемерид и бортовой шкалы времени.

Предлагаются два варианта дифференциальных поправок к ЭВИ.

Первый вариант аналогичен тому, что применяется в системе SBAS:

модель поправок к частотно-временным поправкам:

$$\delta\Delta t_{sv}(t_k) = \delta\alpha_0 + \delta\alpha_1(t_k - t_0), \quad (5.1)$$

а модель поправок к эфемеридам есть:

$$\begin{bmatrix} \delta x(t_k) \\ \delta y(t_k) \\ \delta z(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta z_1 \end{bmatrix} (t_k - t_0), \quad (5.2)$$

где t_0 – опорное время переданных дифференциальных поправок,

t_k – текущее время,

$\delta\Delta t_{sv}$ – поправка к текущему значению бортовой шкалы,

$\delta x(t_k)$, $\delta y(t_k)$, $\delta z(t_k)$ – поправки к текущим эфемеридам, WGS-84,

$\delta\alpha_0$, $\delta\alpha_1$, δx_0 , δx_1 , δy_0 , δy_1 , δz_0 , δz_1 – коэффициенты модели поправок к ЭВИ.

Формат сообщения дифференциальных поправок к ЭВИ приведен в таблице 5.1.

Таблица 5.1 - Формат сообщения о дифференциальных поправках к ЭВИ

Название данных	Длина, бит	Масштаб	Значение
Тип сообщения	4		
Номер спутника	7 (5)		
δx_0	11	0.125 м	± 128 м
δy_0	11	0.125 м	± 128 м
δz_0	11	0.125 м	± 128 м
δa_0	11	2^{-31} с	$\pm 2^{-21}$ с
δx_1	8	0.00048828125 м/с	± 0.0625 м/с
δy_1	8	0.00048828125 м/с	± 0.0625 м/с
δz_1	8	0.00048828125 м/с	± 0.0625 м/с
δa_1	8	2^{-39} с/с	$\pm 2^{-32}$ с/с
Опорное время t_0	13	16	0-86400 с
Контрольная сумма	16		

Длина сообщения составляет 116 (114) бит.

Длина данных о номере спутника зависит от характера самого номера: если номер включает тип системы, тогда длина номера составляет 7 бит (2 бита – тип системы, 5 – номер спутника в системе); либо тип сообщения связан с типом навигационной системы и тогда номер спутника состоит из 5 бит.

Если усложнить модель дифференциальных поправок, то мы сможем на большее время уточнять ЭВИ. И таким образом можно реже передавать дифференциальные поправки к ЭВИ. Поэтому предлагается в этом случае применять второй вариант передачи дифференциальных поправок к ЭВИ.

Второй вариант предполагает использование квадратичной модели дифференциальных поправок:

$$\delta \Delta t_{sv}(t_k) = \delta a_0 + \delta a_1(t_k - t_0) + \delta a_2(t_k - t_0)^2 \quad (5.3)$$

$$\begin{bmatrix} \delta x(t_k) \\ \delta y(t_k) \\ \delta z(t_k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta x_0 \\ \delta y_0 \\ \delta z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta z_1 \end{bmatrix} (t_k - t_0) + \begin{bmatrix} \delta x_2 \\ \delta y_2 \\ \delta z_2 \end{bmatrix} (t_k - t_0)^2 \quad (5.4)$$

В этом случае длина сообщения составит не более 140 бит.

Отметим, в системах SBAS возможна также передача одних корректирующих поправок $\delta a_0, \delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta z_1$.

Поэтому необходимо выбрать оптимальную модель дифференциальных поправок к ЭВИ с учетом времени их применения по результатам расчетов уточненных эфемерид и сравнения с моделями эфемерид ГЛОНАСС, GPS, Galileo и BeiDou.

5.1.2 Дифференциальные поправки к дальномерным измерениям

Поправки к дальномерным измерениям являются быстро меняющимися. Назначение данных поправок – учет быстрых факторов, таких, как селективный доступ, короткопериодические изменения в бортовой шкале времени и т.д. В системах SBAS, время применения данных поправок составляет 12-18 с. В случае необходимости существует возможность уменьшения времени применения до 6 с.

В SBAS передаются значения только самих поправок. Для определения скорости изменения дальномерных поправок потребитель должен сам вычислять на основе текущего и предыдущего значений дальномерных поправок.

Поскольку поправки к дальномерным измерениям должны передаваться достаточно часто, то рационально объединить их с передачей данных о точности дифференциальных измерений.

Следующее замечание относится к опорному времени, которому соответствуют передаваемые дальномерные поправки. Напомним, что дифференциальные поправки передаются в режиме трансляции. Поэтому в качестве опорного времени предлагается применять время приема потребителем данной дифференциальной поправки (для однозначности можно определить в

качестве опорного времени время приема первого бита этого сообщения). Заметим, что в системах SBAS применяется именно такой прием.

Теперь осталось определить модель дальномерных поправок. Понятно, что тип модели неразрывно связан с частотой передачи поправок и точностью их прогнозирования. Наиболее рациональным вариантом с точки зрения учета различных немоделируемых неопределенностей (селективный доступ, ионосферные флуктуации, давление световых лучей) является передача как можно чаще самих поправок. И в этом случае модель дальномерных поправок фактически отсутствует, а формула для вычисления псевдодальности есть:

$$PR_{\text{выч}}(t_k) = PR_{\text{изм}}(t_k) + PRC(t_o), \quad (5.5)$$

где $PR_{\text{изм}}(t_k)$ – измеренная псевдодальность до спутника,

$PRC(t_o)$ – переданная дифференциальная поправка для опорного времени t_o ,

$PR_{\text{выч}}(t_k)$ – скорректированная (вычисленная) псевдодальность до спутника.

Для того чтобы учесть предысторию дальномерных поправок можно использовать линейную модель. Причем саму величину скорости изменения дальномерных поправок для уменьшения объема передаваемой информации не передавать, а вычислять на основе дальномерных дифференциальных поправок:

$$RRC(t_k) = \left(PRC_{\text{тек}} - PRC_{\text{пред}} \right) / \Delta t, \quad (5.6)$$

где $RRC(t_k)$ – скорость изменения дальномерных поправок,

$PRC_{\text{тек}}$ – текущая дифференциальная дальномерная поправка,

$PRC_{\text{пред}}$ – предыдущая дифференциальная дальномерная поправка,

Δt – интервал времени между переданными дифференциальными

дальномерными поправками.

