

На правах рукописи

Агапов Максим Сергеевич

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ  
ПО ПАРАМЕТРУ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ,  
МОДЕЛИРУЮЩИХ СИЛЬНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ  
ДЕФОРМИРОВАНИЕ В КООРДИНАТАХ ЭЙЛЕРА

Специальность 05.13.18 – “Математическое моделирование,  
численные методы и комплексы программ“

Автореферат  
диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

МОСКВА 2009

Работа выполнена на кафедре “Дифференциальные уравнения” Московского авиационного института (государственного технического университета).

Научный руководитель: Доктор физико-математических наук,  
профессор Кузнецов Евгений Борисович

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук,  
в.н.с. Данилин Александр Николаевич  
Кандидат физико-математических наук,  
доцент Костриченко Аркадий Борисович

Ведущая организация: Институт математического моделирования РАН.

Защита состоится “20” марта 2000 г. в 10 час. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д212.125.04 при Московском авиационном институте (государственном техническом университете) по адресу: 125993 Москва, Волоколамское шоссе, д. 4, главный административный корпус, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Московского авиационного института (государственного технического университета).

Автореферат разослан “17” февраля 2009 г.

Ученый секретарь  
Диссертационного совета,  
кандидат физико-математических наук

Ротанина М.В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы

Интерес исследователей к более точным нелинейным моделям механики твёрдого деформируемого тела (МТДТ) продолжает активно расти. Особенно актуален вопрос исследования больших деформаций. Сложности, связанные с расчётом материалов, возникают на производстве, где широко применяются материалы по физико-механическим свойствам сходные с резиной.

При описании конечных деформаций в механике деформируемого твёрдого тела используют обычно координаты Лагранжа. Но ввиду того, что в процессе деформирования лагранжевы координаты являются криволинейными неортогональными и следящими во времени за физическими частицами, они приводят к довольно сложным выражениям и уравнениям для тензоров напряжений и деформаций. Кроме того, практика численного решения задач механики деформируемого твёрдого тела показывает, что в процессе вычислений конечно-элементная сетка, построенная в координатах Лагранжа, может сильно исказиться. При этом возникает плохая обусловленность линеаризованных в окрестности такого состояния систем уравнений, что приводит к неустойчивости вычислительного процесса.

Координаты Эйлера лишены этого недостатка, поскольку их пространственная сетка не деформируется, в неё только добавляются или убираются узлы в процессе деформирования, тем самым сохраняя заданную в начале вычислений точность. Поэтому использование координат Эйлера выглядит заманчиво для решения проблем МТДТ, особенно при больших деформациях. Подобный подход применяется, например, в гидромеханике, газодинамике и др. областях. Особенностью в использовании координат Эйлера совместно с методом продолжения решения по параметру является то, что искомыми величинами являются не перемещения частиц, а их скорости. В скоростях также формулируются и граничные условия.

В связи с этим наиболее часто встречающиеся подходы можно разделить на три группы: первая предполагает использование принципа виртуальных перемещений, в котором все величины отнесены к исходному недеформированному состоянию (глобальная лагранжева постановка); вторая группа основана на том же вариационном уравнении, но в качестве базовой используется текущая метрика (модернизированная лагранжева постановка), встречающаяся у Баженова В.Г., Голованова А.И., Коробейникова С.Н., Бате К.Д. и др; третья группа представляет собой комбинированную лагранжево-эйлерову постановку, согласно которой отслеживается поведение материальной точки (элементарного объема) в соответствии с лагранжевым методом описания среды, но в текущем состоянии ставится задача о течении среды в соответствии с эйлеровым подходом. Такой подход реализован в работах Баженова В.Г., Голованова А.И., Коробейникова С.Н., Кузнецова С.А., Султанова Л.У. и других. В данной работе описан подход в виде глобальной эйлеровой постановки, где твёрдое тело рассматривается как сплошная среда с подвижными границами. Подоб-

ным представлением в гидромеханике и смежных областях занимались Голованов А.И., Колдоба А.В., Попов Ю.П., Самарский А.А. и другие.

Решение системы уравнений, полученной в ходе какого-либо представления, можно получить, используя два самых распространённых метода: метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Принцип конечных разностей используется достаточно давно, и область его использования постоянно растёт. Впервые конечно-разностные аппроксимации в механике ввел Исаак Ньютон (1726 г.), хотя Л. Эйлер в своих работах по дифференциальному исчислению (1755 г.) использовал предельные переходы в конечных разностях. Основы современной теории конечных разностей были заложены в основном Ж.Лагранжем (1797 г.) и П.Лапласом (1825 г.). Один из самых больших толчков в развитии МКР и сфер его применения состоялся в начале 50-х гг. XX века в связи с появлением электронно-вычислительных машин и распространением численных методов анализа. Здесь особо следует отметить Гельфонда А.О., Годунова С.К., Головина В.М., Давыдова Ю.М., Маркова А.А. и других. Наиболее серьёзный вклад в развитие МКЭ сделали Баженов В.Г., Галлагер Р., Голованов А.И., Зенкевич (Zienkiewicz) О.С., Сахаров А.С. и другие.

Одним из первых ввел параметр для численного решения уравнения М. Лаэй (Lahaye). Он применял дискретное продолжение для численного решения нелинейного уравнения. Д.Ф. Давиденко же использует непрерывное продолжение. Далее этот подход развивался в работах Е. Рикса, Власова В.З., Григолюка Э.И., Шалашилина В.И., Кузнецова Е.Б., Гаврюшина С.С. и других авторов.

