На правах рукописи

Закалюкин Иван Владимирович

Особенности уравнений динамики некоторых неголономных систем и неявные дифференциальные уравнения

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена в Московском авиационном институте (государственном техническом университете).

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент, *Бардин Борис Сабирович*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор, *Косенко Иван Иванович*
	доктор физико-математических наук, профессор, *Борисов Алексей Владимирович*
Ведущая организация:	кафедра информационной безопасности и теории управления, Ульяновского государственного университета

Защита состоится 24 декабря 2010 в 10 часов на заседании диссертационного совета *Д212.125.14* при Московском авиационном институте (государственном техническом университете), расположенном по адресу: Москва, 125993, Волоколамское ш., д.4, МАИ

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *МАИ.*

Автореферат разослан «____» ____________ 2010 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.м.н., доцент *Гидаспов В.Ю.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Динамика неголономных систем представляет собой один из наиболее сложных и красивых разделов механики. В практике в основном применяются линейные по скоростям неголономные связи, моделирующие качение твердых тел, движение тела с острым краем (конька). В последнее время с развитием сложных робототехнических и транспортных систем возрос интерес к исследованию систем с нелинейными связями, например, обобщениям классического примера Аппеля, а также с линейными связями более общего вида. Начиная с работ классиков 19 века и отечественных основоположников неголономной механики С.А.Чаплыгина, П.В.Воронца и др. [12], всегда предполагалось, что система неголономных связей имеет полный ранг. В этом случае уравнения динамики систем, идеальных по Лагранжу, могут быть записаны в разрешенном относительно старших производных виде. Только отдельные работы в последние десятилетия рассматривали другие случаи, когда уравнения динамики приводили к неявным уравнениям. Среди них хорошо известны только работы Дирака об особых точках уравнений Эйлера-Лагранжа, для которых матрица вторых производных Лагранжиана по обобщенным скоростям вырождена [3]. Систематического исследования динамики неголономных систем вблизи множества вырождения связей в литературе нет. Отметим только ряд интересных работ, посвященных отдельным случаям возникновения неявных уравнений в задачах теоретической механики и близких разделов теории

[1] Неголономные динамические системы, Интегрируемость, Хаос, Странные аттракторы, А.В. Борисов, И.С.Мамаев ред.,Сборник статей, Москва-Ижевск, 2002, 324с.

[2] Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И., Математические аспекты классической и небесной механики, Динамические системы -3, Итоги науки и техники, М. ВИНИТИ,1985, 320 с.

[3] *Dirac P.A.M.* Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva University, New York, 1964. Русс. перевод: Дирак П.А.М. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.

динамических систем [4] [5] [6] [7].

С другой стороны, начатая с работ А. Пуанкаре и развитая в работах В.И.Арнольда [8] [9] [10], геометрическая теория неявных дифференциальных уравнений превратилась в развитый аппарат исследования сложных систем. Различным аспектам применения теории особенностей в неявных дифференциальных уравнениях посвящены, в частности, следующие современные работы [11] [12] [13].

Настоящая работа относится к этому недостаточно изученному и интересному разделу механики. Основные методы - это методы геометрической теории неявных дифференциальных уравнений и математической теории особенностей. Актуальность темы и результатов, среди которых исследование простого и красивого примера (движения балки с двумя коньками), еще более подчеркивается наличием в современной

[4] *De León M., Marín-Solano J., Marrero J.C., Muñoz-Lecanda M.C., Román-Roy N.* Singular Lagrangian systems on jet bundles// Fortschrit. Phys., 2002, vol. 50 (2), p. 105 — 169. См. также: ArXiv: math--ph/0105012, 2002.

[5] *Cariñena J.F.* Theory of singular Lagrangians// Fortschrit. Phys., 1990, vol. 38 (9), p. 641 — 679.

