На правах рукописи

Башков Александр Борисович

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОЦЕНИВАНИЯ ДЛЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПИСЫВАЕМЫХ ДИСКРЕТНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВОЛЬТЕРРА

Специальность 05.13.01

Системный анализ, управление и обработка информации

(авиационная и ракетно-космическая техника)

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва, 2009 г.

Работа выполнена на кафедре Теории вероятностей Московского авиационного института (государственного технического университета).

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор А. И. Матасов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А. В. Назин

кандидат физико-математических наук Д. И. Бугров

Ведущая организация: Институт проблем информатики РАН

Защита состоится 11 июня 2009 г. в 10 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета Д212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское ш., 4, Учёный совет МАИ.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МАИ.

Отзыв на автореферат, заверенный гербовой печатью организации, просьба направлять по указанному адресу в двух экземплярах.

Автореферат разослан 7 мая 2009 г.

Учёный секретарь Диссертационного совета Д212.125.04
кандидат физико-математических наук

М. В. Ротанина

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования. В диссертационной работе изучаются задачи оценивания для динамических систем, описываемых разностными уравнениями Вольтерра.

Актуальность темы. Во многих динамических системах будущее определяется не только текущим состоянием, но и значениями процесса в предшествующие моменты времени. Основополагающий вклад в развитие теории уравнений с последействием внесли Р. Беллман, В. Вольтерра, Г. А. Каменский, В. Б. Колмановский, Н. Н. Красовский, К. Кук, С. М. В. Лунел, Р. К. Миллер, А. Д. Мышкис, С. Б. Норкин, А. Л. Скубачевский, Дж. К. Хейл, Я. З. Цыпкин, Л. Е. Шайхет, Л. Э. Эльсгольц. Уравнениями такого вида моделируют различные процессы в технике, физике, медицине, экологии и т. д. В частности, уравнения с последействием встречаются в авиационно-космической отрасли. В качестве примеров можно назвать расчёты динамики ракет-носителей, изучение процесса сгорания в рабочей камере жидкостного ракетного двигателя, исследования в области аэроупругости. К указанному типу уравнений приводит задача автоматического управления посадкой самолета при запаздывании в реакции тяги на отклонение рычага управления двигателем. Системы с запаздыванием появляются в задачах управления с использованием пропорционально интегральных или пропорционально интегро-дифференциальных регуляторов. Кроме того, интегральные уравнения возникают при описании аэродинамики летательного аппарата. Таким образом, эффект последействия важен.

Дискретным аналогом непрерывных уравнений с последействием являются разностные уравнения Вольтерра. Их изучали В. Б. Колмановский, М. Крисчи, Н. Форд, Л. Е. Шайхет, С. Элайди и др.

Проблемы оценивания составляют важный для приложений класс задач. Например, они возникают в навигации. Задачи оптимальной среднеквадратической фильтрации для систем с последействием рассматривались М. В. Басиным, А. Ю. Веретенниковым, В. Б. Колмановским, Л. Е. Шайхетом. Однако на практике статистическая информация о возмущениях нередко отсутствует, или же помехи вообще нельзя считать случайными. Поэтому в последние десятилетия стали развиваться методы гарантирующего или минимаксного оценивания. При этом подходе исходят из предположений, что возмущения являются детерминированными векторами, принадлежащими некоторому известному множеству. Часто рассматривают модели другого вида, в которых считают, что возмущения случайны, но их статистические характеристики неизвестны. Такая гипотеза тоже приводит к задачам минимаксной фильтрации. Основополагающий вклад в развитие теории гарантирующего оценивания внесли Х. Витзенхаузен, И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, А. Б. Куржанский, М. Л. Лидов, Б. Т. Поляк, П. Хьюбер, Ф. Л. Черноусько, Ф. Швеппе, П. Е. Эльясберг. В дальнейшем минимаксный подход развивался в работах Б. И. Ананьева, В. А. Архангельского, Б. Ц. Бахшияна, Л. Ю. Белоусова, А. В. Борисова, М. И. Войсковского, М. И. Гусева, А. И. Матасова, А. В. Назина, Р. Р. Назирова, А. Р. Панкова, К. В. Семенихина, В. Н. Соловьёва и др.

Минимаксные проблемы сложны в связи с негладкостью целевого функционала. Поэтому представляется разумным отказаться от поиска оптимального оценивателя, а воспользоваться легко реализуемым упрощённым алгоритмом. При этом необходимо оценить качество приближённого фильтра, не зная оптимального оценивателя. Такой подход к задачам фильтрации и рассматривается в данной работе.

Проблемы оценивания для уравнений Вольтерра изучены слабо, а в гарантирующей постановке практически не изучены. Поэтому тема диссертации актуальна.

Цель работы. Цель диссертации состоит в разработке конструктивных методов решения задач оценивания для линейных динамических систем, описываемых дискретными уравнениями Вольтерра. При этом рассматриваются различные гипотезы о виде возмущений. В условиях, когда оптимальное решение задачи неизвестно, основной целью является построение оценок уровней неоптимальности предлагаемых упрощённых алгоритмов фильтрации.

Методы исследования. В работе используются методы теории вероятностей, выпуклого анализа, теории двойственности выпуклых вариационных задач и теории гарантирующего оценивания.

Научная новизна. В работе получены новые результаты, среди которых можно выделить следующие.

1) Задача среднеквадратического оценивания разностных уравнений Вольтерра изучена с использованием вариационного подхода. Получено фундаментальное соотношение между прямой и сопряжённой переменными соответствующей краевой задачи.

2) Предложен упрощённый оцениватель в задаче среднеквадратической фильтрации и построена оценка уровня его неоптимальности.

3) Рассмотрены проблемы гарантирующего оценивания для дискретных уравнений Вольтерра, возникающие при различных гипотезах о виде помех. Для предложенных упрощённых оценивателей построены границы уровней их неоптимальности.