В своих работах авторы Бате К. Д. (Bathe K.J.), Клейбер М. (Kleiber M.), МакМикинг Р. М. (McMeeking R.M.), Шалашилин В.И. исследовали различные деформации в эйлеровой и лагранжевой формулировках, где показывали, что при определенных физических соотношениях оба подхода приводят к одинаковому результату.

Исследованиями геометрической нелинейности занимались Григолюк Э.И., Шалашилин В.И., Голдманис М.В., Горлач Б.А., Капустин С.А., Данилин А.Н., Костриченко А.Б., Лопаницын Е.А., Оден Д. Клейбер М. (Kleiber M.) и др.

Следующие авторы внесли весомый вклад в исследование теории больших деформаций: Голованов А.И., Черных К.Ф., Шалашилин В.И., Грин А., Паймушин В.Н., Мореси Л. (Moresli L.), Дефур Ф. (Defour F.), Ариф А. (Arif A.), Первез Т. (Pervez T), Первез М.М. (Pervez M.M.) и другие.

### **Методы исследования**

Известно, что конечное напряженно деформированное состояние тела во многих случаях определяется процессом, в результате которого оно было достигнуто. Для того чтобы восстановить процесс деформирования, достаточно знать начальное состояние тела и поле скоростей его точек в каждый момент времени. Такую возможность предоставляет изучение процесса деформирования как процесса продолжения решения по параметру, в качестве которого может быть выбран параметр нагрузки или

характерные смещения в статических задачах, а время – в динамических задачах или наилучший параметр продолжения решения в тех и других случаях.

Этот подход характерен тем, что в каждый момент продолжения решения требуется определять поле производных от неизвестных величин по параметру, которое можно понимать как поле скоростей этих величин. Задача определения таких величин является линейной и по существу принципиально ничем не отличается от задачи определения скоростей в гидромеханике. Ее удобнее решать в координатах Эйлера, т.е. с использованием сеток, которые не изменяются в процессе продолжения решения (в процессе деформирования). Изменяются же положения частиц тела и его границы по отношению к выбранной сетке.

### **Научная новизна**

К новым научным результатам относятся:

- использование метода продолжения решения по параметру в рамках эйлерового описания деформирования твердого тела;
- использование экстраполяции для вычисления границ деформируемого тела в рамках эйлерового описания деформации твердого тела;
- вывод соответствующих уравнений для задач МТДТ относительно производных по введенному параметру;
- использование различных переменных в виде параметра для более точного и удобного достижения требуемого результата;
- численное исследование и тестирование предложенного алгоритма.

### **Достоверность результатов**

Достоверность полученных результатов обосновывается корректной постановкой математических задач, сравнением полученных результатов с аналитическими решениями или численными результатами, полученными в ходе других достоверных расчетов.

### **Практическая и теоретическая ценность**

Разработанные в диссертации математические модели, численные методы и программные комплексы могут быть использованы для расчётов тел, допускающих большие деформации, таких как резина, каучук и др. Предложенные методы могут быть использованы для решения статических задачи штамповки, вытяжки, где благодаря эйлеровому подходу нет привязки непосредственно к деформируемому телу.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Алгоритм изучения деформирования упругих областей с учетом больших перемещений и конечных деформаций на основе метода продолжения решения по параметру в рамках эйлерового описания деформации твердого тела;
2. Разрешающие уравнения и алгоритм численного решения задачи механики деформируемого твердого тела, моделирующие физическую нели-

нейность, в том числе поиск границы деформированного тела с помощью экстраляции;

3. Исследование полученной системы при различных способах выбора параметра;

4. Численный алгоритм на основе конечно-разностного метода;

5. Программное обеспечение для решения указанного класса задач и результаты решения ряда тестовых статических задач деформирования.

### **Апробация работы**

Материалы диссертации докладывались на 2-й Международной научной школе “Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ”, г. Саранск, 2005 г.; на 21 и 22-й Международных конференциях “Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов”, г. Санкт-Петербург 2006-2007г. ; на 11, 12, 13 и 14-м Международных симпозиумах “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”, Ярополец, Моск. обл. 2005-2008г. ; на 9-м Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике, г. Нижний Новгород, 2006 г.; на 9-х Харитоновских тематических научных чтениях “Экстремальные состояния вещества, детонация, ударные волны”, г. Саров, 2007 г.; на 17-й Крымской осенней математической школе-симпозиуме по спектральным и эволюционным задачам, 2006 г.; на 7-й Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях, г. Алушта, 2008 г.; на научном семинаре в институте механики МГУ им. М.В. Ломоносова в 2008 г.

### **Публикации**

Основные результаты работы опубликованы в научных статьях [1-2], научных сборниках [3-4] и тезисах [5-13]. Степень участия автора в академических работах [1-2] – участие в математическом моделировании, разработке алгоритмов, программных комплексов и анализе результатов.

### **Структура и объём работы**

Основная часть работы изложена на 112 страницах, состоит из введения, четырёх глав и заключения. Библиография содержит 126 наименования.

**Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ:**

№ 03-01-00071, 06-08-00371, 06-01-00239.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, формулируются цели, научная новизна и практическая значимость полученных результатов. Дается обзор литературы и краткое содержание глав работы.

**Первая глава** посвящена описанию математической модели, выводу уравнений в координатах Эйлера и детальный разбор предлагаемого алгоритма в общем случае.

В первом параграфе рассматривается геометрия деформаций. Показывается, что при небольших деформациях подходы Эйлера и Лагранжа приводят к одинаковому результату.

Второй параграф посвящен выводу уравнений равновесия. Выписываются различные граничные условия.

