УДК 531.391:521.93

Приближенное решение задачи Лиувилля в переменных действие-угол для задачи Эйлера-Пуансо

Баркин М.Ю.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

e-mail: barkin@yandex.ru

Аннотация.

Исследуется возмущенное вращательное движение изолированного небесного тела с изменяемой геометрией масс в постановке Лиувилля, но на основе уравнений движения в переменных действие – угол для задачи Эйлера - Пуансо. Построены уравнения движения в указанных переменных и методом малого параметра получено их приближенное решение. Предполагается, что тело испытывает малые изменения геометрии масс.

Ключевые слова: переменные действие-угол, невозмущенное движение Эйлера – Пуансо, задача Лиувилля, ряды Фурье, эллиптический интеграл

Введение

В данной работе дается решение задачи Лиувилля о вращательном движении тела с изменяемой геометрией масс на основе уравнений вращательного движения небесного тела в переменных действие-угол, введенных на основе решения задачи Эйлера - Пуансо. Полученные результаты представляют важный интерес для исследований в небесной механике и геодинамике. Они позволяют выявить новые эффекты в движении полюса и в суточном вращении планет и астероидов. В первую очередь эти результаты представляют интерес для исследования влияния перераспределения масс небесных тел на движение их полюсов и на осевое суточное вращение, что является очень важным в задачах навигации. Введение переменных действие-угол дается в известных статьях Садова [1], Киношита [2], Козлова [3] и др.. Мы используем эти результаты, включая вопросы построения рядов Фурье для направляющих косинусов [1], их произведений и квадратов [4], [5]. Последние результаты являются важными для вывода уравнений движения в переменных действие-угол и для построения аналитического решения задачи Лиувилля методами теории возмущений.

Постановка задачи. Переменные действие-угол

Для описания вращательного движения тела с изменяемой геометрией масс введем следующие системы координат. $OXYZ$ - декартовая система координат с началом в центре масс тела и с осями, сохраняющими фиксированные направления в пространстве. В случае вращения Земли в качестве подобной системы координат обычно выбирается геоцентрическая эклиптическая система координат данной эпохи (например, ITRF 2000). $O\xi\eta\zeta$ - главные центральные оси инерции изменяемой планеты, а $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ - главные центральные оси инерции планеты, если пренебрегаем какими-либо вариациями ее динамического строения. В общем случае система координат $O\xi\eta\zeta$ совершает определенные движения по отношению к базовой системе координат планеты $O\xi_0\eta_0\zeta_0$. Введем обозначения: A_0, B_0 и C_0 - главные центральные моменты инерции планеты, если пренебречь какими – либо ее изменениями (назовем ее модельной планетой). Эти моменты инерции в общем случае учитывают постоянные составляющие, обусловленные вращательной деформацией планеты. Для определенности полагаем $C_0 > B_0 > A_0$ (C_0 - полярный момент инерции, соответствующий оси инерции $C\zeta_0$; B_0 и A_0 - моменты инерции, соответствующие экваториальным осям инерции недеформированного тела $O\xi_0$ и $O\eta_0$). Для простоты будем считать, что центр масс изменяемой планеты (с переменными моментами инерции) совпадает с центром масс модельной планеты (с постоянными главными моментами инерции).

Будем изучать вращательное движение слабодеформируемого тела с произвольными осевыми моментами инерции A, B и C:

$$A = A_0 + \delta A \ , \quad B = B_0 + \delta B \ , \quad C = C_0 + \delta C \ ,$$

и с малыми произведениями инерции, $D = \delta D$, $E = \delta E$, $F = \delta F$.

δA , δB ,..., δF являются малыми величинами по сравнению с моментами инерции A_0 , B_0 и C_0 (для Земли они имеют порядок 10^{-10}) и они предполагаются известными функциями времени. В нашей работе эти вариации представляются либо тригонометрическими функциями времени (например, с годовыми и полугодовыми периодами) либо линейными функциями времени, описывающими медленные вековые изменения планеты (ее тензора инерции и относительного кинетического момента). Обозначим проекции вектора относительного кинетического момента через $P = \delta P$, $Q = \delta Q$ и $R = \delta R$. По условию задачи они являются заданными функциями времени.