Теоретическая и практическая значимость. Полученные в диссертации результаты позволяют применять легко реализуемые алгоритмы оценивания к решению сложных задач фильтрации для уравнений Вольтерра. При этом могут быть указаны уровни неоптимальности упрощённых фильтров, которые вычисляются без знания оптимального оценивателя. Таким образом, предложен полезный инструмент решения задач фильтрации для дискретных уравнений Вольтерра.

Апробация работы. Результаты диссертации обсуждались на 9-й Международной конференции „Системный анализ и управление" (Крым, Евпатория, 2004 г.), на 16-м Всемирном конгрессе ИФАК (Чехия, Прага, 2005 г.), а также на научных семинарах под руководством проф. В. Н. Афанасьева (МИЭМ), проф. А. И. Кибзуна (МАИ), проф. М. Миланезе (Политехнический университет Турина, Италия).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [1]–[4] журналов, входящих в Перечень ВАК, а также в работах [5]–[7].

Структура и объём диссертации. Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы (157 источников). В работе приведено 15 рисунков, 7 таблиц. Общий объем диссертации составляет 111 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся обзор основных направлений исследования. Сформулированы цели диссертационной работы, приведено краткое описание её глав.

Первая глава посвящена задаче оптимальной среднеквадратической фильтрации для дискретных уравнений Вольтерра. Ранее эта проблема была решена Л. Е. Шайхетом и Н. В. Кучкиной[1] методами, основанными на использовании уравнения Винера-Хопфа. Однако для наших построений в следующих главах необходимо получить это решение иначе — свести проблему оптимальной фильтрации к некоторой вариационной задаче.

Рассматривается динамическая система, состояние которой описывается линейным дискретным уравнением Вольтерра:

$$x(t+1) = \sum_{k=0}^{t} A(t,k)x(k) + B(t)u(t), \qquad t = 0,\dots,N-1, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0.$$

[1]Kuchkina N. V., Shaikhet L. E. Optimal estimation of stochastic difference equations. *Proceedings of the CESA'98. Symposium on Signal Processing and Cybernetics,* Tunisia, April 1-4, 1998, vol. 4, pp. 165–169.

Здесь $x(t) \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы, $A(t,k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$ — известные матрицы, а $u(t) \in \mathbb{R}^r$ — случайный вектор возмущений.

Пусть проводятся линейные измерения

$$z(t) = H'(t)x(t) + \rho(t), \qquad t = 0, \ldots, N, \tag{2}$$

где $H(t) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ — заданные матрицы, $z(t) \in \mathbb{R}^m$, а $\rho(t) \in \mathbb{R}^m$ — помехи в измерениях. Штрих означает знак транспонирования.

Предполагается, что возмущения $u(t)$ и $\rho(t)$ описываются последовательностями случайных векторов, независимых друг от друга и от вектора начального состояния x_0. Все случайные векторы центрированные, их ковариационные матрицы известны:

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\, x_0 = 0, && \mathsf{E}\, x_0 x_0' = P_0. \\ &\mathsf{E}\, u(t) = 0, && \mathsf{E}\, u(t)u'(s) = Q(t)\delta_{ts}, && t,s = 0,\ldots,N-1, \\ &\mathsf{E}\, \rho(t) = 0, && \mathsf{E}\, \rho(t)\rho'(s) = R(t)\delta_{ts}, && t,s = 0,\ldots,N, \end{aligned} \tag{3}$$

Матрицы $Q(t)$, $R(t)$ и P_0 полагаются положительно определёнными.

По наблюдениям $z(0), \ldots, z(N)$ требуется оценить скалярную величину $a'x(N)$, где $a \in \mathbb{R}^n$ — заданный вектор. Будем рассматривать линейные оценки вида

$$l(\Phi) = \sum_{t=0}^{N} \Phi'(t) z(t). \tag{4}$$

Вектор $\Phi = (\Phi'(0), \ldots, \Phi'(N))' \in \mathbb{R}^{m(N+1)}$ будем называть оценивателем. Задача оптимальной среднеквадратической фильтрации состоит в нахождении оценивателя Φ^0, который минимизирует второй момент ошибки оценки:

$$d(\Phi^0) = \inf_{\Phi} d(\Phi), \qquad d(\Phi) = \left\{ \mathsf{E}\Big(l(\Phi) - a'x(N) \Big)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Чтобы свести проблему (5) к вариационной задаче, введём следующие величины:

- функционал

$$J(\Phi_-, \Phi, w) = \Bigg\{ \Phi_-' P_0\, \Phi_- + \sum_{t=0}^{N} \Phi'(t) R(t) \Phi(t) + \\ + \sum_{t=0}^{N-1} w'(t+1) Q(t) w(t+1) \Bigg\}^{\frac{1}{2}},$$

  где

$$\Phi_- \in \mathbb{R}^n, \qquad w(t+1) \in \mathbb{R}^r, \qquad w = (w'(1), \ldots, w'(N))' \in \mathbb{R}^{rN},$$

- функцию $\xi^{\Phi}(t)$, которая для заданного оценивателя Φ определена уравнением в обратном времени

$$\xi^{\Phi}(t) = \sum_{k=t}^{N-1} A'(k,t)\xi^{\Phi}(k+1) - H(t)\Phi(t), \qquad t = N-1, \dots, 0, \tag{6}$$
$$\xi^{\Phi}(N) = a - H(N)\Phi(N).$$

Тогда выполнено равенство

$$d(\Phi) = J(\Phi_-, \Phi, w),$$

где Φ_- и w связаны с Φ выражениями

$$\Phi_- - \xi^{\Phi}(0) = 0, \qquad w(t+1) - B'(t)\xi^{\Phi}(t+1) = 0, \quad t = 0, \dots, N-1. \tag{7}$$

Значит проблема оптимальной фильтрации (5) оказывается эквивалентной вариационной задаче

$$J_0 = \inf_{\Phi_-,\, \Phi,\, w} J(\Phi_-, \Phi, w) \tag{8}$$

с линейными ограничениями (7). Доказаны существование и единственность её решения. Вариационная проблема (8), (7) сводится к краевой задаче, описанной ниже.