Формула для вычисления псевдодальности есть:

$$PR_{\text{выч}}(t_k) = PR_{\text{изм}}(t_k) + PRC(t_o) + RRC(t_k) \cdot (t_k - t_o). \quad (5.7)$$

В системах SBAS применяется данная модель дальномерных поправок.

Следующий шаг в сторону усложнения применяемой модели дальномерных поправок – это включение в состав передаваемых данных величин $RRC(t_k)$.

Заметим, что данный подход применяется при передаче дифференциальных поправок по формату RTCM -104.

На наш взгляд, дальнейшее усложнение модели дифференциальных дальномерных поправок не представляется целесообразным, поскольку существуют немоделируемые факторы.

Для вычисления объема занимаемых данных для передачи величины *PRC* необходимо определить диапазон изменения этой величины и дискретность (или точность) ее определения. Если задать диапазон изменения как $[-256.0 \text{ м}, +255.875 \text{ м}]$, а дискретность 0.125 м , то для передачи достаточно 12 бит ($512 / 0.125 = 4096 = 2^{12}$).

Для передачи точности дифференциальных измерений с целью уменьшения объема передаваемых данных будем передавать значение индикатора точности дифференциальных измерений (UDREI). Соответствие между индикатором UDREI и среднеквадратическим отклонением ошибки дифференциального дальномерного измерения (UDRE) приведено в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Точность дифференциальных дальномерных измерений

UDREI	0	1	2	3	4	5	6	7
UDRE, м	0.75	1	1.25	1.75	2.25	2.75	3.5	4.25
UDREI	8	9	10	11	12	13	14	15
UDRE, м	5	6	7.5	10	15	25	50	∞

Если величина индикатора равна 15, то это означает невозможность использования данного дифференциального дальномерного измерения.

Теперь рассмотрим варианты формата передачи дифференциальных дальномерных поправок.

5.1.3 Формат передачи дифференциальных данных: вариант № 1

Вариант с жесткой разбивкой спутников по слотам предполагает передачу “пустых” данных – то есть данных о дифференциальных поправках для спутников, которых станции мониторинга не видят. Поэтому, поскольку существуют определенные проблемы с пропускной способностью канала передачи дифференциальных данных, то данный вариант исключим из рассмотрения как неэкономичный.

5.1.4. Формат передачи дифференциальных данных: вариант № 2

Данное предложение о формате передачи данных о целостности базируется на передаче сообщения о номерах спутников - **последовательность номеров спутников** (ПНС), для которых осуществляется передача дифференциальных поправок. И уже все последующие сообщения о дифференциальных поправках основываются на этой последовательности. Соответствие между номером спутника и дифференциальными поправками определяется номером в последовательности.

Рационально разделить сообщения по типам навигационных спутников: GPS, ГЛОНАСС, Galileo, BeiDou Это позволит, с одной стороны, уменьшить размер сообщений, а с другой стороны, передавать данные только для одной навигационной системы, например, только для ГЛОНАСС.

Как и прежде, выделим для передачи типа сообщения 4 бита.

В таблице 5.3 приведены предлагаемые типы сообщений для передачи данных о целостности, дифференциальных дальномерных поправках и поправках к ЭВИ.

Таблица 5.3 – Типы сообщений для передачи данных о целостности и дифференциальных данных (вариант №2)

Номер сообщения	Тип сообщения	Значение, биты
1	Номера спутников системы GPS, для которых передаются данные о целостности и дифференциальные поправки	0001
2	Номера спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные о целостности и дифференциальные поправки	0010
3	Номера спутников системы Galileo, для которых передаются данные о целостности и дифференциальные поправки	0011
4	Номера спутников системы BeiDou, для которых передаются данные о целостности и дифференциальные поправки	0100
5	Данные о целостности системы GPS, (оценки ошибок измерения псевдодальностей для спутников, номера которых были переданы в сообщении 1)	0101
6	Данные о целостности системы ГЛОНАСС, (оценки ошибок измерения псевдодальностей для спутников, номера которых были переданы в сообщении 2)	0110
7	Данные о целостности системы Galileo, (оценки ошибок измерения псевдодальностей для спутников, номера которых были переданы в сообщении 3)	0111
8	Данные о целостности системы BeiDou, (оценки ошибок измерения псевдодальностей для спутников, номера которых были переданы в сообщении 4)	1000
9	Дифференциальные дальномерные поправки к измерениям с использованием системы GPS, (номера спутников были переданы в сообщении 1)	1001
10	Дифференциальные дальномерные поправки к измерениям с использованием системы ГЛОНАСС, (номера спутников были переданы в сообщении 2)	1010
11	Дифференциальные дальномерные поправки к измерениям с использованием системы Galileo, (номера спутников были переданы в сообщении 3)	1011
12	Дифференциальные дальномерные поправки к измерениям с использованием системы BeiDou, (номера спутников были переданы в сообщении 4)	1100
13	Поправки к ЭВИ спутников системы GPS (номера спутников были переданы в сообщении 1)	1101

14	Поправки к ЭВИ спутников системы ГЛОНАСС (номера спутников были переданы в сообщении 2)	1110
15	Поправки к ЭВИ спутников системы Galileo (номера спутников были переданы в сообщении 3)	1111
0 (16)	Поправки к ЭВИ спутников системы BeiDou (номера спутников были переданы в сообщении 4)	0000

Поскольку число спутников навигационных систем, для которых осуществляется передача дифференциальных данных, есть величина переменная (определяется, в первую очередь, условиями видимости), то все эти сообщения будут иметь переменную длину, зависящей от числа спутников. Следовательно, в теле самого сообщения должна присутствовать информация о числе спутников. Для передачи данных для системы, состоящей из 32 спутников (GPS) необходимо использовать 5 бит (диапазон значений от 0 до 31).

Также необходимо учесть изменение состава спутников, для которых передаются данные о целостности. То есть нужно учесть ситуацию, когда потребитель по какой-то причине пропустил новое сообщение о номерах спутников и получил сообщение об ошибках измерений уже для новой последовательности номеров спутников. Для решения этой задачи – обеспечения корректности принимаемых данных о целостности – достаточно ввести в тело сообщения величину, характеризующую изменение последовательности номеров спутников или **признак последовательности номеров спутников (ППНС)**. Это является аналогом GPS-переменных IOD (Issue Of Data): IODP (Issue Of Data PRN), IODC (Issue Of Data Clock), IODE (Issue Of Data Ephemeris) и т.д. Причем величина, характеризующая изменение последовательности номеров спутников, для каждой навигационной системы должна быть своя: ППНС_{GPS}, ППНС_{ГЛОНАСС}, ППНС_{Galileo}, ППНС_{BeiDou}. И при изменении состава номеров спутников, для которых осуществляется мониторинг, будет изменяться соответствующая величина ППНС. Поскольку этот состав спутников меняется достаточно редко (когда появляется или уходит из зоны видимости системы мониторинга спутник),

то достаточно, чтобы диапазон циклического изменения этой величины был равен 8 (то есть выделяется 3 бита).