В качестве невозмущенного движения примем движение твердого тела по Эйлеру - Пуансо. На данном этапе исследования пренебрежем деформациями, вызванными собственным вращением тела. Подчеркнем, что изменяемое тело имеет произвольные динамические сжатия (произвольные значения моментов инерции). В данной работе все три осевых момента инерции являются произвольными. Это позволило упростить исследование и аналитические построения и дало возможность для полного и детального описания кинематических и динамических эффектов в возмущенных вращательных движениях. Также используется широкий набор формул невозмущенного вращательного движения Эйлера, в частности известные результаты Садова [40] и другие важные исследований этой проблемы ([2], [5]) и др.

Переменные действие-угол в задаче Эйлера - Пуансо обозначим как I_i, $\varphi_i \ (i=1,2,3)$ и введем их в рассмотрение с помощью формул канонического преобразования, полученных в работах ([2], [5],):

$$L = G\frac{\pi k}{\mathbf{K}\sqrt{k^2+\lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos 2m\varphi_1}{\operatorname{ch} 2md}(1+\delta_{mo})^{-1}, \quad G = I_2, \qquad H = I_3, \tag{1}$$

$$l = \varphi_1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{ch} m\sigma}{m\operatorname{ch} 2md}\sin 2m\varphi_1, \quad g = \varphi_2 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sh} m\sigma}{m\operatorname{sh} 2md}\sin 2m\varphi_1, \quad h = \varphi_3,$$

где $\delta_{00}=1$, $\delta_{m0}=0 \ (m\geq 1)$,

$$d = \frac{\pi\mathbf{K}(\lambda')}{2\mathbf{K}(\lambda)}, \qquad \sigma = \frac{\pi}{2\mathbf{K}(\lambda)}F\left(\operatorname{arctg}\frac{k}{\lambda}, \lambda'\right), \qquad \lambda' = \sqrt{1-\lambda^2}\,. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{K}(\lambda)$ и F - полный и неполный эллиптические интегралы первого сорта [6]. Модуль этих интегралов λ и параметр k определяются формулами:

$$\lambda^2 = k^2\frac{A_0^2}{C_0^2}\frac{p_0^2}{r_0^2}, \qquad k^2 = \frac{C_0(A_0-B_0)}{A_0(B_0-C_0)}, \tag{3}$$

где p_0, r_0 $(q_0 = 0)$ - начальные значения компонент угловой скорости для принятого момента времени.

Наряду с формулами невозмущенного движения в виде рядов (1) – (3) приведем аналогичные выражения в эллиптических функциях [1]:

$$L = I_2 \kappa \frac{\mathrm{dn}\left(\dfrac{2\mathbf{K}}{\pi}\varphi_1\right)}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}, \quad G = I_2, \quad H = I_3, \quad h = \varphi_3, \tag{4}$$

$$g = \varphi_2 + \frac{\sqrt{\left(1+\kappa^2\right)\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}}{\kappa}\left[\frac{2\varphi_1}{\pi}\mathbf{\Pi}\left(\frac{\pi}{2},\kappa^2,\lambda\right) - \Pi\left(\mathrm{am}\left(\frac{2\mathbf{K}}{\pi}\varphi_1\right),\kappa^2,\lambda\right)\right],$$

где u - аргумент эллиптических функций,

$$u = \frac{2\mathbf{K}(\lambda)}{\pi}\varphi_1. \tag{5}$$

$\mathbf{\Pi}\left(\pi/2,\kappa^2,\lambda\right)$ и $\Pi\left(z,\kappa^2,\lambda\right)$ ($z = \mathrm{am}\,u$) - полный и неполный эллиптический интеграл третьего рода [6].

Угловые переменные φ_1 и φ_2 в невозмущенном движении являются линейными функциями времени:

$$\varphi_1 = n_1 t + \varphi_1^{(0)}, \qquad \varphi_2 = n_2 t + \varphi_2^{(0)}, \tag{6}$$

где n_1 и n_2 - частоты невозмущенного эйлеровского движения

$$n_1 = \frac{I_2(A-C)}{2AC}\frac{\pi\kappa}{\sqrt{\left(1+\kappa^2\right)\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}\mathbf{K}(\lambda)}, \tag{7}$$

$$n_2 = \frac{I_2}{C}\left[1 - \frac{A-C}{A}\frac{\mathbf{\Pi}\left(\pi/2,\kappa^2,\lambda\right)}{\mathbf{K}(\lambda)}\right]. \tag{8}$$