Теорема 1.

1^0. *Решение* (Φ_-^0, Φ^0, w^0) *задачи* (8), (7) *определяется формулами*

$$\begin{aligned}
&\Phi_-^0 = \xi(0), && \\
&\Phi^0(t) = R^{-1}(t)H'(t)\eta(t), && t = 0, \dots, N, \\
&w^0(t+1) = B'(t)\xi(t+1), && t = 0, \dots, N-1,
\end{aligned}$$

где функции $\eta(t)$ *и* $\xi(t)$ *удовлетворяют краевой задаче*

$$\begin{gathered}
\xi(t) = \sum_{k=t}^{N-1} A'(k,t)\xi(k+1) - H(t)R^{-1}(t)H'(t)\eta(t), \\
\eta(t+1) = \sum_{k=0}^{t} A(t,k)\eta(k) + B(t)Q(t)B'(t)\xi(t+1), \\
t = 0, \dots, N-1,
\end{gathered} \tag{9}$$

с граничными условиями

$$\eta(0) = P_0\xi(0), \qquad \xi(N) = a - H(N)R^{-1}(N)H'(N)\eta(N).$$

2^0. *Краевая задача* (9) *имеет единственное решение.*

Таким образом, вариационная задача (8), (7) сводится к краевой задаче (9). Её решение представляет собой сложную проблему, поскольку размерность системы линейных уравнений (9) велика. Оказывается, однако, что входящие в (9) функции $\eta(t)$ и $\xi(t)$ связаны между собой важным соотношением.

Теорема 2.

1^0. *Функции* $\eta(t)$ *и* $\xi(t)$ *краевой задачи* (9) *связаны соотношением*

$$\eta(t) = P(t)\xi(t) + \sum_{k=t}^{N-1} P_1(t,k)\xi(k+1), \qquad t = 0,\dots,N, \tag{10}$$

где матрицы $P(t)$ *и* $P_1(t,i)$ *вычисляются по формулам*

$$P(t+1) = \sum_{l=0}^{t}\Big[C(t,l)P_1(l,t) + P_1'(l,t)A'(t,l) + C(t,l)P(l)A'(t,l)\Big] + \\ + B(t)Q(t)B'(t),$$

$$P_1(t+1,i) = \sum_{l=0}^{t}\Big[C(t,l)P_1(l,i) + P_1'(l,t)A'(i,l) + C(t,l)P(l)A'(i,l)\Big], \\ t = 0,\dots,N-1, \qquad i = t+1,\dots,N-1, \tag{11}$$

$$C(t,l) = A(t,l) - D(t,l)H'(l),$$

$$D(t,l) = \Big[P_1'(l,t) + A(t,l)P(l)\Big]H(l)\Big[H'(l)P(l)H(l) + R(l)\Big]^{-1}$$

при начальных условиях

$$P(0) = P_0, \qquad P_1(0,i) = 0, \qquad i = 0,\dots,N-1.$$

2^0. *Функция* $\xi(t)$ *удовлетворяет уравнению в обратном времени*

$$\xi(t) = \sum_{k=t}^{N-1} C'(k,t)\xi(k+1), \qquad t = N-1,\dots,0, \tag{12}$$

$$\xi(N) = \Big[E + H(N)R^{-1}(N)H'(N)P(N)\Big]^{-1} a.$$

Сформулированная теорема позволяет вместо краевой задачи (9) с граничными условиями при $t=0$ и $t=N$ рассматривать задачу (11) с условием только лишь при $t=0$. Функции $\xi(t)$ и $\eta(t)$ вычисляются в соответствии с формулами (12) и (10). Теперь несложно получить, что оптимальный оцениватель Φ^0 для исходной задачи фильтрации (5) определяется выражением

$$\Phi^0(t) = R^{-1}(t)H'(t)\left[P(t)\xi(t) + \sum_{k=t}^{N-1} P_1(t,k)\xi(k+1)\right], \qquad t = 0,\dots,N,$$

а соответствующее ему значение функционала качества определяется формулой

$$d(\Phi^0) = \left\{ a' P(N) \Big[E + H(N) R^{-1}(N) H'(N) P(N) \Big]^{-1} a \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, найден алгоритм вычисления оптимального оценивателя Φ^0. Кроме того, зависимость (10) позволяет получить для системы (1), (2) рекуррентные уравнения оптимальной оценки, обобщающие соотношения Калмана на случай, когда состояние объекта описывается дискретным уравнением Вольтерра.

Основные описанные в первой главе результаты опубликованы в работах [2] и [6].

Несмотря на наличие явных выражений для оптимального оценивателя, поиск его может быть затруднён, поскольку нахождение матриц P и P_1 по формулам (11) требует довольно больших вычислительных затрат. Поэтому на практике вместо оптимального алгоритма иногда предпочтительнее использовать некоторый другой, упрощённый алгоритм.

Во второй главе диссертации рассматривается упрощённый алгоритм фильтрации для задачи (5) и строится оценка его уровня неоптимальности. Уровнем неоптимальности используемого оценивателя Φ будем называть величину $\Delta(\Phi) = d(\Phi)/d(\Phi^0)$. Поскольку мы предпочитаем не искать оптимальный фильтр Φ^0 ввиду больших вычислительных затрат, то величина $d(\Phi^0)$ неизвестна, а значит и уровень неоптимальности неизвестен. Однако можно оценить его значение сверху. Если при этом окажется, что найденная граница близка к единице, то это будет означать, что значения функционала $d(\cdot)$ для оптимального и упрощённого оценивателей отличаются друг от друга незначительно, и потому можно применять выбранный субоптимальный алгоритм без большой потери в качестве оценивания. Такой подход к решению задач фильтрации был разработан А. И. Матасовым[2], и данная диссертационная работа продолжает это направление. Поиск границы для уровня неоптимальности основан на теории двойственности выпуклых вариационных задач.