[6] *Gràcia X., Muñoz-Lecanda M.C., Román-Roy N.* On some aspects of the geometry of differential equations in physics// Int. J. Geometric Methods in Mod. Phys., 2004, v. 1, p. 265 — 284. См. также: ArXiv: math-ph/0402030, v. 1, 2004.

[7] *Basto-Gonçalves J.* Singularities of Euler equations and implicit Hamilton equations// in Real and Complex Singularities, Pitman Research Notes in Math. 333, Longman, 1995, p. 203 — 214.

[8] *Arnold V.I.* Wavefronts evolution and the equivariant Morse lemma// Comm. Pure and Appl. Math., 1976, vol. 29, 6, p. 557 — 582.

[9] *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.М.: Наука, 1978. 304 с.

[10] *Арнольд В.И.* Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. ун-та, 2000. – 400 с.

[11] M.Lemasurier Singularities of second-order implicit differential equations: a geometrical approach, Journal of Dynamical and Control Systems, vol.7 (2001), n.2, 277-298.

[12] Davydov A.A. Qualitative Theory of Control Systems. Mathematical Monographs, vol. 141. AMS, Providence, Rhode Islans, 1994, 147 p.

[13] *Davydov A.A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z.* Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane// ArXiv: math.DS/0302134, v. 1, 2003.

технике сложных гибридных механических управляемых систем [14], в которых реализуются неголономные связи весьма общего вида. Аналогичные системы уравнений возникают также в различных разделах современной физики.

Цель диссертационной работы

Исследовать качественное поведение механической системы с неголономными связями в окрестности множества вырождений связей. Установить связь этой теории с теорией систем дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старших производных. Исследовать модельные примеры вырождения связей.

Научная новизна

В диссертации получены новые теоретические результаты, представляющие интерес для широкого круга специалистов по механике и теории дифференциальных уравнений. Эти результаты не встречались ранее в мировой литературе. Такими результатами являются: Доказательство теоремы о нормальной форме уравнений динамики в окрестности вырождения связей коранга 1. Качественное исследование динамики механической системы, описываемой неявным дифференциальным уравнением на особой поверхности, так называемом, "зонтике Уитни". Качественное исследование динамики балки с двумя коньками вблизи множества вырождения системы уравнений связей. Классифицированы нормальные формы локальных особенностей первых интегралов вырожденных систем с нелинейными связями, сводящихся к 2 степеням свободы.

Практическая значимость

Результаты анализа качественного поведения неголономных

[14] J.P.Gauthier, F.Monroy-Perez, C.Romero-Melindez, On complexity and motion planning for corank one SR metrics, COCV, v.10, 2004, 634-655.

механических систем вблизи области вырождения уравнений связей являются новыми теоретическими положениями, имеющими приложения в фундаментальных и практических исследованиях динамики сложных систем, в частности, в робототехнике, в многозвенных транспортных системах. Методы созданные в диссертации могут быть использованы в исследовании систем дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными, в теории управляемого движения. Результаты о качественном поведении неявного уравнения на специальной особой поверхности имеют широкий спектр приложений в ряде областей естествознания, включая, в частности, неголономные механические системы, состоящие из нескольких сочлененных твердых тел, снабженных несколькими колесными парами, а также и задачи релятивистской физики, сводящиеся к системам уравнений с вырожденными Лагранжианами. Полученные обще-теоретические результаты могут быть использованы в учебном процессе при подготовке спецкурсов по теории неголономных систем и неявных дифференциальных уравнений.

На защиту выносятся следующие основные результаты и положения:

1. Доказано, что нормальная форма уравнений Лагранжа с неопределенными множителями в окрестности множества вырождения неголономных линейных связей задает систему с быстрыми и медленными переменными. Сделаны выводы о неуправляемости такой системы.

2. Построен фазовый портрет и исследована структурная устойчивость неявного дифференциального уравнения на типичной особой поверхности в трехмерном пространстве.

3. Получена классификация локальных особенностей первых интегралов вырожденных механических систем с нелинейными связями, сводящихся к системам с двумя степенями свободы.