Индекс $^{(0)}$в (6) означает начальные значения соответствующих переменных; n_1 и n_2 - частоты задачи Эйлера-Пуансо. Формулы (7), (8) определяют частоты задачи

Эйлера-Пуансо для движений в областях I, II как функции частоты I_2/C, параметров задачи λ,κ и динамического сжатия $(A-C)/A$: $n_i = n_i\left(\frac{I_2}{C},\frac{A-C}{A},\lambda,\kappa\right)$ $(i=1,2)$. p_0, $q_0 = 0$,

r_0 - начальные значения компонент угловой скорости p, q и r, соответственно.

Уравнения движения в переменных действие-угол

В переменных действие-угол I_i, φ_i $(i=1,2,3)$ уравнения вращательного движения слабодеформируемого тела можно записать в виде [7]:

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial I_i}, \qquad \frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \varphi_i} \quad (i=1,2,3) \tag{9}$$

$$K = K_0(I_1, I_2) + K_1(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, t). \tag{10}$$

Здесь H_0 гамильтониан невозмущенного движения [1],

$$K_0 = \frac{I_2^2}{2A}\left(1 + \frac{A-C}{C}\cdot\frac{k^2}{\lambda^2+k^2}\right), \tag{11}$$

а H_1 - возмущающая функция, обусловленная временными вариациями геометрии масс планеты [8],

$$K_1 = K_1^{(1)} + K_1^{(2)} + K_1^{(3)}, \tag{12}$$

$$K_1^{(1)} = \frac{1}{2IC_0}\left[\left(\frac{1}{3}G^2 - L^2\right)\delta J_2 - 2\delta C_{22}\left(G^2 - L^2\right)\cos 2l\right], \tag{13}$$

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{2IC_0}\left[2\delta S_{22}\left(G^2-L^2\right)\sin 2l + 2\delta C_{21}\sqrt{G^2-L^2}\,L\sin l + 2\delta S_{21}\sqrt{G^2-L^2}\,L\cos l\right], \tag{14}$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{1}{C_0}\left[\left(\delta P\sin l + \delta Q\cos l\right)\sqrt{G^2-L^2} + L\delta R\right]. \tag{15}$$

Все составляющие гамильтониана (12), (13) – (15) здесь записаны в переменных Андуайе L, G и l. Однако, эти составляющие гамильтониана должны быть представлены функциями переменных действие-угол. Это может быть сделано с помощью формул (1) и широкого ряда формул невозмущенного эйлеровского движения, полученных в [5]. В частности важное прикладное значение здесь имеют ряды Фурье для направляющих косинусов a_{ij}, для их взаимных произведений и квадратов и др. Именно эти комбинации направляющих косинусов фигурируют в выражениях (11) – (14). Последние формулы приведены в работе [5] и мы будем ими пользоваться. Они приводятся ниже.

В первую часть возмущающего Гамильтониана (13) входят сомножителями следующие функции переменных Андуайе: $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta\cos 2l$. Во вторую часть возмущающего Гамильтониана сомножителями входят следующие функции переменных Андуайе:

$$\sin^2\theta\sin 2l\,,\quad \sin\theta\cos\theta\sin l\,,\quad \sin\theta\cos\theta\cos l\,.$$

Наконец в третью часть Гамильтониана (15) сомножителями входят: $\sin\theta\sin l$, $\sin\theta\cos l$, $\cos\theta$ или направляющие косинусы b_{31}, b_{32} и b_{33}. Выразим другие указанные выше сомножители через квадраты и произведения направляющих косинусов. В результате три слагаемых возмущающего Гамильтониана запишем следующим образом:

$$K_1^{(1)} = \frac{G^2}{2IC_0}\left[\left(\frac{1}{3} - b_{33}^2\right)\delta J_2 - 2\delta C_{22}\left(b_{32}^2 - b_{31}^2\right)\right], \tag{16}$$

$$K_1^{(2)} = \frac{G^2}{IC_0}\left(2\delta S_{22} b_{31} b_{32} + \delta C_{21} b_{31} b_{33} + \delta S_{21} b_{32} b_{33}\right), \tag{17}$$

$$K_1^{(3)} = -\frac{G}{C_0}\left(\delta P b_{31} + \delta Q b_{32} + \delta R b_{33}\right). \tag{18}$$