Выберем оцениватель φ, который будет использоваться в задаче (5) вместо оптимального оценивателя Φ^0. Он должен легко вычисляться, и вместе с тем должны быть основания полагать, что значения $d(\varphi)$ и $d(\Phi^0)$ близки. Для построения такого оценивателя рассмотрим следующую редуцированную модель исходного уравнения Вольтерра (1):

[2]Matasov A. I. *Estimators for Uncertain Dynamic Systems.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1999.

$$y(t+1) = \sum_{k=t-s}^{t} A(t,k)y(k) + B(t)\bar{u}(t), \qquad t = 0,\ldots,N-1, \tag{13}$$

$$y(0) = x_0, \qquad A(t,k) = 0 \quad \text{при} \quad k < 0$$

с измерениями

$$z(t) = H'(t)y(t) + \bar{\rho}(t), \qquad t = 0,\ldots,N.$$

Здесь $\bar{\rho}(t) \in \mathbb{R}^m$ и $\bar{u}(t) \in \mathbb{R}^r$ — последовательности независимых центрированных случайных векторов с ковариационными матрицами $\bar{R}(t) = \beta_1 R(t)$ и $\bar{Q}(t) = \beta_2 Q(t)$ соответственно. В отличие от исходного уравнения (1), в этой упрощённой модели пренебрегается „хвостами“ $y(t-s-1),\ldots,y(0)$. Кроме того, здесь ковариационные матрицы возмущений мы можем выбирать по своему усмотрению, изменяя положительные числа β_1 и β_2.

Рассмотрим задачу оптимального среднеквадратического оценивания величины $a'y(N)$. Очевидно, что путём расширения вектора состояния аппроксимирующая система (13) легко сводится к стандартной модели, для которой оптимальный оцениватель φ находится из формул калмановской теории фильтрации. Таким образом, поиск φ не приводит к вычислительным сложностям. Кроме того, можно ожидать, что значения $d(\varphi)$ и $d(\Phi^0)$ отличаются друг от друга незначительно, поскольку модель (13) близка к исходной модели (1)–(3). Итак, в исходной задаче (5) для оценивания $a'x(N)$ будем использовать фильтр φ, оптимальный для упрощённой модели. Число s будем называть порядком упрощённого фильтра φ.

Теорема 3.

Пусть φ — оптимальный для редуцированной модели оцениватель. Тогда его уровень неоптимальности $\Delta(\varphi)$ в задаче (5) *удовлетворяет следующим неравенствам:*

$$1 \leqslant \Delta(\varphi) \leqslant \Delta^{\varphi}, \qquad \Delta^{\varphi} = \frac{J^{\varphi} \cdot k^{\varphi}}{|a'\tilde{x}^{\varphi}(N)|},$$

где

$$J^{\varphi} = \left\{ \xi^{\varphi'}(0)P_0\xi^{\varphi}(0) + \sum_{t=0}^{N} \varphi'(t)R(t)\varphi(t) + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=0}^{N-1} \xi^{\varphi'}(t+1)B(t)Q(t)B'(t)\xi^{\varphi}(t+1) \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$k^{\varphi} = \Bigg\{ \xi^{*'}(0) P_0 \xi^*(0) + \sum_{t=0}^{N} \tilde{x}^{\varphi'}(t) H(t) R^{-1}(t) H'(t) \tilde{x}^{\varphi}(t) + \\ + \sum_{t=0}^{N-1} \xi^{*'}(t+1) B(t) \bar{Q}'(t) Q^{-1}(t) \bar{Q}(t) B'(t) \xi^*(t+1) \Bigg\}^{\frac{1}{2}},$$

функция $\xi^{\varphi}(t)$ *вычисляется по формуле* (6), *функция* $\xi^*(t)$ *описывается формулами*

$$\xi^*(t) = \sum_{k=t}^{\min(t+s,N-1)} A'(k,t)\xi^*(k+1) - H(t)\varphi(t), \qquad t = N-1, \dots, 0,$$

$$\xi^*(N) = a - H(N)\varphi(N),$$

а процесс $\tilde{x}^{\varphi}(t)$ *определён уравнением Вольтерра*

$$\tilde{x}^{\varphi}(t+1) = \sum_{k=0}^{t} A(t,k)\tilde{x}^{\varphi}(k) + B(t)\bar{Q}(t)B'(t)\xi^*(t+1), \quad t = 0, \dots, N-1,$$

$$\tilde{x}^{\varphi}(0) = P_0 \xi^*(0).$$

Из теоремы видно, что поиск верхней границы Δ^{φ} для уровня неоптимальности $\Delta(\varphi)$ не представляет трудностей.

Пример.

Для демонстрации эффективности предложенного подхода рассмотрим двумерную систему

$$x(t+1) = \sum_{k=0}^{t} \lambda^{t-k+1} \begin{pmatrix} 0.8 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + u(t), \qquad t = 0, \dots, N-1, \qquad (14)$$

со скалярными измерениями

$$z(t) = x_1(t) + \rho(t), \qquad t = 0, \dots, N. \qquad (15)$$

Требуется оценить вторую компоненту $x_2(N)$ по измерениям (15). Пусть

$$\lambda = 0.5, \qquad P_0 = \begin{pmatrix} 100.0 & 0 \\ 0 & 100.0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 1.0 & 0 \\ 0 & 1.0 \end{pmatrix}, \qquad R = 1.0,$$

β_1 и β_2 примем равными 1.

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что несмотря на небольшое значение величины λ тривиальное решение однородной системы, соответствующей уравнению (14), находится на границе устойчивости.