Третий параграф описывает физические соотношения, рассматриваются линейные соотношения в виде закона Гука. Выводится аналитическое решение для одномерного случая и показывается совпадение решений для эйлерова и лагранжева подходов.

В четвертом параграфе вводится некий параметр  $\lambda$ , по которому дифференцируются неизвестные перемещения  $u, v, w$ , тензора деформации  $\varepsilon$  и напряжения  $\sigma$

$$\frac{d\vec{\sigma}}{d\lambda} = \dot{\vec{\sigma}}, \quad \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\lambda} = \dot{\vec{\varepsilon}}, \quad \frac{d\vec{u}}{d\lambda} = \dot{\vec{u}}. \quad (1)$$

Чтобы получить уравнения, определяющие поле скоростей изменения неизвестных, необходимо продифференцировать уравнения равновесия и соотношения Коши по параметру  $\lambda$ . А физические соотношения разделить на  $d\lambda$ . В результате получится следующая линейная, относительно производных по параметру, система дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{\sigma}_{zx}}{\partial z} + \dot{F}_x = 0. \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x}. \quad (3)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} + \left(1 - \frac{\partial v}{\partial y}\right) \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \dot{w}}{\partial y}. \quad (4)$$

$$\dot{\vec{\sigma}} = A_T \dot{\vec{\varepsilon}}. \quad (5)$$

Эти уравнения следует дополнить круговой перестановкой  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ .

Аналогично поступим и с граничными условиями, введенными во втором параграфе. Дополнив равенства (1) начальными условиями, обычно это недеформированное состояние, получим задачу Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\sigma}}{d\lambda} &= \dot{\vec{\sigma}}, & \frac{d\vec{\varepsilon}}{d\lambda} &= \dot{\vec{\varepsilon}}, & \frac{d\vec{u}}{d\lambda} &= \dot{\vec{u}}, \\ \vec{\sigma}|_{\lambda=0} &= 0, & \vec{\varepsilon}|_{\lambda=0} &= 0, & \vec{u}|_{\lambda=0} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Пятый параграф содержит в себе подробное описание численного алгоритма, в том числе алгоритм построения пошагового решения задачи и нахождения границы с помощью экстраполяции.

Зададим в исследуемой области  $\Omega$  конечно-разностную сетку, удобную для вычисления частных производных, такого порядка, которого требует поставленная задача. Как правило это равномерная и ортогональная сетка. Для границ области  $\Omega$ , если они не попали на введённую сетку, приходится вводить дополнительные узлы. Узлы вводятся на пересечениях линий введённой конечно-разностной сетки и границы. Введём последовательность шагов  $\Delta\lambda^k$  по параметру  $\lambda$ , где  $k$  - номер шага. В общем случае шаг по параметру может вычисляться непосредственно в ходе алгоритма, основываясь, например, на оценке вычислительной погрешности задачи Коши.

На нулевом шаге по параметру рассматриваем недеформированное состояние. Следовательно, величины  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  и  $\mathbf{u}$  - известны. Переменные  $E_x, E_y, E_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  будем считать промежуточными и использовать только для удобства записи. Но, даже не смотря на это вычислить их значения можно по приведенным выше формулам непосредственно через компоненты тензора деформации  $\varepsilon$ . Аппроксимируя на введённой конечно-разностной сетке частные производные по координатам от переменных  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$ , получим, вместо дифференцированной по введённому параметру системы (2)–(5), систему линейных алгебраических уравнений. Численное решение этой системы производится различными методами вычислительной алгебры.

Полученные величины  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\varepsilon}$  и  $\dot{\mathbf{u}}$  подставляются в правые части задачи Коши (6). Так как это первый шаг по параметру  $\lambda$ , то приходится использовать менее точные методы интегрирования начальной задачи, например, метод Эйлера:

$$\begin{aligned}\sigma^1 &= \sigma^0 + \Delta\lambda^0 \dot{\sigma}^0, \\ \varepsilon^1 &= \varepsilon^0 + \Delta\lambda^0 \dot{\varepsilon}^0, \\ \mathbf{u}^1 &= \mathbf{u}^0 + \Delta\lambda^0 \dot{\mathbf{u}}^0.\end{aligned}$$

Теперь требуется определить положение границы, что можно сделать с помощью экстраполяции (см. Рис. 1а). Зная положение некоторой точки  $(x_{i,j}^1)$  и близлежащих точек вдоль выбранной  $j$ -й координатной линии  $(x_{i+1,j}^1, x_{i-1,j}^1, \dots)$  на первом шаге, можно найти функцию соответствия между начальным, т.е. до начала процесса деформирования, положением этих точек  $(\tilde{x}_{i,j}^0, \tilde{x}_{i+1,j}^0, \tilde{x}_{i-1,j}^0, \dots)$  и найденным на первом шаге  $x_{i,j}^1 = \varphi(\tilde{x}_{i,j}^0)$ . Экстраполируя начальные значения точек (см. Рис. 1б), можно найти ту граничную точку  $(\tilde{x}_{\Gamma^0(j),j}^0)$ , которая на первом шаге попала на пересечение  $j$ -й координатной линии и границы  $(x_{\Gamma^1(j),j}^1)$ , где  $\Gamma^i(\cdot)$  - это массив граничных индексов на  $i$ -м шаге. Для нахождения границы на  $j$ -й координатной линии нужно подставить точку  $\tilde{x}_{\Gamma^0(j),j}^0$  в найденную функцию  $\varphi$ . Таким образом, можно найти форму границы на первом шаге по  $\lambda$ . Для поиска значений искомым величин  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  и  $\mathbf{u}$  на границе можно поступить аналогично. Приведенный подход к поиску границы с помощью экстраполяции