Теперь рассмотрим пример формирования сообщений с использованием данного подхода. Пусть нужно передать данные для спутников системы ГЛОНАСС. Вначале сформируем сообщение о номерах спутников системы ГЛОНАСС, для которых осуществляется мониторинг. Пусть осуществляется мониторинг для 12-и спутников. Пример сообщения приведен в таблице 5.4.

Таблица 5.4 – Пример сообщения о номерах спутников системы ГЛОНАСС (вариант №2)

Название данных		Содержание	Длина, бит
Преамбула			8
Тип сообщения: номера спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные		1010	4
Число спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные		01100	5
Номера спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются дифференциальные поправки	для 1-го спутника	N_1	5
	Для 2-го спутника	N_2	5
	
	для 11-го спутника	N_{11}	5
	для 12-го спутника	N_{12}	5
Признак последовательности номеров спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются дифференциальные данные		ППНС _{ГЛОНАСС}	3
Контрольная сумма		Значение контрольной суммы	16

Длина сообщения о номерах 12 спутников составляет 96 бит.

Затем сформируем сообщение о дифференциальных дальномерных поправках совместно с оценкой точности дифференциальных измерений для

спутников, номера которых были переданы в предыдущем сообщении. Пример такого сообщения приведен в таблице 5.5.

Таблица 5.5 – Пример сообщения о дифференциальных дальномерных поправках спутников системы ГЛОНАСС (вариант №2)

Название данных		Содержание	Длина, бит
Преамбула			8
Тип сообщения: дифференциальные дальномерные поправки к измерениям с использованием системы ГЛОНАСС		0111	4
Число спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные		01100	5
Дальномерные дифференциальные поправки для спутников системы ГЛОНАСС (номера спутников определяются сообщением 0010)	для 1-го спутника	PRC_1	12
	для 2-го спутника	PRC_2	12
	
	для 11-го спутника	PRC_{11}	12
	для 12-го спутника	PRC_{12}	12
Оценки ошибок дифференциальных дальномерных измерений спутников системы ГЛОНАСС (номера спутников определяются сообщением 0010)	для 1-го спутника	$UDREI_1$	4
	для 2-го спутника	$UDREI_2$	4
	...		
	для 11-го спутника	$UDREI_{11}$	4
	для 12-го спутника	$UDREI_{12}$	4
Признак последовательности номеров спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные о целостности		$ППНС_{ГЛОНАСС}$	3
Контрольная сумма		Значение контрольной суммы	16

Длина данного сообщения о дифференциальных дальномерных поправках совместно с оценкой точности дифференциальных дальномерных измерений для 12 спутников составляет 220 бит.

5.1.5 Формат передачи дифференциальных данных: вариант № 3

Следующее предложение о формате передачи данных о целостности основывается на совместной передаче в теле сообщения и номеров спутников, и оценок ошибок измерения псевдодальностей до этих спутников. Сообщения о целостности разделены по типам навигационных спутников: GPS, ГЛОНАСС, Galileo, BeiDou. Выделим для типа сообщения 4 бита.

В таблице 5.6 приведены предлагаемые типы сообщений для передачи данных о целостности и дифференциальных данных.

Таблица 5.6 – Типы сообщений для передачи данных о целостности и дифференциальных данных (вариант № 3)

Номер сообщения	Тип сообщения	Значение, биты
1	Данные о целостности для системы GPS	0001
2	Данные о целостности для системы ГЛОНАСС	0010
3	Данные о целостности для системы Galileo	0011
4	Данные о целостности для системы BeiDou	0100
5	Дальномерные дифференциальные поправки для спутников системы GPS	0101
6	Дальномерные дифференциальные поправки для спутников системы ГЛОНАСС	0110
7	Дальномерные дифференциальные поправки для спутников системы Galileo	0111
8	Дальномерные дифференциальные поправки для спутников системы BeiDou	1000
9	Поправки к ЭВИ спутника системы GPS	1001
10	Поправки к ЭВИ спутника системы ГЛОНАСС	1010
11	Поправки к ЭВИ спутника системы Galileo	1011
12	Поправки к ЭВИ спутника системы BeiDou	1100

13-16	Резерв	
-------	--------	--

Сообщения для передачи данных имеют переменную длину, поэтому в начале самого сообщения присутствует информация о числе спутников, для которых осуществляется мониторинг. Как и в варианте № 2, для этого числа спутников выделяется 5 бит (максимальное число 31).

Затем для каждого спутника передается его номер (5 бит) и оценка ошибки измерения псевдодальностей до этого спутника (4 бита).

Завершает сообщение контрольная сумма.

Пример сообщения для передачи данных о дальномерных дифференциальных поправках и оценках точности дифференциальных дальномерных измерений для 12 спутников системы ГЛОНАСС приведен в табл. 5.7.

Таблица 5.7 – Пример сообщения о дифференциальных поправках для системы ГЛОНАСС (вариант № 3)

Название данных		Содержание	Длина, бит
Преамбула			8
Тип сообщения: дальномерные дифференциальные поправки для спутников системы ГЛОНАСС		0100	4
Число спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные о дифференциальных поправках		01100	5
Повторяется для каждого спутника системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные о	номер 1-го спутника	N_1	5
	дифференциальная дальномерная поправка для 1-го спутника	PRC_1	12
	оценка точности дифференциальных дальномерных измерений для 1-го спутника	$UDREI_1$	4

дифференци- альных поправках	номер 2-го спутника	N_2	5
	дифференциальная дальномерная поправка для 2-го спутника	PRC_2	12
	оценка точности дифференциальных дальномерных измерений для 2-го спутника	$UDREI_2$	4
	
	номер 12-го спутника	N_{12}	5
	дифференциальная дальномерная поправка для 12-го спутника	PRC_{12}	12
	оценка точности дифференциальных дальномерных измерений для 12-го спутника	$UDREI_{12}$	4
Контрольная сумма		Значение контрольной суммы	16

Длина данного сообщения о дифференциальных поправках (для 12 спутников, вариант № 3) составляет 285 бит.