4. Исследована динамика неголономной системы, состоящей из балки с двумя коньками и совершающей плоское движение, вблизи подмножества фазового пространства, где ранг системы неголономных связей падает (коньки одновременно становятся перпендикулярными балке). Показано возникновение области ударных движений.

Апробация работы

Результаты диссертационной работы доложены и обсуждены на двух международных конференциях: Международная конференция по Механике и Управлению, Суздаль, Июль 2009; Международная конференция "Дифференциальные уравнения и особенности", Суздаль, Июль 2010; а также на семинаре "Дифференциальные уравнения и механика" факультета Прикладной математики и физики МАИ (Апрель 2010).

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 6 работ [1–6], из них три статьи в журналах, рекомендованных ВАК. Одна статья принята к печати. Опубликованные в данных журналах статьи полностью отражают содержание всех глав диссертации.

Личный вклад автора

Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно и опубликованы в статьях без соавторов.

Структура и объем диссертации

Работа состоит из двух глав. Общий объем диссертации 96 стр. Диссертация содержит 20 рис., список цитированной литературы состоит из 70 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе рассмотрено качественное поведение неголономных механических систем, заданных уравнениями Лагранжа с неопределенными множителями, в том числе, систем с управлением, при условии, что уравнения связей (которые мы считаем линейными однородными по скоростям) задаются в некоторых точках вырожденной матрицей.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i + \sum_j \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}, \qquad f_j(q, \dot{q}, t) = 0, \tag{1}$$
$$i = 1, \dots, n, \qquad j = 1, \dots, k,$$

где T - кинетическая энергия системы, являющаяся функцией обобщенных координат $q = (q_1, \dots, q_n)$, обобщенных скоростей $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ и времени t, $Q_i(q, \dot{q}, t)$ - обобщенные силы, λ_j неопределенные множители (имеющие смысл коэффициентов, определяющих обобщенные силы реакции неголономных связей). Система уравнений k неголономных связей имеет вид $A(q)\dot{q} = 0$, где компоненты $a_{i,j}(q)$ матрицы $A(q)$ размера $k \times n$ гладко зависят от обобщенных координат.

Предполагается, что вырождения удовлетворяют условиям общности положения и имеют наиболее простой вид. В частности, ранг матрицы A равен $k-1$ на подмногообразии Σ фазового пространства. Показано, что в этом случае вблизи Σ система может быть описана, как система с быстро-медленными переменными. В общем положении для почти каждой (за исключением подмножества относительной меры 0) точки Σ не существует непрерывно дифференцируемой фазовой траектории системы, проходящей через эту точку. Этот факт представляет интерес для систем с управлением или систем программного движения: для того, чтобы получить, хотя бы приближенно, непрерывно дифференцируемую фазовую траекторию, трансверсально пересекающую множество Σ указанного вида, необходимо приложить к системе очень большие внешние силы (или соответствующие управления).

Доказана следующая теорема:

Теорема. *В некоторой окрестности W точки q_0, в которой ранг матрицы связей равен $k-1$ существуют такие ограниченные вектор-функции $F(q,\dot{q})$, что уравнения Лагранжа с неопределенными множителям в точках C, проекция которых на конфигурационное многообразие принадлежит $W \setminus \pi(\Sigma)$, разрешенные относительно обобщенных ускорений, имеют вид:*

$$\ddot{q} = F(q,\dot{q}) - \frac{\xi_A(q,\dot{q})}{\Delta_A(q)} N G_A. \tag{2}$$

Здесь ξ_A – специальная квадратичная форма обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от обобщенных координат, Δ_A – квадрат расстояния до множества Σ_1 и NG_A - некоторое гладкое векторное поле.