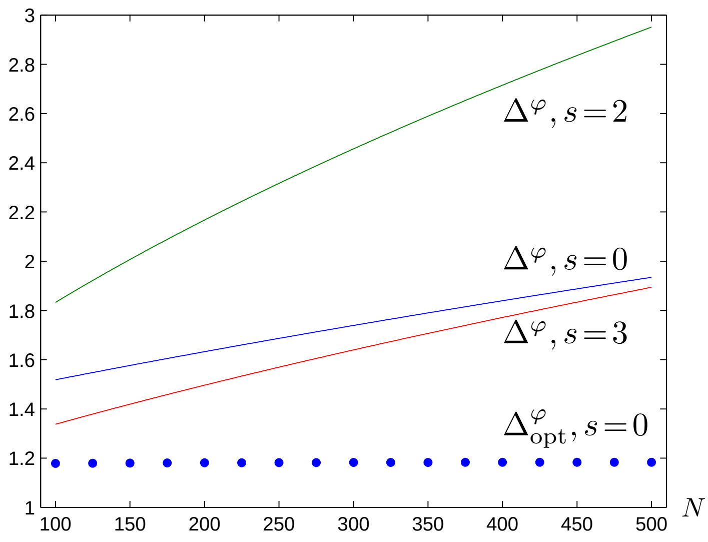

Рис. 1. Значения величины Δ^{φ} для $N=100\dots500$ и различных s.

Графики зависимостей Δ^{φ} от N для различных значений порядка s фильтра представлены на рис. 1 сплошными линиями. Видно, что для любого N можно подобрать небольшое число s (порядок фильтра) так, чтобы оценка Δ^{φ} оказалась близка к 1. Кроме того, поскольку положительные числа β_1 и β_2 можно выбирать произвольно, то для каждого s имеется двухпараметрическое семейство упрощённых фильтров φ. Поэтому значение величины Δ^{φ} можно оптимизировать, изменяя параметры β_1 и β_2. Оптимизированные значения Δ^{φ} для случая $s = 0$ показаны на рис. 1 отдельными точками. Видно, что варьированием β_1 и β_2 оценку уровня неоптимальности можно существенно улучшить.

Итак, во второй главе диссертации предлагается упрощённый алгоритм решения задачи оптимальной среднеквадратической фильтрации и строится оценка уровня неоптимальности этого алгоритма. Этот материал представлен в статье [1] и в тезисах [7].

В третьей главе рассматривается та же система (1), (2), что и в первой главе, но делаются другие предположения о шумах. А именно, начальное состояние и возмущения в системе и в наблюдениях будем считать не случайными, а неопределёнными детерминированными величинами. Пусть компоненты этих векторов ограничены по модулю известными положительными числами:

$$\begin{aligned} &\left|x_{0d}\right| \leqslant \sigma_{-d}, && d = 1,\dots,n, && \\ &\left|u_d(t)\right| \leqslant \gamma_d(t), && d = 1,\dots,r, && t = 0,\dots,N-1, \\ &\left|\rho_d(t)\right| \leqslant \sigma_d(t), && d = 1,\dots,m, && t = 0,\dots,N. \end{aligned} \tag{16}$$

Используя линейные функционалы вида (4) требуется оценить скалярную величину $a'x(N)$. Гарантированную ошибку оценивания определим выражением
$$d_{\text{guar}}(\Phi) = \max_{x_0,u,\rho} \Big| l(\Phi) - a'x(N) \Big|,$$
где максимум берётся по всем возможным значениям векторов x_0, $u(t)$ и $\rho(t)$, удовлетворяющим ограничениям (16). Задача оптимального гарантирующего оценивания заключается в нахождении оценивателя Φ_{guar}, который минимизирует функционал $d_{\text{guar}}(\Phi)$:
$$d_{\text{guar}}(\Phi_{\text{guar}}) = \inf_{\Phi} d_{\text{guar}}(\Phi). \tag{17}$$
В диссертации показано, что
$$d_{\text{guar}}(\Phi) = I(\Phi_-, \Phi, w),$$
где
$$I(\Phi_-, \Phi, w) = \sum_{d=1}^{n} \sigma_{-d} \big|\Phi_{-d}\big| + \sum_{t=0}^{N} \sum_{d=1}^{m} \sigma_d(t) \big|\Phi_d(t)\big| + \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{d=1}^{r} \gamma_d(t) \big|w_d(t+1)\big|,$$
Φ_- и w связаны с Φ выражениями (7), а Φ_{-d}, $\Phi_d(t)$, $w_d(t+1)$ — компоненты векторов Φ_-, $\Phi(t)$ и $w(t+1)$ соответственно. Следовательно, задача (17) эквивалентна вариационной проблеме
$$I_0 = \inf_{\Phi_-,\, \Phi,\, w} I(\Phi_-, \Phi, w) \tag{18}$$
при ограничениях (7). В третьей главе доказаны существование и единственность решения негладкой задачи (18), (7), а также сформулирована двойственная проблема, необходимая для дальнейших построений.

К сожалению, задача (18), (7) сложна в связи с негладкостью минимизируемого функционала $I(\Phi_-, \Phi, w)$. Поэтому для решения проблемы (17) предлагается подход, использованный во второй главе — вместо оптимального гарантирующего оценивателя Φ_{guar} берётся некоторый упрощённый оцениватель Φ. Уровень его неоптимальности определяется отношением $\Delta_u(\Phi) = d_{\text{guar}}(\Phi)/d_{\text{guar}}(\Phi_{\text{guar}})$. Затем для $\Delta_u(\Phi)$ строится верхняя граница, которая может быть вычислена без решения задачи (18), (7). Если значение такой верхней границы приемлемо, то оцениватель Φ может быть применён для решения задачи гарантирующей фильтрации (17).

Вместо вариационной задачи (18), (7) рассмотрим существенно более простую задачу (8), (7), где P_0, $R(t)$ и $Q(t)$ — симметрические положительно определённые матрицы. Зададим их следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&P_0 = \operatorname{diag}\{\sigma_{-1}^{2}, \dots, \sigma_{-n}^{2}\}, && \\
&R(t) = \beta_1 \operatorname{diag}\{\sigma_1^2(t), \dots, \sigma_m^2(t)\}, && t = 0, \dots, N, \\
&Q(t) = \beta_2 \operatorname{diag}\{\gamma_1^2(t), \dots, \gamma_r^2(t)\}, && t = 0, \dots, N-1,
\end{aligned}
$$

где β_1 и β_2 — некоторые положительные числа, которые можно выбирать произвольно.