В случае возникновения потребности скорейшей передачи о дифференциальной поправке либо точности дифференциальных измерений для какого-либо спутника, то можно передавать данные только для одного спутника (см. табл.5.8). Длина такого сообщения составляет 54 бит. При увеличении длины сообщения всего на 3 бита достигается большая универсальность: все данные о дифференциальных поправках передаются при помощи трех сообщений. В таблице 5.8 приведен пример сообщения для передачи данных для спутника системы ГЛОНАСС.

Таблица 5.8 – Дифференциальные поправки для одного спутника (вариант №3)

Название данных	Содержание	Длина, бит
Преамбула		8
Тип сообщения: дальномерные дифференциальные поправки для спутника системы ГЛОНАСС	0110	4
Число спутников системы ГЛОНАСС, для которых передаются данные о дифференциальных поправках	00001	5
Номер спутника	N	5
Дифференциальная дальномерная поправка для спутника	PRC	12
Оценка точности дифференциальных дальномерных измерений для спутника	UDREI	4
Контрольная сумма	Значение контрольной суммы	16

5.1.6 Формат служебных данных

В данном разделе обсуждаются вопросы об объемах служебных данных, необходимых для идентификации сообщений и проверки правильности приема данных.

Для идентификации сообщений, как уже отмечалось ранее, используется так называемая преамбула. Размер преамбулы определяет число возможных сообщений.

Предлагается использовать 4-битовую преамбулу, что дает возможность применения 16 сообщений. Необходимо отметить, что длина преамбулы влияет на вероятность правильного распознавания начала сообщения. Но этот аспект неразрывно связан с контрольной суммой сообщения. И даже, если мы неправильно определим начало сообщения, то контрольная сумма укажет на это. И потребитель просто пропустит часть данных. В нормальных же условиях конец

сообщения означает начало следующего сообщения. Поэтому не рационально применять большую длину преамбулы.

Следующий момент относится к размеру контрольной суммы сообщения. Алгоритм подсчета контрольной суммы и размер контрольной суммы определяют вероятность обнаружения ошибочных данных в принятом сообщении. Так, если использовать алгоритм CRC – Q (Qualcomm Corporation), то вероятность пропуска ошибки в данных $\leq 2^{-n}$, где n – длина контрольной суммы в битах. В таблице 5.9 приведены значения вероятности пропуска ошибки в данных в зависимости от длины контрольной суммы.

На наш взгляд, 8-битовая длина контрольной суммы является недостаточной для надежного обнаружения ошибки в принятых данных. Необходимо использовать, по крайней мере, 16-битовую контрольную сумму: это даст возможность индцировать ошибку с вероятностью 0.99998.

Таблица 5.9 – Вероятность обнаружения ошибки в данных

Длина контрольной суммы, биты	Вероятность пропуска ошибки
8	$\leq 0.39 \cdot 10^{-2}$
16	$\leq 0.15 \cdot 10^{-4}$
24	$\leq 0.6 \cdot 10^{-7}$
32	$\leq 0.23 \cdot 10^{-11}$

Отметим, что вероятность пропуска ошибки зависит от объема данных, в которых необходимо обнаружить ошибку. Формула для вероятности пропуска ошибки $P \leq 2^{-n}$ есть оценка сверху. И при уменьшении длины сообщения вероятность пропуска ошибки в данных в действительности будет меньше.

5.1.7 Объем дифференциальных данных

В данном разделе определяется объем данных уточненной ЭВИ и данных о целостности, необходимый для вхождения в дифференциальный режим навигации подводного аппарата. Напомним, что в варианте № 1 резервируются поля для всех спутников, в том числе для которых нет данных, то этот вариант заведомо хуже вариантов № 2 и 3, использующих плавающий формат.

Для варианта № 2:

1. Общая длина сообщений, содержащих номера спутников систем GPS и ГЛОНАСС : $96+96=192$ (бита).

2. Общая длина сообщений, содержащих данные о целостности спутников систем GPS и ГЛОНАСС : $84+84=168$ (бит).

3. Длина сообщений, содержащих данные о ЭВИ спутников систем GPS и ГЛОНАСС : 116 (бита).

4. Длина сообщений, содержащих данные о дальномерных поправках спутников систем GPS и ГЛОНАСС : $220+220 = 440$ (бит).

Общая объем данных: 916 бит.

Для варианта № 3:

1. Общая длина сообщений, содержащих данные о целостности спутников систем GPS и ГЛОНАСС : $141+141=282$ (бита).

2. Длина сообщений, содержащих данные о ЭВО спутников систем GPS и ГЛОНАСС : 114 (бит).

3. Длина сообщений, содержащих данные о дальномерных поправках спутников систем GPS и ГЛОНАСС : $285+285 = 570$ (бит).

Общая объем данных: 966 бит.

Таким образом, при скорости передачи данных 250 бит/секунд, применяемой в системах SBAS, время получения всех данных, необходимых для вхождения в дифференциальный режим, не превышает 4 секунд. Для сравнения:

для систем SBAS максимальное время обновления всех данных составляет 300 секунд, что существенно превышает предложенные варианты передачи дифференциальных данных для подводного аппарата [28].

5.2 Формирование уточненной ЭВИ ГНСС в реальном времени

Согласно Федеральной целевой программой «Поддержание, развитие и использование системы ГЛОНАСС на 2012 – 2020 годы» к 2016 году точность навигации потребителя должна достигать 1,4 м (СКО). В настоящий момент, согласно данным СДКМ, точность ГЛОНАСС навигации при использовании двухчастотной навигационной аппаратуры составляет 4 м (СКО) [17].

Основной вклад в погрешность определения местоположения вносят:

- погрешность частотно-временной информации – 2,8 м (≈ 9 нс);
- погрешность эфемеридной информации – 0,8 м;
- ошибки компенсации ионосферной и тропосферной задержек – 0,2 м;
- многолучевость – 0,1 м;
- тепловой шум приемника – 0,1 м.

Таким образом, основной вклад в погрешность определения местоположения вносит погрешности эфемеридной и частотно-временной информации ГЛОНАСС. Для выполнения требования Федеральной целевой программой «Поддержание, развитие и использование системы ГЛОНАСС на 2012 – 2020 годы» по точности навигации необходимо снизить погрешности до уровня ≈ 1 м.

Поэтому для повышения точности навигации подводного аппарата необходимо разработать и реализовать в программно-технических средствах методики и алгоритмы формирования уточненной ЭВИ в реальном времени.

5.2.1 Постановка задачи

Сформулируем техническую постановку задачи формирования уточненной ЭВИ в реальном времени.

Дано: беззапросные дальномерные измерения до спутников глобальной спутниковой навигационной системы, поступающие в реальном времени со станций сбора измерений.