Итак, в первом приближении, в окрестности точек Σ, где $\xi(q,\dot{q}) \neq 0$, обобщенные скорости быстро меняются и достигают таких значений, что $\xi(q,\dot{q}) = 0$. При этом обобщенные координаты меняются сравнительно медленно. Заметим, что при каждом фиксированном значении q_* обобщенных координат вектор главной части обобщенных ускорений имеет фиксированное направление, то есть "быстрое движение" является одномерным.

Рассмотрен пример динамики двух коньков на плоскости, соединенных балкой (рис 1.), в окрестности вырождения системы уравнений связей. Заметим, что ряд других практических задач (не вошедших в настоящую диссертацию), например, движение тележки с поворачивающимися колесиками, моделируемое невырожденной системой, которая становится вырожденной при обращении в нуль малого параметра, и задачи оптимального управления такой тележкой также имеют подобные свойства вблизи подмногообразия вырождения.

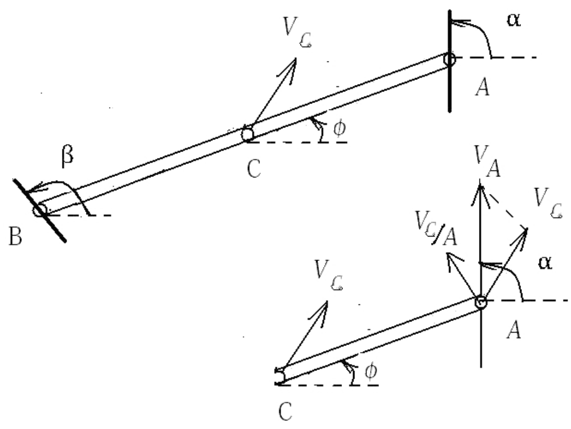

Рис. 1. Балка с двумя коньками

Показано, что когда коньки становятся одновременно перпендикулярными балке, то происходит вырождение матрицы неголономных связей.

Доказано, что при отсутствии внешних сил систему можно проинтегрировать. Вблизи множества вырождения динамика описывается неявным дифференциальным уравнением первого порядка на особой поверхности Пуанкаре (рис 2) в трехмерном пространстве с координатами $\xi = \varphi - \frac{\pi}{2},\ p = \dot{\varphi},\ t$.

В процессе исследования этого примера был получен новый теоретический результат. А именно, в теории неявных дифференциальных уравнений в качестве поверхности Пуанкаре появляется особая поверхность

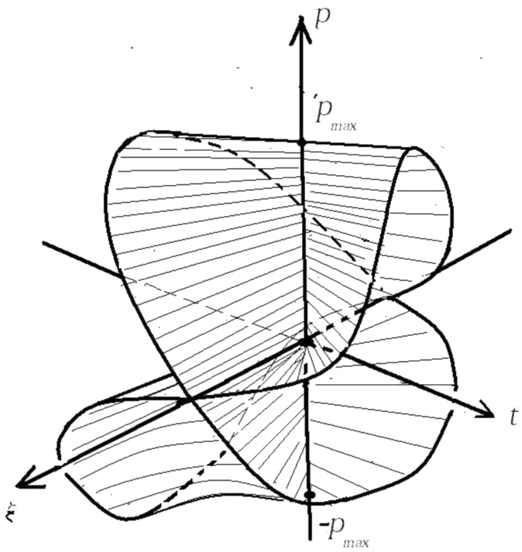

Рис. 2. Особая поверхность уровня энергии S

изоморфная зонтику Уитни. Исследованию этих случаев, один из которых происходит из теории быстро-медленных систем, другой из неявных систем из двух дифференциальных уравнений первого порядка в пятимерном пространстве после редукции по части переменных, посвящены недавние работы известных ученых из России, Японии, Великобритании [15]. Однако, был изучен только случай наиболее общего расположения зонтика по отношению к проекции на конфигурационное пространство, а важный случай, возникающий, как раз в примере балки с двумя коньками, в литературе до сих пор отсутствовал. Этот случай выделяется тем, что поверхность Пуанкаре, представляющая собой зонтик Уитни, имеет вертикальную (то есть параллельную оси производной) линию самопересечения (которую, часто называют "ручкой" зонтика Уитни). Другими словами, особые точки проекции на конфигурационное пространство неизолированы, а образуют целые линии. Такой случай характерен для неявных уравнений в лагранжевой механике, в частности,

[15] *Davydov A.A., Ishikawa G., Izumiya S., Sun W.-Z.* Generic singularities of implicit systems of first order differential equations on the plane// ArXiv: math.DS/0302134, v. 1, 2003.