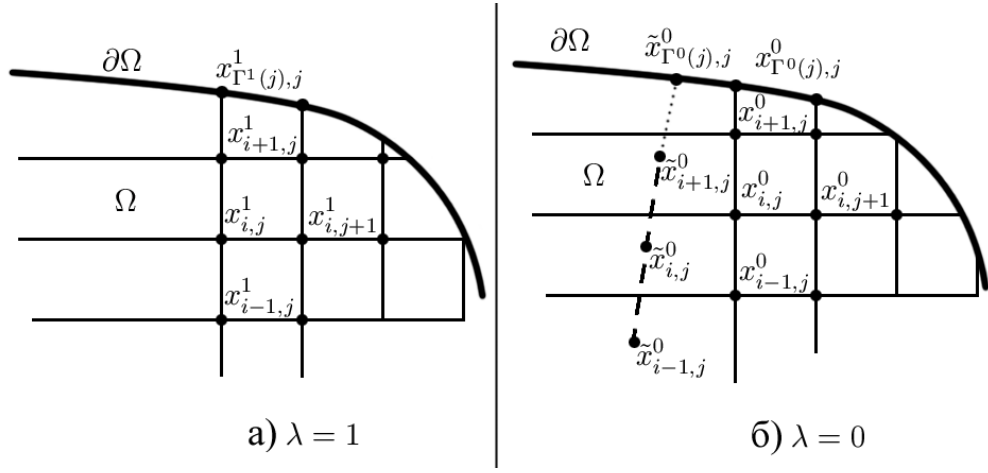


Рис. 1: Экстраполяция

легко обобщается и на трехмерный случай. В случае если граница уменьшилась, то требуется убрать регулярные ячейки в сетке. Для этого чтобы найти значение координат границы можно аналогично провести операцию аппроксимации, достаточно схожую с описанным выше алгоритмом экстраполяции.

После вычисления границы и значения искоемых переменных  $\vec{\sigma}$ ,  $\vec{\varepsilon}$ ,  $\vec{u}$  в её узлах можно переходить к следующему шагу по параметру  $\lambda$ .

Во **второй главе** рассматривается одномерная задача.

В первом параграфе описываются постановка задачи и вывод аналитического решения.

Рассматривается деформирование одномерного стержня, один конец которого закреплен, а к другому приложена некая нагрузка  $\sigma$ . Получается следующая краевая задача:

$$\frac{d\sigma_{xx}}{dx} + f_x = 0, \quad \varepsilon_{xx} = \left(1 - \frac{du}{dx}\right) \frac{du}{dx}, \quad \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx}$$

с граничными условиями  $u(0) = 0$ ,  $\sigma_{xx}(x_\Gamma) = \sigma$ .

Такая постановка позволяет найти точное решение при  $f_x = 0$ . Уравнения (2)-(5) для одномерной задачи можно свести к одному дифференциальному уравнению с граничными условиями. Выражая последовательно напряжение и тензор деформаций, получим следующую краевую задачу относительно перемещения  $u$

$$\left(1 - \frac{du}{dx}\right) \frac{d^2U}{dx^2} - \frac{d^2u}{dx^2} \frac{dU}{dx} = 0,$$

с граничными условиями

$$U|_{x=0} = 0, \quad \frac{dU}{dx}|_{x=x_\Gamma} = \frac{\dot{\sigma}}{\left(1 - \frac{du}{dx}|_{x=x_\Gamma}\right) E},$$

где  $u$  находится из начальной задачи

$$\frac{du}{d\lambda} = U, \quad u|_{\lambda=0} = u^{(0)}. \quad (7)$$

Второй параграф посвящен построению численного алгоритма.

Пусть параметр будет равен нагрузке  $\lambda = \sigma$ , это скажется только на краевых условиях  $\dot{\sigma} = 1$ .

Для решения будем использовать конечно-разностный метод. Производные, входящие в краевую задачу, аппроксимируются на трехточечном шаблоне, следовательно, задача сводится к решению алгебраической системы уравнений с трехдиагональной матрицей, решение которой можно найти методом прогонки.

По найденным скоростям  $U$  из начальной задачи (7) находятся сами перемещения  $u$ . Решение начальной задачи на конечно-разностной сетке можно найти, например, методом Эйлера. Поскольку задача ставилась в координатах Эйлера, то при удлинении исследуемый образец вышел за пределы введённой в начале вычислений сетки, поэтому требуется ввести дополнительную эйлерову координату, соответствующую правому краю стержня. Для её вычисления приходится пользоваться экстраполяцией. Функцию, по которой приходится экстраполировать, можно составить, например, линейной аппроксимацией по нескольким найденным точкам. Тогда можно вычислить перемещение граничной точки. При линейной аппроксимации нахождение граничной точки будет выглядеть так:

$$u_{\Gamma}^1 = \frac{x_{\Gamma}^0}{x_{N_0}^1} u_{N_0}^1,$$

где верхний индекс – номер шага по параметру, а нижний – позиция точки.

Вычисляется перемещение граничной точки, при необходимости сетка равномерно дополняется новыми ячейками с шагом  $h$ . Заметим, что по сути этот процесс является аппроксимацией.

Далее процесс повторяется: решается краевая задача уже на следующем шаге по параметру.

В третьем параграфе анализируются численные результаты.