Необходимо: в реальном времени обеспечить оценку вектора состояния системы:

- эфемериды навигационных спутников
- смещение между шкалой времени навигационных спутников и шкалой системы
- смещение между шкалой времени навигационного приемника, установленного на станции сбора измерений, и шкалой системы
- точностные характеристики навигационного сигнала спутников
- целостность навигационного поля спутниковой системы.

В настоящий момент существует два основных подхода решения данной задачи:

- Апостериорная оценка вектора состояния по полной выборке на некотором интервале. Это на сегодняшний момент, наиболее распространенный способ. В частности, именно он реализован в наземном сегменте ГНСС ГЛОНАСС. Также, для данного подхода характерно разделение задачи – вначале осуществляется оценка эфемерид спутников, затем уточняются смещение часов спутников и станций относительно системного времени.
- Динамическая фильтрация измерений с помощью фильтра Калмана – данный подход достаточно широко описан в виде созданных математических моделей. Основной недостаток данного метода – недостаточная обусловленность задачи и, как следствие, необходимость применения методов повышения обусловленности.

Исходя из специфики решаемой задачи – оценка вектора состояния потребителя в реальном времени – за основу был выбран второй подход.

Перейдем к математической постановке задачи уточнения ЭВИ в реальном времени.

Необходимо определение вектора состояния системы

$$X = |B_{нка01} \dots B_{нка24} B_{см1} \dots B_{смN}| \quad (5.8)$$

на основе беззапросных дальномерных измерений (от i -ого спутника до j -ой станции).

5.2.2 Алгоритм решения задачи

Составление матрицы частных производных измерений по компонентам вектора состояния системы

$$H = \begin{vmatrix} \frac{\partial R_{11}}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial R_{11}}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial R_{ij}}{\partial X_n} \end{vmatrix} \quad (5.9)$$

показало, что такая матрица является вырожденной.

Одним из способов повышения обусловленности задачи является ее декомпозиция. Вектор состояния системы разбивается на два вектора:

$$X_{см} = |B_{см1} \dots B_{смN}| \text{ - вектор ухода часов станций сбора измерений}$$

и

$$X_{нка} = |B_{нка01} \dots B_{нка24}| \text{ - вектор ухода часов спутников.}$$

Далее задается начальное значение $X_{нка}$ - например, из бортовых эфемерид, либо используется другая априорная информация.

Затем на каждый момент времени определяется вектор состояния $X_{ст}$ по дальномерным измерениям при помощи метода наименьших квадратов, после чего уточняется вектор $X_{ика}$.

В дальнейшем, начальное значение $X_{ика}$ берется из предыдущей итерации.

Практика показала, что для определения вектора состояния системы достаточно двух итераций при начальной инициализации, и одной – при последующем решении задачи на каждый момент времени.

На рисунке 5.1 приведена блок-схема алгоритма вычисления уточненной ЭВИ в реальном времени по измерениям с сети станций измерений.

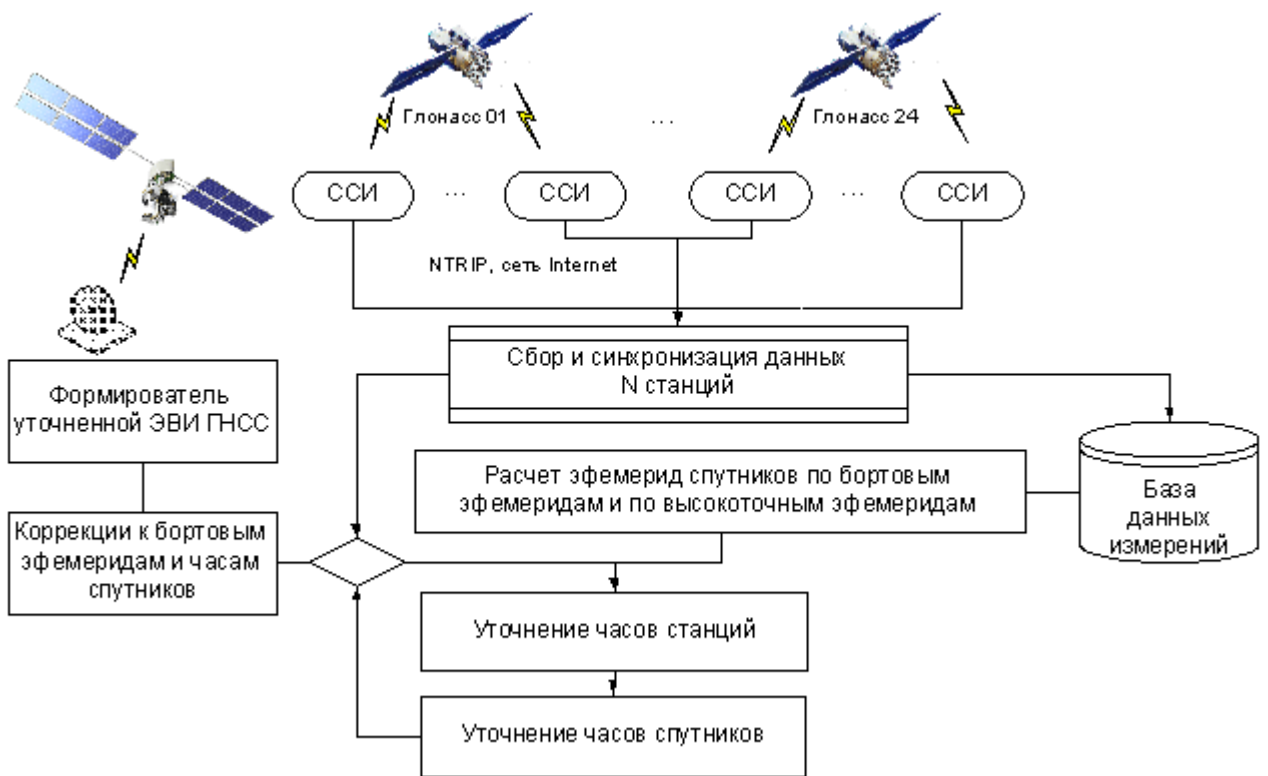


Рис. 5.1 – Блок-схема алгоритма уточнения ЭВИ в реальном времени

При уточнении часов станций и часов спутников ГНСС используется одномоментный метод наименьших квадратов по полной выборке:

$$X_{k+1} = X_k + (H_k^T W_k^{-1} H_k)^{-1} \cdot H_k^T \cdot W_k^{-1} \cdot \Delta \eta_k, \quad (5.10)$$

где W_k^{-1} – весовая матрица

H_k – матрица частных производных (матрица измерений), $H = \left| \frac{\partial \Delta R^k}{\partial X_k} \right|^T$

$\Delta \eta$ – вектор невязок измерений

5.2.3 Реализация алгоритма уточненной ЭВИ ГНСС

На основе приведенного выше алгоритма по декомпозиции задачи, было разработано программно-математическое обеспечение, предназначенное для сбора, синхронизации и обработке измерений от станций в реальном времени по протоколу NTRIP и вычисления уточненной ЭВИ ГНСС.