при изучении особенностей уравнений Лагранжа вблизи вырождения неголономных связей. В диссертации получены нормальные формы такой особенности относительно группы контактных преобразований, нормальные формы поднятого векторного поля и описание поведения его фазовых траекторий.

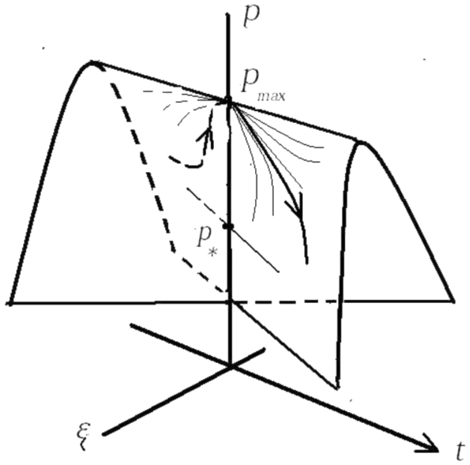

Рис. 3. Типичная траектория на особой поверхности

Нами изучено качественное поведение фазовых траекторий системы вблизи множества вырождения связей. Показано наличие участка движения похожего на удар, когда угловая скорость балки меняется почти мгновенно (рис.3), а сам угол меняется медленно. Результаты первой главы опубликованы в работах [1, 2, 5].

Во второй главе рассматриваются типичные особенности первых интегралов систем неявных дифференциальных уравнений общего нелинейного вида. Такие особенности возникают и в уравнениях Лагранжа с неопределенными множителями для лагранжианов общего вида и для нелинейных неголономных связей. Мы в основном рассматриваем системы с несколькими степенями свободы, уравнения движения которых, сводятся к неавтономным системам двух неявных дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух неизвестных функций.

Примером подобной системы может служить система уравнений, описывающая движение балки с двумя коньками (из главы 1) на наклонной плоскости. Если, с учетом постоянства угловых скоростей коньков, понижать размерность системы, то получается система на трехмерной особой поверхности в пятимерном пространстве. Надо рассмотреть совместную поверхность уровня механической энергии (суммы кинетической энергии и потенциальной энергии силы тяжести, пропорциональной некоторой линейной координате x_C центра масс) и неголономного уравнения связи, задающего зависимость проекции $\dot{x}_C$ скорости центра масс через угловую координату φ, и угловую скорость балки $\dot{\varphi}$, в пятимерном пространстве с координатами $\varphi, \dot{\varphi}, t, x_C, \dot{x}_C$.

На указанной трехмерной поверхности возникает векторное поле с особенностями там, где поверхность не имеет регулярной проекции на конфигурационное пространство $(\varphi, t, \dot{\varphi})$. Таким образом, мы приходим к задаче изучения особенностей систем неявных дифференциальных уравнений.

В наиболее свободном с точки зрения теории особенностей общем нелинейном случае в этой главе доказана теорема о классификации типичных особенностей и получено геометрическое описание поверхностей уровня всех типичных дополнительных первых интегралов. Рассмотрен случай, когда исходная неявная нелинейная система приводится к системе двух неавтономных уравнений первого порядка относительно двух обобщенных координат.