На рис. 2. демонстрируется зависимость относительной ошибки  $\frac{\Delta L}{L}$  от нагрузки, приложенной к правому концу стержня. Также там продемонстрировано, как влияет шаг по параметру на точность вычислений. Из рисунка можно оценить точность вычислений по параметру  $\lambda - O(\Delta\lambda)$ . Для получения одного и того же удлинения было просчитано 10, 25, 50 и 100 шагов по параметру. Заметим, что при этом сетка не перестраивалась, точки сетки только добавлялись по мере надобности. В конце вычислений во всех случаях в сетке было одинаковое количество ячеек.

В ходе алгоритма в конце каждого шага приходится экстраполировать. Было рассмотрено несколько алгоритмов экстраполяции, в том числе линейная, кубическая, метод наименьших квадратов (линейное и квадратичное усреднение) и др. Численные эксперименты показали, что выбор

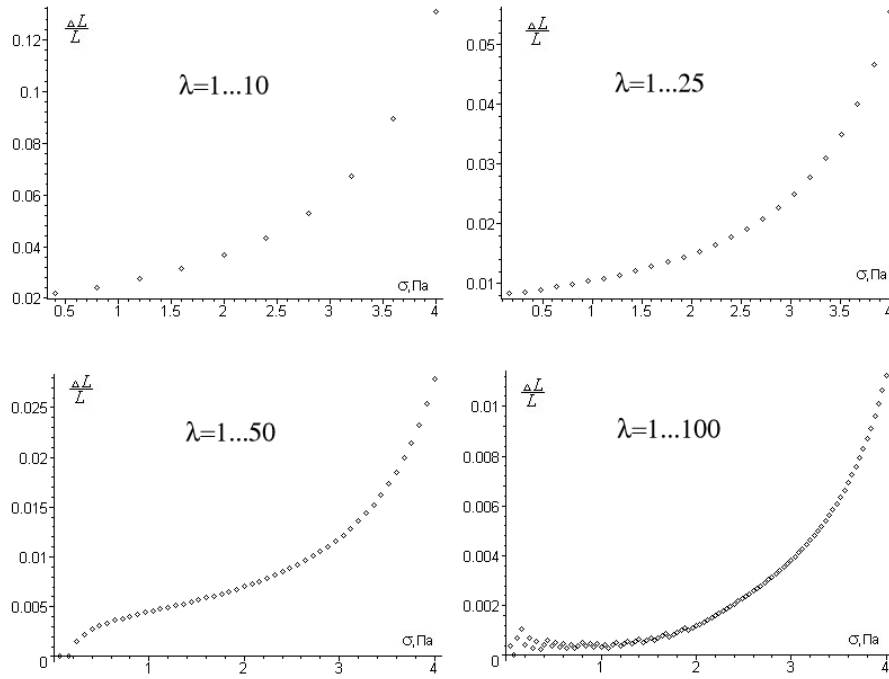


Рис. 2: Относительная ошибка

метода не принципиален. Линейное усреднение показало немного лучший результат, чем остальные. Отличие между ними было не более чем  $O(h^2)$ , где  $h$  – шаг сетки. Это можно объяснить тем, что точное решение является линейной зависимостью перемещения от лагранжевой координаты.

Аппроксимация для добавления новой ячейки в сетку была реализована различными подходами: линейная и кубическая аппроксимации и метод наименьших квадратов. Все они показали одинаковые результаты с точностью  $O(h^2)$ .

**В третьей главе** решается несколько двумерных задач.

Первый параграф описывает постановку задачи равномерного деформирования в плосконапряжённом состоянии (т. е.  $\sigma_{zz} = 0, \varepsilon_{zz} \neq 0$ ). Это модельная задача, допускающая точное решение. Исследуется напряженно деформированное состояние двумерной прямоугольной упругой области  $\Omega$ , два смежных края которой закреплены по нормальным перемещениям и свободны по тангенциальным. Два других края свободны ( $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$ ), причём к  $\partial\Omega_1$  приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $\sigma$  (См. Рис. 3):

$$\begin{aligned}
 x = 0, & & u = 0; & & \varepsilon_{xy} = 0, \\
 M \in \partial\Omega_1, & & \sigma_{xx} = \sigma; & & \varepsilon_{xy} = 0, \\
 y = 0, & & v = 0; & & \varepsilon_{xy} = 0, \\
 M \in \partial\Omega_2, & & \sigma_{yy} = 0; & & \varepsilon_{xy} = 0,
 \end{aligned}$$

где  $M$  – точка границы области.

Аналитическое решение для такой задачи, при учете геометрически нелинейных соотношений, будет выглядеть следующим образом

$$u_{\Gamma} = \frac{\sigma}{E} L_x \quad v_{\Gamma} = -\frac{\mu\sigma}{E} L_y,$$

где  $L_x$  и  $L_y$  - начальные длины пластины по соответствующим осям.

Во втором параграфе описывается численная реализация поставленной задачи. Алгоритм крайне схож с одномерной задачей, но с некоторыми особенностями. Полученная система линейных дифференциальных уравнений в ходе дискретизации производных описывается матрицей общего типа. Для поиска границы приходится использовать описанный выше алгоритм экстраполяции.