Видно, что проблемы (18), (7) и (8), (7) имеют одинаковые ограничения, но отличаются видом минимизируемого функционала. Задача (8), (7) рассматривалась в первой главе, и алгоритм поиска её решения (Φ_-^0, Φ^0, w^0) известен. В гарантирующей задаче (17) вместо оптимального оценивателя Φ_{guar} будем использовать оцениватель Φ^0, оптимальный для задачи среднеквадратической фильтрации.

Теорема 4.
Уровень неоптимальности $\Delta_u(\Phi^0)$ оценивателя Φ^0 в задаче (17) удовлетворяет неравенствам

$$
1 \leqslant \Delta_u(\Phi^0) \leqslant \Delta_u^0, \qquad \Delta_u^0 = \frac{\mathcal{N}_1 \cdot \mathcal{N}_\infty}{\mathcal{N}_2^2},
$$

где

$$
\mathcal{N}_1 = \sum_{d=1}^{n} \sigma_{-d} \left| \Phi_{-d}^0 \right| + \sum_{t=0}^{N} \sum_{d=1}^{m} \sigma_d(t) \left| \Phi_d^0(t) \right| + \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{d=1}^{r} \gamma_d(t) \left| w_d^0(t+1) \right|,
$$

$$
\mathcal{N}_2 = \left\{ \sum_{d=1}^{n} \sigma_{-d}^{2} \Phi_{-d}^{0\,2} + \sum_{t=0}^{N} \sum_{d=1}^{m} \beta_1 \sigma_d^2(t) \Phi_d^{0\,2}(t) + \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{d=1}^{r} \beta_2 \gamma_d^2(t) w_d^{0\,2}(t+1) \right\}^{\frac{1}{2}},
$$

$$
\mathcal{N}_\infty = \max \left\{ \max_{d=1,\dots,n} \sigma_{-d} \left| \Phi_{-d}^0 \right|, \max_{\substack{t=0,\dots,N \\ d=1,\dots,m}} \beta_1 \sigma_d(t) \left| \Phi_d^0(t) \right|, \max_{\substack{t=0,\dots,N-1 \\ d=1,\dots,r}} \beta_2 \gamma_d(t) \left| w_d^0(t+1) \right| \right\}.
$$

В качестве примера рассмотрим систему (14), (15). Пусть характеристики шумов следующие:

$$
\sigma_{-1} = \sigma_{-2} = 10.0, \qquad \sigma(t) = 1.0, \qquad \gamma_1(t) = \gamma_2(t) = \gamma,
$$

параметры β_1 и β_2 взяты равными 1, а $\lambda = 0.5$. На рис. 2 представлены графики зависимостей Δ_u^0 от N при различных значениях γ. Видно, что если отличие значения критерия от оптимального в 2–3 раза допустимо, то оцениватель Φ^0, оптимальный для квадратической задачи, может быть использован и в задаче гарантирующего оценивания (17). Оптимизация величины Δ_u^0 путём подбора β_1 и β_2 в этом примере к существенному улучшению не приводит.

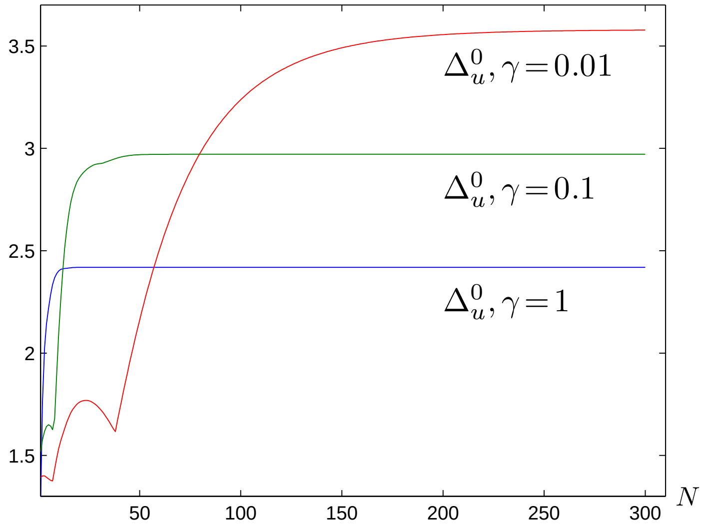

Рис. 2. Значения величины Δ_u^0 для $N = 1\ldots300$ и различных γ.

Можно использовать и другие упрощённые алгоритмы фильтрации в задаче минимаксного оценивания (17). Например, во второй главе рассматривался оцениватель φ, оптимальный в среднеквадратическом смысле для системы, описываемой редуцированной моделью (13). В диссертации для оценивателя φ также построена граница уровня неоптимальности.

Таким образом, в третьей главе рассмотрена задача гарантирующей фильтрации в случае детерминированных ограниченных помех. Предложены упрощённые алгоритмы оценивания и построены границы уровней неоптимальности соответствующих оценивателей. Описанные результаты частично опубликованы в статье [4].

В четвёртой главе рассматриваются те же уравнения (1) и (2) для описания системы и наблюдений, что и ранее, но делаются более общие предположения о шумах. Здесь изучается случай так называемых комбинированных помех, которые имеют вид

$$x_0 = \overset{(1)}{x}_0 + \overset{(2)}{x}_0, \qquad u(t) = \overset{(1)}{u}(t) + \overset{(2)}{u}(t), \qquad \rho(t) = \overset{(1)}{\rho}(t) + \overset{(2)}{\rho}(t).$$

Предполагается, что слагаемые в этих суммах удовлетворяют следующим гипотезам:

- компоненты векторов $\overset{(1)}{x}_0$, $\overset{(1)}{u}(t)$, $\overset{(1)}{\rho}(t)$ — неопределённые неслучайные ограниченные по модулю числа, такие, что

$$
\begin{aligned}
&\Big|\overset{(1)}{x}_{0d}\Big| \leqslant \sigma_{-d}, && d = 1, \ldots, n, && \\
&\Big|\overset{(1)}{u}_d(t)\Big| \leqslant \gamma_d(t), && d = 1, \ldots, r, && t = 0, \ldots, N-1, \\
&\Big|\overset{(1)}{\rho}_d(t)\Big| \leqslant \sigma_d(t), && d = 1, \ldots, m, && t = 0, \ldots, N;
\end{aligned}
$$