На рисунке 5.2 показана схема расположения станций сбора измерений, которые используются при вычислении уточненной ЭВИ ГНСС.

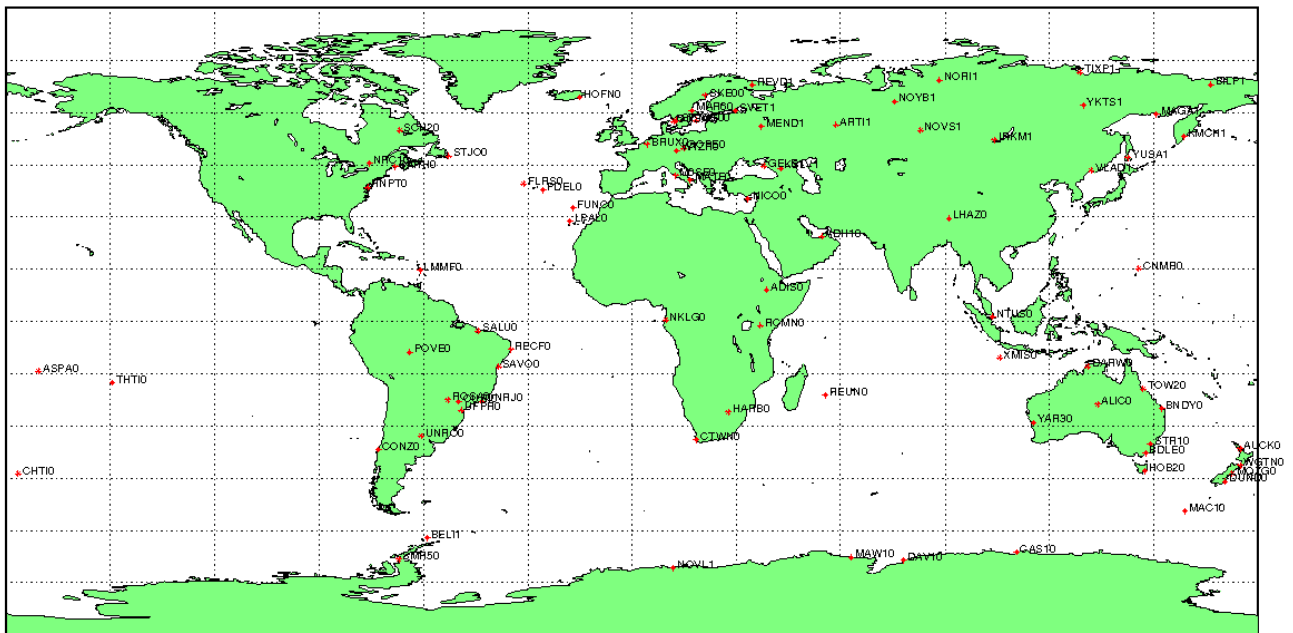


Рис. 5.2 – Схема расположения станций сбора измерений

В таблице 5.10 приведены результаты вычисления уточненной ЭВИ ГЛОНАСС, полученные на интервале с 16.08.2015 по 18.08.2015. Для оценки качества уточнения ЭВИ ГНСС ГЛОНАСС для 18 станций сбора измерений решалась навигационная задача определения местоположения. Результаты навигационного решения сравнивались с известными координатами станций (координаты которых известны с сантиметровой точностью). Для сравнения в

таблице приведены погрешности решения навигационной задачи с использованием бортовой ЭВИ.

Таблица 5.10 – Результаты вычисления уточненной ЭВИ ГЛОНАСС

Станция сбора измерений	Погрешность навигации, м					
	СКО погрешности в плоскости		СКО погрешности по высоте		СКО 3D погрешности	
	Бортовая ЭВИ	Уточненная ЭВИ	Бортовая ЭВИ	Уточненная ЭВИ	Бортовая ЭВИ	Уточненная ЭВИ
ARTI1	3.55	0.70	6.51	0.93	7.42	1.16
IRKM1	3.79	0.71	5.52	0.93	6.69	1.17
BILP1	4.15	0.87	8.31	1.40	9.28	1.65
GELE1	4.31	0.85	6.62	1.05	7.90	1.35
KMCH1	4.74	1.07	7.20	1.35	8.61	1.72
KSLV1	4.01	0.98	6.26	1.17	7.44	1.52
NORI1	3.59	0.69	7.76	1.34	8.55	1.51
NOVL1	3.76	0.93	7.86	0.90	8.72	1.29
NOVS1	3.66	0.76	5.95	1.04	6.99	1.29
NOYB1	3.79	0.77	7.29	1.13	8.22	1.37
MAGA1	3.76	0.75	6.48	1.08	7.50	1.32
MEND1	3.29	0.89	5.80	1.11	6.67	1.42
REVD1	3.05	0.66	7.30	1.22	7.92	1.39
SVET1	3.82	1.00	7.45	1.32	8.37	1.66
VLAD1	3.97	1.03	5.55	1.34	6.82	1.69
YKTS1	4.23	1.02	7.60	1.21	8.70	1.58
YUSA1	3.84	0.94	5.98	1.34	7.11	1.64
PRGS1	3.29	0.87	4.04	1.09	5.21	1.40
Средняя	3.81	0.86	6.63	1.16	7.67	1.45

Приведены погрешности навигации в плоскости, по вертикали и в пространстве (3D).

Из представленных в таблице 5.10 данных видим, что применение вычисленной уточненной ЭВИ повышает точность навигации в 5-6 раз.

5.3 Выводы к главе 5

1. Предложены варианты формирования и схемы передачи дифференциальных данных для уменьшения времени навигации подводного аппарата. Дифференциальные поправки включают в себя как быстро меняющиеся данные (коррекция ЧВП), так и медленно меняющиеся данные (коррекция ЭВИ). Также передается информация о целостности данных, в том числе и дифференциальных. При использовании двухчастотной навигационной спутниковой аппаратуры данные варианты требуют передавать существенно меньший объем данных, по сравнению с системой SBAS.

2. Получено, что применение разработанных форматов передачи дифференциальных данных ГНСС, позволит войти в дифференциальный режим за время, не превышающее 5 секунд.

3. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для решения задачи вычисления уточненной ЭВИ ГНСС. Результаты использования вычисленной уточненной ЭВИ ГЛОНАСС показали, что применение уточненной ЭВИ повышает точность навигации в 5-6 раз по сравнению с бортовой ЭВИ ГЛОНАСС.

4. Применение разработанных форматов передачи данных и алгоритмического и программного обеспечения вычисления уточненной ЭВИ ГНСС позволит подводному аппарату при всплытии определить свое местоположение с точностью менее 1 м (СКО) за время, не превышающее 5 секунд.

Выводы по диссертации

На основе результатов, полученных в диссертации, сделаны следующие **ВЫВОДЫ**:

1. Разработан метод калибровки магнитометра на движущемся подводном аппарате и комплексирования измерений магнитометра с ИНС с определением ухода углов курса, тангажа и крена, измеренных гироскопом.
2. Решена задача определения координат подводного аппарата с использованием ГНСС. Результаты имитационного моделирования показали, что применение коррекции ИНС с использованием ГНСС уменьшает погрешность определения координат подводного аппарата до 10 м, в то время как без коррекции ИНС ошибки определения местоположения возрастают до 500-600 м и выше.
3. Предложен метод повышения обусловленности навигационной задачи подводного аппарата, находящегося на поверхности Мирового океана. Зная координаты точки старта и используя модель поверхности геоида, совпадающей с поверхностью Мирового океана, рассчитывается расстояние от поверхности геоида до центра Земли. Использование этих данных позволяет решать навигационную задачу при недостаточном количестве спутников или на 15-20% повысить точность решения навигационной задачи при достаточном количестве спутников.
4. Разработаны варианты формирования и схемы передачи дифференциальных данных для уменьшения времени навигации подводного аппарата. Дифференциальные поправки включают в себя быстро меняющиеся данные, медленно меняющиеся данные и информация о целостности данных.
5. Разработано алгоритмическое и программное обеспечение для решения задачи вычисления уточненной ЭВИ ГНСС. Результаты использования вычисленной уточненной ЭВИ ГЛОНАСС показали, что применение уточненной ЭВИ повышает точность навигации в 5-6 раз по сравнению с бортовой ЭВИ ГЛОНАСС и позволяет подводному аппарату при всплытии определить свое местоположение с точностью менее 1 м (СКО) за время, не превышающее 5 секунд.

Список сокращений

- АКС – акселерометр
- АЦП – аналогово-цифровой преобразователь
- БЦВМ – бортовая цифровая вычислительная машина
- БЧЭ – блок чувствительных элементов
- ГНСС – глобальные навигационные спутниковы системы
- ДГ – датчик глубины
- ДУС – датчик угловой скорости
- ЗСК – земная система координат
- ИНС – инерциальная навигационная система
- ИСК – инерциальная система координат
- ОЗУ – оперативно-запоминающее устройство
- ПЛИС – программируемая логическая интегральная схема
- ПНС – последовательность номеров спутников
- ПНЧ – преобразователь напряжение-частота
- ППНС – признак последовательности номеров спутников
- СКУ – субблок контроллеров управления
- ССК – связанная система координат
- ЦВ – центр водоизмещения
- ЭВИ – эфемеридно-временная информация

Список литературы

1. *Агеев М.Д., Киселев Л.В., Матвиенко Ю.В. и др.* Автономные подводные роботы: системы и технологии. Под ред. академика М.Д. Агеева. – М.: Наука, 2005, 398 с.
2. *Акимов А.А., Кузьмин Г.В.* Исследование перспективы применения навигационных спутниковых терминалов для проведения высокоточных измерений на пересеченной местности и в городских условиях // Радиотехника, 1996, № 11.
3. *Алёшин Б.С., Веремеенко К.К., Черноморский А.И.* Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии. – М.: Физматлит, 2006, 424 с.
4. *Афонин А.А., Сулаков А.С.* Алгоритм оценивания параметров гравитационного поля, ориентации и навигации гравиинерциального комплекса // Мехатроника, автоматизация, управление. - М.: 2011, № 9, с. 58-65.
5. *Афонин А.А., Сулаков А.С.* О коррекции параметров ориентации, навигации и гравиметрии в замкнутой схеме включения фильтра Калмана навигационного комплекса // Авиакосмическое приборостроение. – М.: 2011, № 8, с. 17-24.
6. *Бобронников В.Т., Кадочникова А.Р.* Алгоритм комплексирования бесплатформенной инерциальной навигационной системы и магнитометрической системы для решения задачи навигации летательных аппаратов // Труды МАИ. – М.: 2012, № 71, 17 стр.
7. *Бранец В.В., Шмыглевский И.П.* Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973.
8. Глобальная спутниковая навигационная система ГЛОНАСС. Интерфейсный контрольный документ. Редакция 5.1. – М.; РНИИ КП, 2008.

9. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем: Ч. I. Математические модели инерциальной навигации. - М.: МАКС Пресс, 2011.
10. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем: Ч. II. Приложения методов оптимального оценивания к задачам навигации. - М.: МАКС Пресс, 2012.
11. Грумондз В. Т., Половинкин В. В. Управляемое движение подводного аппарата. Учебное пособие по курсам «Ракетогидродинамика» и «Автоматические системы двусредных ЛА». - М.: МАИ, 2005.
12. Дворкин В.В., Куршин А.В. Развитие системы ГЛОНАСС и аппаратуры потребителей для высокодинамичных объектов // Ракетно-космическая техника: научно-технический сборник. Сер XI. «Системы управления ракетных комплексов. – Выпуск 1», Екатеринбург: ФГУП «НПО автоматики им. академика Н.А. Семихатова», 2014, стр.42-48.
13. Дегтярь В.Г., Пегов В.И. Гидродинамика баллистических ракет подводных лодок: Монография. - Миасс: ФГУП "ГРЦ "КБ им. акад. В.П. Макеева", 2004, 256с.
14. Евланов Л.Г. Контроль динамических систем. - М.: Наука, 1972.
15. Емельянец Г.И., Литманович Ю.А., Мошкин Н.Н. О повышении информационной автономности БИНС морского применения // Гироскопия и навигация, 2014, №3.
16. Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К. и др. Математические основы теории автоматического регулирования. Под ред. Б.К. Чемоданова. - М.: Высшая школа, 1971.
17. Интернет-журнал "Технологии техносферной безопасности" (<http://ipb.mos.ru/ttb>) Выпуск N 4 (44) , август 2012 г.
18. Интернет-ресурс <http://www.sdcm.ru>.
19. Каралюн В.Ю., Поляков В.Н. Патент РФ №2123665. Бесплатформенная инерциальная навигационная система подводного аппарата.