На рис. 3 можно видеть последовательные состояния деформирования пластины с увеличением нагрузки  $\sigma$ . Как видно из иллюстрации, в конечном состоянии пластина увеличилась более чем в два раза по оси, к которой приложена нагрузка. Заметим, что достигнуть таких больших перемещений позволяет использование точных геометрических соотношений. Начальное разбиение пластины состояло из 6 элементов по каждой из осей. В начальную сетку было добавлено 7 элементов по оси  $x$ . При подходе Лагранжа в этом случае начальная сетка сильно вытянулась бы по одной из осей, а по другой наоборот, сильно сжалась, тем самым вместо введённой начальной ячейки получился бы сильно деформированный прямоугольник. В такой задаче лагранжевый подход без перестроения сетки может в разы уменьшить вычислительную устойчивость. Поскольку суще-

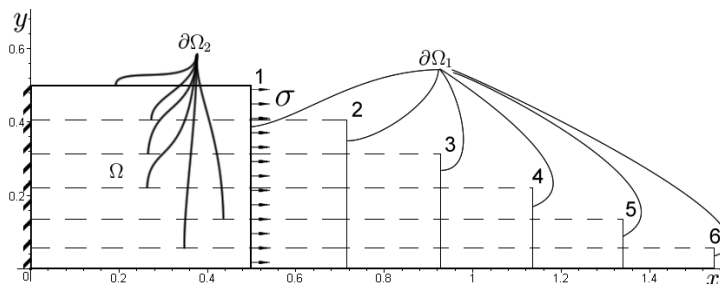


Рис. 3: Последовательность состояний при равномерном деформировании

существует точное решение, можно сравнить с ним найденное численное. Рис.4 Показывает отличие численного решения относительно аналитического. Рис. 5 демонстрирует изменение относительной ошибки в ходе вычислений. Сильное увеличение погрешности в начале процесса демонстрирует сложность решения задачи Коши на начальном этапе и использование недостаточно точных методов вычислений для “разгона” пошагового алгоритма.

Третий параграф описывает задачу деформирования прямоугольной области с появлением эффекта Пуассона (см. рис. 6).

Рассматривается напряженно деформированное состояние прямоугольной области  $\Omega$ , у которой одна сторона закреплена, а к противоположной

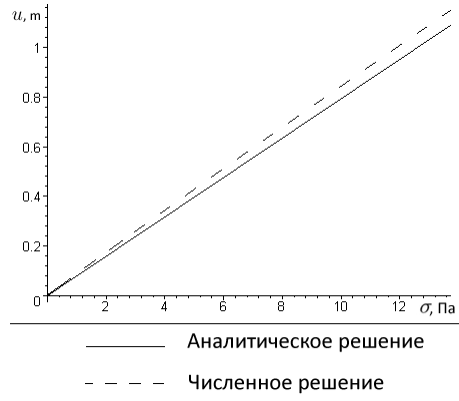


Рис. 4: Зависимость перемещения от приложенной нагрузки

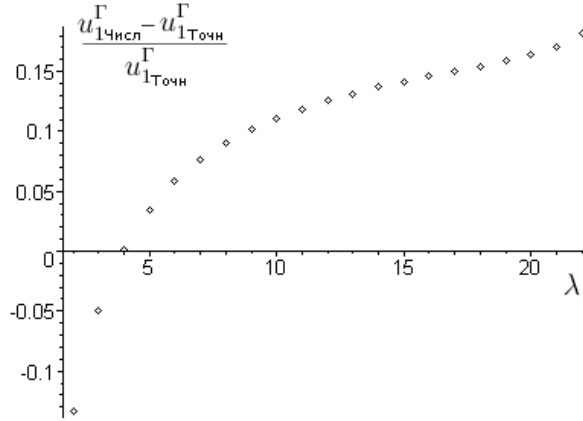


Рис. 5: Изменение относительной ошибки

( $\partial\Omega_1$ ) приложена равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $\sigma$ . И на обеих этих сторонах закреплены поперечные перемещения. Другие же две стороны  $\partial\Omega_2$  и  $\partial\Omega_3$  остаются свободными. В такой постановке в ходе процесса деформирования незакрепленные стороны пластины будут изгибаться, проявляя эффект, впервые замеченный Пуассоном. В такой постановке граничные условия будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x = 0, & \quad \dot{u}_1 = 0; \quad \dot{u}_2 = 0, \\
 M \in \partial\Omega_1, & \quad \sigma_{xx} = \sigma; \quad v = 0. \\
 M \in \partial\Omega_2, & \quad \mu E_x + (1 - \mu)E_y = 0; \quad \gamma_{xy} = 0. \\
 M \in \partial\Omega_3, & \quad \mu E_x + (1 - \mu)E_y = 0; \quad \gamma_{xy} = 0.
 \end{aligned}$$

Численный алгоритм решения задачи с появлением эффекта Пуассона полностью повторяет задачу равномерного деформирования прямоугольной области. Несмотря на сложную и изменяющуюся форму границы, была успешно применена линейная экстраполяция для нахождения граничных точек деформируемой области.