- $\overset{(2)}{x}_0$, $\overset{(2)}{u}(t)$, $\overset{(2)}{\rho}(t)$ — центрированные случайные векторы. Компоненты всех этих векторов независимы и имеют неопределённые ограниченные дисперсии:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{E}\, \overset{(2)}{x}_0 \overset{(2)}{x}_0{}' = \mathrm{diag}\{c_1^x, ..., c_n^x\}, && \\
&\mathsf{E}\, \overset{(2)}{u}(t) \overset{(2)}{u}{}'(s) = \mathrm{diag}\{q_1^u(t), ..., q_r^u(t)\}\delta_{ts}, && t, s = 0, \ldots, N-1, \\
&\mathsf{E}\, \overset{(2)}{\rho}(t) \overset{(2)}{\rho}{}'(s) = \mathrm{diag}\{r_1^\rho(t), ..., r_m^\rho(t)\}\delta_{ts}, && t, s = 0, \ldots, N,
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&c_d^x \leqslant c_d, && d = 1, \ldots, n, && \\
&q_d^u(t) \leqslant q_d(t), && d = 1, \ldots, r, && t = 0, \ldots, N-1, \\
&r_d^\rho(t) \leqslant r_d(t), && d = 1, \ldots, m, && t = 0, \ldots, N.
\end{aligned}
$$

- вектор $\overset{(2)}{x}_0$ и процессы $\overset{(2)}{u}(t)$, $\overset{(2)}{\rho}(t)$ независимы в совокупности.

В этих формулах σ_{-d}, c_d — известные положительные числа, а $\gamma_d(t)$, $q_d(t)$, $\sigma_d(t)$, $r_d(t)$ — последовательности известных положительных чисел.

Описанный процесс $u(t)$ можно также интерпретировать как последовательность случайных векторов, компоненты которых независимы и имеют неизвестные ограниченные математические ожидания и дисперсии. Аналогичное представление справедливо для процесса $\rho(t)$ и вектора x_0.

Будем рассматривать линейные оценки $l(\Phi)$ вида (4). Поскольку случайные элементы имеют неопределённые статистические характеристики, определим гарантированную ошибку оценки выражением

$$
D(\Phi) = \max_{x_0, u, \rho} \left\{ \mathsf{E} \Big(l(\Phi) - a'x(N) \Big)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},
$$

где максимум берётся по всем неопределённостям в описании элементов x_0, u и ρ. Задача оптимальной гарантирующей фильтрации состоит в нахождении оценивателя Φ_{opt}, который минимизирует гарантированную ошибку оценки:

$$
D(\Phi_{\mathrm{opt}}) = \inf_{\Phi} D(\Phi). \tag{19}
$$

Как и ранее, можно показать, что задача (19) эквивалентна некоторой вариационной проблеме. А именно, если определить величины w и Φ_- выражениями (7), то выполнено равенство $D(\Phi)=\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\Phi_-, \Phi,\, w)$, где

$$\mathcal{D}(\Phi_-, \Phi,\, w) = I^2(\Phi_-, \Phi,\, w) + \\ + \Phi_-' c\, \Phi_- + \sum_{t=0}^{N} \Phi'(t) r(t) \Phi(t) + \sum_{t=0}^{N-1} w'(t+1) q(t) w(t+1),$$

$$\begin{aligned} &c = \operatorname{diag}\{c_1, \dots, c_n\}\,, && \\ &q(t) = \operatorname{diag}\{q_1(t), \dots, q_r(t)\}\,, && t = 0, \dots, N-1, \\ &r(t) = \operatorname{diag}\{r_1(t), \dots, r_m(t)\}\,, && t = 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Следовательно, задача оптимальной гарантирующей фильтрации (19) сводится к вариационной проблеме

$$\mathcal{D}_0 = \inf_{\Phi_-, \Phi, w} \mathcal{D}(\Phi_-, \Phi,\, w) \tag{20}$$

при ограничениях (7).

Показано, что решение задачи (20), (7) существует и единственно, однако нахождение его затруднительно из-за негладкости целевого функционала. Поэтому рассмотрим некоторую „близкую“ задачу среднеквадратической фильтрации (8), (7), решение которой (Φ_-^0, Φ^0, w^0) даётся известным из первой главы алгоритмом. Будем использовать это решение в задаче (20), (7). Матрицы P_0, $R(t)$ и $Q(t)$ зададим следующим образом:

$$\begin{aligned} &P_0 = \operatorname{diag}\left\{\sigma_{-1}^{\,2}, \dots, \sigma_{-n}^{\,2}\right\} + c, && \\ &R(t) = \beta_1 \operatorname{diag}\left\{\sigma_1^2(t), \dots, \sigma_m^2(t)\right\} + r(t), && t = 0, \dots, N, \\ &Q(t) = \beta_2 \operatorname{diag}\left\{\gamma_1^2(t), \dots, \gamma_r^2(t)\right\} + q(t), && t = 0, \dots, N-1, \end{aligned}$$

где β_1 и β_2 — некоторые скалярные весовые множители.

Теорема 5.