20. *Куришин А.В.* Повышение точности определения местоположения потребителей ГЛОНАСС путем увеличения частоты закладок временной информации на спутники // Труды МАИ. – М.: 2012, № 57, 7 стр.
21. *Куришин А.В.* Орбитальное построение космического сегмента широкозонного функционального дополнения ГЛОНАСС на высокоэллиптических орбитах // Сборник тезисов докладов 17 международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация». - М.: Изд-во МАИ, 2012, стр. 105-106.
22. *Куришин А.В.* Модифицированный навигационный алгоритм для определения положения ИСЗ по сигналам GPS/ГЛОНАСС // Труды МАИ. – М.: 2013, № 66, 9 стр.
23. *Куришин А.В.* Навигация искусственного спутника Земли в условиях прерывного навигационного поля ГЛОНАСС // Сборник тезисов докладов XVIII международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация». - М.: Изд-во МАИ, 2013, стр. 119.
24. *Лебедев А.А., Нестеренко О.П.* Космические системы наблюдения. - М.: Машиностроение, 1991 г.
25. *Лебедев А.А., Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. - М.: Машиностроение, 1974 г.
26. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т., Нестеренко О.П., Федоров А.В.* Спутниковые системы мониторинга. – М.: Изд-во МАИ, 2000.
27. *Малышев В.В., Куришин В.В., Ревнивых С.Г.* Введение в спутниковую навигацию. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2008.
28. *Пантов Е.Н., Махинин Н.Н., Шереметов Б.Б.* Основы теории движения подводных аппаратов - Ленинград: Судостроение, 1973, 216 с.
29. *Петербург А.И., Тычинский Ю.Д.* Тенденции и принципы проектирования сложных систем. Цифровые системы. Учебное пособие. – М.:Международный издательский центр "Этносоциум", 2013.

30. Радиосигналы и состав цифровой информации функционального дополнения системы ГЛОНАСС системы дифференциальной коррекции и мониторинга. Интерфейсный контрольный документ. – Редакция 1, М.; ОАО «Российские космические системы», 2012.
31. Ривкин С.С., Ивановский Р.И., Костров А.В. Статистическая оптимизация навигационных систем. - Л.: Судостроение, 1976.
32. Скобов Д.П. Основы динамики торпед. - М.: Изд-во судостроительной промышленности, 1963.
33. Ступак Г.Г., Бетанов В.В., Куришин В.В., Куришин А.В. К вопросу построения региональной орбитальной группировки навигационной спутниковой системы ГЛОНАСС // Известия РАН, 2016, №3, 11 стр.
34. Семевский Р.Б., Аверкиев В.В., Яроцкий В.А. Специальная магнитометрия.– СПб.: Наука, 2002, 228 стр.
35. Тарасов Е. В., Грумондз В. Т., Яковлев Г. А. Ракетогидродинамика. М.: МАИ, 1985.
36. Тарасов Е. В., Уваров Г. В. «Высокоскоростная подводная ракета. Проблемы и алгоритмы проектных исследований системы «каверна-подводная ракета» - М.: Вузовская книга, 2013, 252 с.
37. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. - М.: Изд-во «Наука», 1970.
38. Тювин А.В., Афонин А.А., Жарков М.В., Карачевцев М.В., Сулаков А.С. Оценка возможностей бесплатформенного гравиинерциального навигационного комплекса в задачах векторной морской гравиметрии с использованием спутниковой навигации // Авиакосмическое приборостроение. – М.: 2007, № 6.
39. Федосов Е.А., Бобронников В.Т., Красильщиков М.Н. и др. Динамическое проектирование систем управления автоматических маневренных летательных аппаратов. Под ред. Е.А. Федосова. - М.: Машиностроение, 1997.

40. Харисов В.Н., Перов А.И., Болдин В.А. и др. Глобальная спутниковая радионавигационная система ГЛОНАСС. М.: ИПРЖР, 1999.
41. Черноморский А.И., Афонин А.А. Исследование возможности использования глубиномерной системы для коррекции параметров ориентации в бесплатформенном гравиинерциальном навигационном комплексе // Авиакосмическое приборостроение. – М.: 2006, № 1.
42. Чернявский Г.М., Бартенев В.А. Орбиты спутников связи. – М.: Связь, 1978.
43. Шебшаевич В.С. Введение в теорию космической навигации. – М.: Сов. Радио, 1971.
44. Шебшаевич В.С., Дмитриев П.П., Иванцевич Н.В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы. – М.: Радио и связь, 1982.
45. Enge P. WAAS Messaging System: Data Rate, Capacity, and Forward Error Correction // Navigation, Journal of The Institute of Navigation, Vol. 44, No. 1, 1997.
46. Global Positioning System: Theory and Applications, Volume I, II. Edited by Parkinson B. W., Spilker J. J., American Institute of Aeronautics and Astronautics, Washington, 1996.
47. Groves P.D. Principles of GNSS, Inertial and Multi-Sensor Integrated Navigation Systems, 2008
48. Kaplan E. D. Understanding GPS: Principles and Applications, Artech House Publishers, Boston, 1996.
49. Leick A. GPS satellite surveying. Second edition. John Wiley & Sons, INC. USA. 1995.
50. Leland E. Cunningham On the computation of the spherical harmonic term needed during the numerical integration of the orbital motion of an artificial satellite. Celestial Mechanics, 1970.
51. Malyshev V.V., Krasilshikov M.N., Bobronnikov V.T., Dishel V.D., Leite Filho W.C., Ribeiro T.S. Aerospace Vehicle Control. Modern Theory and Applications, IAE, Brazil, 1996.

52. Minimum Operational Performance Standards for Global Positioning System/Wide Area Augmentation System Airborne Equipment. RTCA/DO-229D, Washington, 2006.
53. *Schumacher A.* Integration of a GPS aided Strapdown Inertial Navigation System for Land Vehicles, Master of Science Thesis, Stockholm, March 2006
54. Wide Area Augmentation System (WAAS), Federal Aviation Administration Specification, FAA-E-2892B, U.S. Department of transportation, 1999.
55. *Misra P., Pratt M., Muchnik R., Burke B., Hall T.* GLONASS Performance: Measurement Data Quality and System Upkeep // Proceedings of the ION GPS-96, 1996.
56. *Parkinson B., Axelrad P.* Autonomous GPS Integrity Monitoring Using the Pseudorange Residual, ION, Vol.35, No. 2, Summer, 1988.