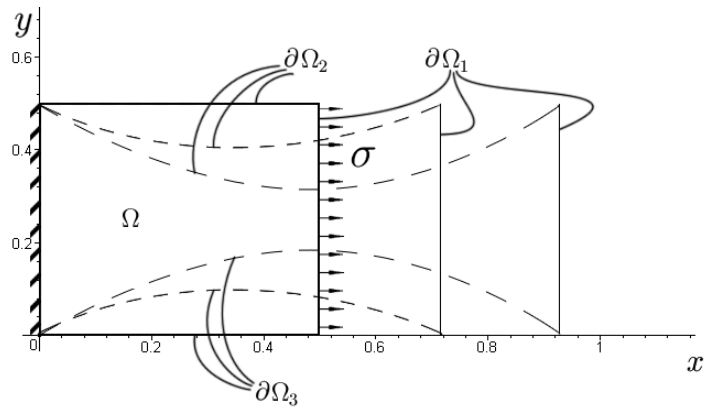


Рис. 6: Проявление эффекта Пуассона

Существует известный результат решения такой же задачи в координатах Лагранжа, там Дж. Оден<sup>1</sup> находил силу, необходимую для удлинения прямоугольной области в два раза и исследовал это значение силы в зависимости от числа ячеек в конечно-разностной сетке. Полученный автором график приведен на рисунке 7. Пунктирная линия – это график, полученный с помощью предлагаемого подхода. Как и в первоисточнике, использовалась абсолютно упругая модель ( $\mu = 0.5$ ) и минимальное количество промежуточных нагружений. В реализованном варианте было 2 шага по параметру. Полная нагрузка вычислялась как сумма нагрузок в каждом из узлов конечно-разностной сетки. Как видно из графика, достаточная точность для метода Лагранжа достигается только на более чем 16-ти элементах. Пунктирная линия, т.е. метод Эйлера, уже начиная с 4-х элементной сетки, показывает результат аналогичной точности. А на 16-ти узлах точность предлагаемого алгоритма соизмерима с Лагранжевой сеткой с 32-мя узлами. В общем, как и следовало ожидать, в случае использования координат Эйлера требуется менее насыщенная сетка для достижения требуемой точности.

**Четвертая глава** посвящена решению трехмерной задачи.

В первом параграфе описывается постановка задачи.

Рассмотрим напряженно деформированное состояние трехмерной области (см. рис. 8). Опишем модельную задачу, допускающую точное решение и которая схожа с задачей равномерного деформирования в двумерном случае. Пусть грани лежащие в плоскостях  $XOZ$ ,  $XOY$  и  $YOZ$  будут закреплены по отношению к нормальным перемещениям и свободны относительно тангенциальных. Остальные грани ( $\partial V_1$ ,  $\partial V_2$ ,  $\partial V_3$ ) пусть будут свободные кроме  $\partial V_1$ , лежащей в плоскости  $x = a$  до начала процессе деформирования, к которой приложена равномерно распределенная нагрузка  $\sigma$ .

<sup>1</sup>Оден Д. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

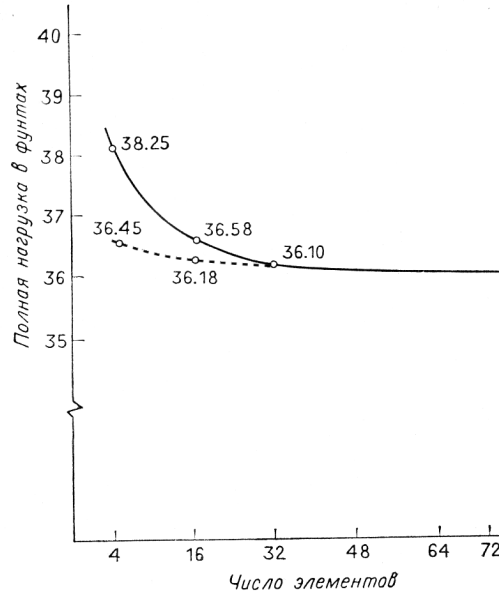


Рис. 7: Зависимость полной нагрузки от числа элементов при растяжении квадратного листа

Запишем эти граничные условия

$$\begin{aligned}
 x = 0, & \quad u = 0; \quad \varepsilon_{xy} = 0; \quad \varepsilon_{xz} = 0, \\
 M \in \partial V_1, & \quad \sigma_{xx} = \sigma; \quad \varepsilon_{xy} = 0; \quad \varepsilon_{xz} = 0, \\
 y = 0, & \quad v = 0; \quad \varepsilon_{xy} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = 0, \\
 M \in \partial V_2, & \quad \sigma_{yy} = 0; \quad \varepsilon_{xy} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = 0, \\
 z = 0, & \quad w = 0; \quad \varepsilon_{xz} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = 0, \\
 M \in \partial V_3, & \quad \sigma_{zz} = 0; \quad \varepsilon_{xz} = 0; \quad \varepsilon_{yz} = 0,
 \end{aligned}$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  – перемещения по осям  $x$ ,  $y$  и  $z$ , соответственно.

Аналогично предыдущим модельным задачам, используются уравнения (2)–(5). Для данных краевых условий существует аналитическое решение задачи

$$u_{\Gamma} = \frac{\sigma}{E} L_x, \quad v_{\Gamma} = -\frac{\mu\sigma}{E} L_y, \quad z_{\Gamma} = -\frac{\mu\sigma}{E} L_z,$$

где  $L_x$ ,  $L_y$  и  $L_z$  - начальные длины трехмерной области по соответствующим осям.

Второй параграф посвящён численным исследованиям.

Численный алгоритм строится следующим образом: сперва решается краевая задача. Решение краевой задачи, так же как и в двумерной задаче, основано на конечно-разностном методе. Производные первого порядка аппроксимируются на трехточечном шаблоне. Производные второго порядка определяются через производные первого порядка. Дискретизация

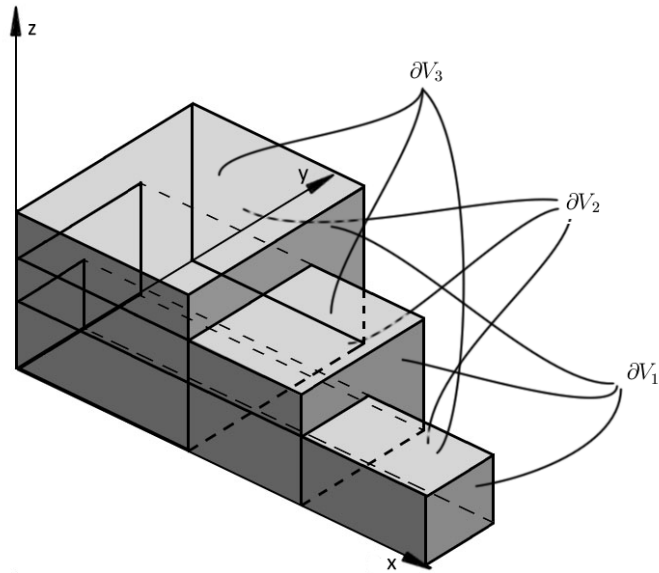


Рис. 8: Последовательное равномерное деформирование трехмерной области.