Уровень неоптимальности $\Delta_c(\Phi^0) = D(\Phi^0)/D(\Phi_{\text{opt}})$ *упрощённого оценивателя* Φ^0 *в задаче* (19) *удовлетворяет следующим неравенствам*:

$$1 \leqslant \Delta_c(\Phi^0) \leqslant \frac{\mathcal{D}^{\frac{1}{2}}(\Phi_-^0, \Phi^0,\, w^0) \cdot \Omega^{\frac{1}{2}}(\Phi_-^0, \Phi^0, w^0)}{J^2(\Phi_-^0, \Phi^0, w^0)}.$$

Здесь

$$\Omega(\Phi^0_-, \Phi^0, w^0) = \sum_{\substack{d\colon |S_d| > \zeta^0\\ d=1,\dots,n}} s_d\Big(\big|S_d\big| - \zeta^0\Big)^2 + \sum_{t=0}^{N} \sum_{\substack{d\colon |F_d(t)| > \zeta^0\\ d=1,\dots,m}} f_d(t)\Big(\big|F_d(t)\big| - \zeta^0\Big)^2 + \\ + \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{\substack{d\colon |G_d(t)| > \zeta^0\\ d=1,\dots,r}} g_d(t)\Big(\big|G_d(t)\big| - \zeta^0\Big)^2 + \zeta^{0\,2}.$$

а величина ζ^0 *— единственный корень уравнения* $\mathcal{E}(\zeta) = 0$ *на отрезке* $[0, \zeta_{\max}]$, *где*

$$\zeta_{\max} = \max\left\{ \max_{d=1,\dots,n} \big|S_d\big|,\ \max_{\substack{t=0,\dots,N\\ d=1,\dots,m}} \big|F_d(t)\big|,\ \max_{\substack{t=0,\dots,N-1\\ d=1,\dots,r}} \big|G_d(t)\big| \right\},$$

$$\mathcal{E}(\zeta) = \sum_{\substack{d\colon |S_d| > \zeta\\ d=1,\dots,n}} s_d\Big(\big|S_d\big| - \zeta\Big) + \sum_{t=0}^{N} \sum_{\substack{d\colon |F_d(t)| > \zeta\\ d=1,\dots,m}} f_d(t)\Big(\big|F_d(t)\big| - \zeta\Big) + \\ + \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{\substack{d\colon |G_d(t)| > \zeta\\ d=1,\dots,r}} g_d(t)\Big(\big|G_d(t)\big| - \zeta\Big) - \zeta,$$

$$s_d = \frac{\sigma_{-d}^{\,2}}{c_d}, \qquad f_d(t) = \frac{\sigma_d^2(t)}{r_d(t)}, \qquad g_d(t) = \frac{\gamma_d^2(t)}{q_d(t)},$$

$$S_d = \frac{P_{0d}\Phi_{-d}^{\,0}}{\sigma_{-d}}, \qquad F_d(t) = \frac{R_d(t)\Phi_d^0(t)}{\sigma_d(t)}, \qquad G_d(t) = \frac{Q_d(t)w_d^0(t+1)}{\gamma_d(t)}.$$

Кроме того, в четвёртой главе рассматривается ещё и так называемый квазиимпульсный оцениватель. Он получен из эвристических соображений о структуре оптимального решения. Для квазиимпульсного оценивателя также построена граница его уровня неоптимальности. Приведены численные примеры, подтверждающие эффективность использования обоих рассмотренных упрощённых алгоритмов фильтрации. Результаты, описанные в четвёртой главе, представлены в работах [3] и [5].

В заключении кратко описываются основные результаты, полученные в работе.

Основные положения, выносимые на защиту

1. Получено фундаментальное соотношение между прямой и сопряжённой переменными в краевой задаче, возникающей при оценивании состояния стохастических динамических систем, описываемых дискретными уравнениями Вольтерра [2, 6].

2. Построена верхняя граница уровня неоптимальности упрощённого рекуррентного оценивателя в задаче линейной стохастической фильтрации [1, 7].

3. Для решения задачи гарантирующего оценивания состояния динамических систем, описываемых дискретными уравнениями Вольтерра с неопределёнными возмущениями, разработаны упрощённые оцениватели. Для этих оценивателей построены верхние границы уровней их неоптимальности [3–5].

4. Разработано программно-алгоритмическое обеспечение для решения задач гарантирующего оценивания и построения уровней неоптимальности в моделях, описываемых разностными уравнениями Вольтерра [1, 3–5].

Публикации в журналах, входящих в Перечень ВАК

1. Bashkov A. B., Kolmanovskii V. B., Mao X., Matasov A. I.
Mean-square filtering problem for discrete Volterra equations. *Journal of Stochastic Analysis and Applications*[3], 2004, vol. 22, №4, pp. 1085–1110.

2. Bashkov A. B., Kolmanovskii V. B., Mao X., Matasov A. I.
On a boundary-value problem for discrete Volterra equations. *Journal of Stochastic Analysis and Applications,* 2005, vol. 23, №5, pp. 999–1016.

3. Bashkov A. B., De Nicolao G., Kolmanovskii V. B., Matasov A. I.
Filtering problem for discrete Volterra equations with combined disturbances. *Journal of Stochastic Analysis and Applications,* 2007, vol. 25, №6, pp. 1297–1323.

4. Башков А. Б.
Об одном подходе к решению задачи гарантирующего оценивания для уравнений Вольтерра. *Автоматика и телемеханика,* 2009, №2, с. 42–51.

[3] Периодическое издание *Journal of Stochastic Analysis and Applications* (ISSN: 0736-2994) входит в систему цитирования Science Citation Index Expanded, а следовательно, согласно решению ВАК, этот журнал включён в Перечень ведущих рецензируемых научных журналов (http://vak.ed.gov.ru/ru/list/infletter-14-10-2008/).

Другие публикации

5. Bashkov A. B., De Nicolao G., Kolmanovskii V. B., Matasov A. I.
Filtering problem for discrete Volterra equations with combined disturbances. *Proceedings of 16th IFAC World Congress,* Prague, 2005, 6 pp (DVD-ROM, Paper Code Fr-A07-TO/1).

6. Башков А. Б., Матасов А. И.
Задача оптимальной фильтрации для дискретных уравнений Вольтерра. *Тезисы докладов 9-й международной конференции „Системный анализ и управление“,* Крым, Евпатория, 4–11 июля, 2004, с. 134.

7. Башков А. Б., Колмановский В. Б., Матасов А. И.
Об одном подходе к решению задачи фильтрации для уравнений Вольтерра. *Тезисы докладов 9-й Международной конференции „Системный анализ и управление“,* Крым, Евпатория, 4–11 июля, 2004, с. 117.