Теорема. *Рассмотрим неголономную механическую систему с нелинейными связями , уравнения движения которой, с помощью первых интегралов сводится к системе двух неявных дифференциальных уравнений, заданной на трехмерной фазовой поверхности в* R^5. *Если* *проекция этой поверхности на конфигурационное пространство имеет критические точки коранга не больше 1, то в случае общего положения всякий ее росток для пары S, I, где I - дополнительный регулярный первый интеграл, эквивалентен одной из следующих нормальных форм:*

1. Проекция ρ имеет A_1 (особенность складки), и пара S, I является сильно эквивалентной паре ростков в нуле проекции ρ, заданной формулой $F_2 = t - y^2 = 0$, причем, функция I эквивалентна одной из следующих нормальных форм $I_{1,0} = x_1 + y^3$, или $I^*_{i,0} = x_1 + y^3 x_2$, или $I_{1,1} = x_1 + y^3(t \pm x_2^2 + x_1)$. (см.,например, рис. 4)

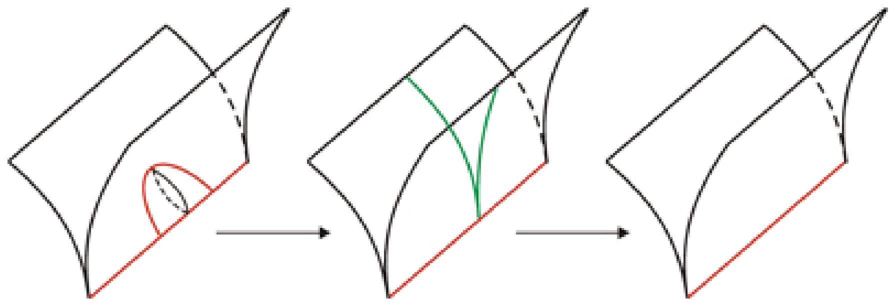

Рис. 4. Полукубические, со сложенными зонтиками поверхности уровня интеграла $I_{1,1+}$ на складке (A_1)

2. Проекция ρ имеет особенность сборки A_2, а пара S, I сильно эквивалентна паре ростков в нуле проекции ρ заданной формулой $F_3 = y^3 + x_1 y - t = 0$ и интеграла I, который равен $I_{2,0} = x_2 + ty - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}x_1 y^2$, либо паре, которая b- эквивалентна паре с той же проекцией и интегралом

$$I_{2,1} = \frac{1}{5}y^4 + \frac{1}{4}x_2 y^3 + \frac{1}{3}x_1 y^2 - \frac{1}{2}ty^2 \pm x_2 \pm x_1,$$

либо

$$I^*_{2,0} = \pm x_1 \pm x_2 + ty - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}x_1 y^2.$$

3. Проекция ρ имеет особенность ласточкина хвоста A_3, а пара S, I

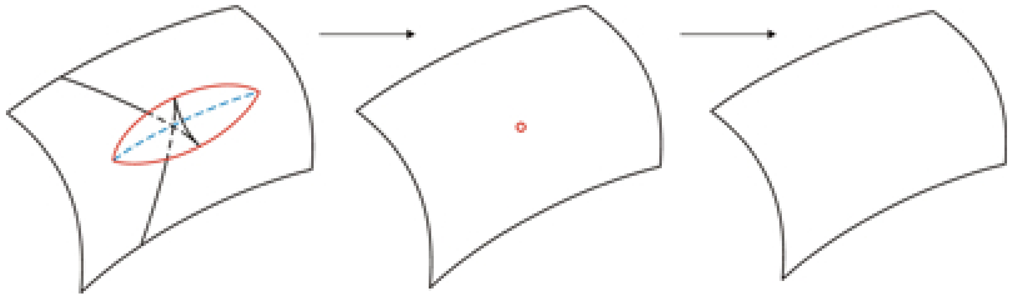

Рис. 5. Поверхности уровня интеграла $I_{1,1+}$ на сборке (A_2)

является b-эквивалентной паре ростков в нуле этой проекции ρ, заданной формулой $F_4 = -t + y^4 + x_2y^2 + x_1y = 0$ и интегралом I имеющим вид

$$I_{3,0} = \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{3}x_2y^3 + \frac{1}{2}x_1y^2 - ty + x_2.$$

Здесь t, x_1, x_2 – координаты на конфигурационном пространстве, y – одна из обобщенных скоростей.