производных, входящих в краевую задачу, позволяет свести линейную систему дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений.

Далее по найденным значениям производных от неизвестных по параметру находятся значения непосредственно искомых величин. Для этого решается начальная задача. Решение начальной задачи производится методом Эйлера и модифицированным методом Эйлера-Коши. По найденным перемещениям находится граница занимаемой области после деформирования, для этого добавляются или убираются элементы у конечно-разностной сетки.

Рис. 9 демонстрирует изменение относительной ошибки с каждым шагом по параметру  $\lambda$ .

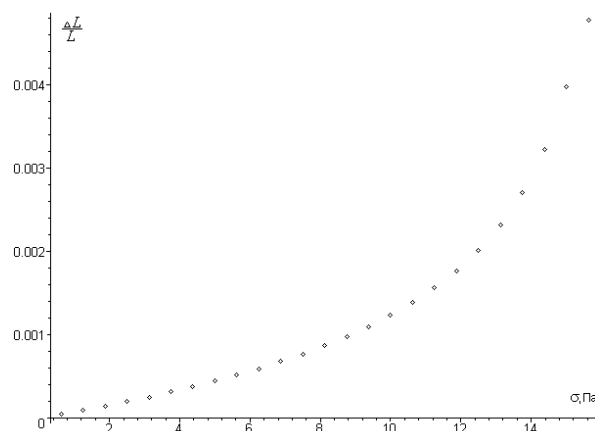


Рис. 9: Относительная ошибка вычислений



## ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные результаты можно сформулировать следующим образом:

1. Разработан алгоритм, позволяющий решать статические задачи механики твердого деформированного тела в координатах Эйлера с помощью метода продолжения решения по параметру.
2. Разработан алгоритм моделирования больших перемещений и деформирования упругих тел в переменных Эйлера.
3. Разработан алгоритм вычислений границы деформированной области в координатах Эйлера с помощью экстраполяции.
4. Исследованы различные варианты выбора параметра и показана их эффективность.
5. Разработан программный комплекс для представленного алгоритма.
6. Результаты, полученные в ходе численных расчётов, согласуются с аналитическими с наперёд заданной точностью.

Соискатель выражает глубокую и искреннюю благодарность консультанту – профессору Шалашилину Владимиру Ивановичу за его идеи, сильно повлиявшие на ход исследования, и за активное обсуждение работы, а так же научного руководителя – Кузнецова Евгения Борисовича за увлекательный многолетний совместный труд.

## СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК

1. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Численное моделирование задачи сильного нелинейного деформирования в координатах Эйлера // Математическое моделирование Т.20. № 3. 2008. с. 17-28.
2. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Численное решение задачи сильного нелинейного деформирования в координатах Эйлера // Ученые записки Казанского государственного университета том 149. кн. 4. 2007. с 45-57.

### Публикации в других изданиях

3. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Об использовании координат Эйлера при численном решении задач нелинейного деформирования // Труды Средневолжского математического общества. 2005 Т.7 №1. с. 239-245.
4. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Применение метода продолжения решения по параметру при численном решении плоской задачи сильного нелинейного деформирования в координатах Эйлера // Избранные проблемы прочности современного машиностроения. Сборник научных статей, посвященный 85-летию член-корр. РАН Э.И. Григолюка. Москва. Физматлит 2008 с. 24-32.
5. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. О применении метода продолжения решения по параметру в координатах Эйлера // Материалы

XI Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. Изд-во МАИ. 2005. с. 42.

6. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Решение задач сильного нелинейного деформирования в эйлеровых координатах // Тезисы докладов XXI Международной конференции “Математическое моделирование в механике сплошных сред. Методы граничных и конечных элементов”, СПб.: ВВМ. Изд-во СПб. гос. ун-та, 2005. С.7-8.

7. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Использование координат Эйлера при больших деформациях твердых тел // Материалы XII Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. М.: Изд-во МАИ, 2006 с. 16.

8. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Решение задач нелинейного деформирования с использованием эйлеровых координат // IX Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов. Т. III. Изд-во Нижегородского государственного университета им. Лобачевского. 2006. с. 9.

9. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Задача сильного деформирования в плоском случае // Материалы XIII международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. Изд-во МАИ. 2007. с. 16-17.

10. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Использование координат Эйлера в численном решении краевых задач сильного нелинейного деформирования // Тезисы XXII международной конференции “Математическое моделирование в механике деформируемых тел и конструкций. Методы граничных и конечных элементов”. Изд-во НИЦ “Моринтех”. 2007. с. 12-14.

11. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Большие перемещения и деформации материалов со сложной реологией // Сборник тезисов докладов международной конференции IX Харитоновские тематические научные чтения “Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны”. Саров: ФГУП “РФЯЦ - ВНИИЭФ” 2007. с.219 - 220.

12. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Численное решение задачи сильного нелинейного деформирования в переменных Эйлера // Материалы VII международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях. М.: Изд-во МГУ, 2008. с.29-30.

13. Агапов М.С., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. Задачи сильного деформирования в плоском случае // Материалы XIV Международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. Т.1. М.: “ИД МЕДПРАКТИКА-М”, 2008. с. 5-6.