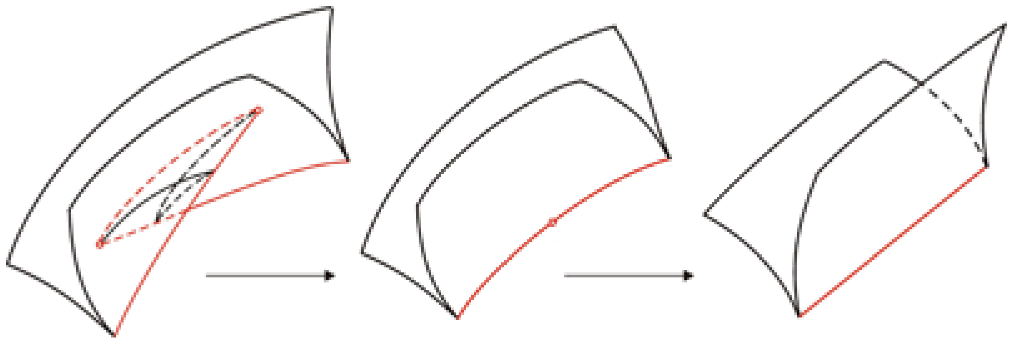

Рис. 6. Поверхности уровня интеграла $I_{3,0}$ "бабочка" на ласточкином хвосте (A_3)

Исследованы условия общности положения. В заключительном разделе показано, что простейшие типичные особенности подобных систем в $\mathbf{R}^5$, но с *линейными* неголономными связями, имеют совсем другие особенности.

Результаты второй главы опубликованы в работах [3, 4, 6].

В Заключении кратко перечислены основные результаты и их возможные приложения. В том числе указано, что, как известно, наблюдая за единственной фазовой траекторией вполне интегрируемой Гамильтоновой системы, совершающей всюду плотную обмотку тора Лиувилля, можно увидеть особенности проекции всего этого тора на конфигурационное пространство. Такие особенности видны вблизи границы области, заметаемой траекторией. По аналогии с этим, проекции отдельных траекторий, или пучков траекторий, с заданным уровнем энергии и интеграла, могут заметать в конфигурационном пространстве многозначные поверхности с особенностями, полученными во второй главе. Они могут быть видны на различных, полученных численно, трехмерных изображениях фазовых портретов сложных неголономных систем.

Список публикаций

[1] Zakalyukin I.V., Degenerations of non-holonomic constraints and Ferrer's equations, Journal of Dynamical and Control Systems, Springer, Vol. 16, 3 (July 2010), 439 - 452.

[2] И.В.Закалюкин, Особенности управляемых систем при вырождении неголономных связей, Успехи математических наук, т. 65 (2010), вып 4, 193 - 194.

[3] Закалюкин И.В., Особенности вырождения неголономных связей и управляемость, Электронный журнал "Труды МАИ 39, Август 2010, 18с.

[4] Закалюкин И.В, Управляемость механических систем вблизи подмножества вырождения неголономных связей, Теория и Системы Управления, Известия РАН, 2010, 18стр. (в печати)

[5] Zakalyukin I.V., Degenerations of Ferrer's equations, Тезисы международной конференции , "Дифференциальные уравнения и механика"Суздаль, Июль 2009, Из-во Владимирского гос. Ун-та, 223-224.

[6] Zakalyukin I.V., Non-controllability in degenerate constraint systems, Тезисы международной конференции "Дифференциальные уравнения и особенности Суздаль, Июль 2010, Из-во Матем. Ин-та РАН им. В.А,Стеклова, стр.206-207.