Таким образом, для построения уравнений движения (9) – (15) необходимо иметь ряды Фурье в переменных действие - угол для следующих направляющих косинусов, их произведений и квадратов:

$$b_{31}, b_{32},\ b_{33};\ \ b_{31}b_{32},\ b_{31}b_{33},\ b_{32}b_{33};\ b_{31}^2,\ b_{32}^2,\ b_{33}^2. \tag{19}$$

Для упрощения процедуры построения аналогичных рядов Фурье для составляющих возмущающей функции можно воспользоваться простыми геометрическими соотношениями для комбинаций направляющих косинусов:

$$b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 1, \qquad b_{31}b_{32} + b_{31}b_{33} + b_{32}b_{33} = 0. \tag{20}$$

Формулы для направляющих косинусов и компонент угловой скорости в эллиптических функциях

Пусть $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ декартовская система координат с осями направленными вдоль главных центральных осей инерции небесного тела в его недеформированном состоянии. Будем пренебрегать малыми эффектами, вызванными смещениями точки O относительно центра масс. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ - вектор угловой скорости вращения системы координат $O\xi_0\eta_0\zeta_0$ (с компонентами p, q и r в этих осях) по отношению к основной системе координат $OXYZ$, оси которой имеют фиксированные направления в пространстве. Пусть A_0, B_0 и C_0 - главные моменты инерции тела (в его недеформированном состоянии) относительно осей Ox, Oy и Oz.

Таким образом, базовыми переменными у нас являются канонические переменные Андуайе:

$$L, G, H, l, g, h. \tag{21}$$

Эти переменные связаны с вектором кинетического момента вращательного движения тела $\mathbf{G}$. Здесь L и H - проекции вектора $\mathbf{G}$ на оси Oz и OZ, введенных систем координат. Пусть переменные ρ и θ - углы, которые образует вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ с указанными координатными осями Oz и OZ. При этом: $L = G\cos\theta$ и $H = G\cos\rho$. Геометрический смысл других переменных Андуайе из (16) детально описан в работе [7].

Заметим, что формулы преобразования от переменных Андуайе к переменным “действие-угол” позволяют выразить компоненты угловой скорости тела p, q, r и направляющие косинусы его осей b_{ij} в переменных “действие - угол”: I_i, φ_i ($i = 1,2,3$). Уже отмечалось, что переменные действие-угол (для задачи Эйлера - Пуансо) вводились различными авторами. Среди этих работ выделяются статьи Садова [1] и Киношита [2].

Здесь наряду с указанными результатами Садова и Киношита используются результаты по рассматриваемой проблеме из статьи [5]. В этой работе был получен широкий набор результатов по исследованию невозмущенного эйлеровского движения. Эти результаты включают ряды Фурье в переменных действие-угол для канонических переменных Андуайе, для произведений и квадратов направляющих косинусов тела b_{ij} (определяющих ориентацию осей тела по отношению к промежуточной системе координат, связанной с вектором кинетического момента вращательного движения), для компонент угловой скорости p, q, r (а также их высших степеней); геометрическая и динамическая интерпретация свойств невозмущенного движения и т.д. Эти результаты составляют основу исследований данной статьи.

В невозмущенном движении переменные I_i ($i=1,2,3$), углы $\varphi_1^{(0)}$, $\varphi_2^{(0)}$ и φ_3 являются постоянными. Индекс $^{(0)}$ означает начальные значения соответствующих переменных; n_1 и n_2 - частоты задачи Эйлера-Пуансо. Постоянные значения переменных: $G=I_2$, $H=I_3$, $h=\varphi_3$ в невозмущенном движении характеризуют постоянство вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ деформируемого тела. Угол ρ между осью Oz с фиксированным направлением в пространстве и вектором $\mathbf{G}$ имеет постоянное значение $\rho=\rho_0$:

$$\cos\rho_0=\frac{I_3}{I_2}, \qquad \sin\rho_0=\frac{\sqrt{I_2^2-I_3^2}}{I_2}. \tag{22}$$

Модуль эллиптических функций и интегралов λ (3) определяется как функция переменных I_1, I_2 в результате обращения зависимости, построенной в работах Садова [1], Киношита [2], зависимости

$$\frac{I_1}{I_2}=\mathbf{\Lambda}(\lambda), \tag{23}$$

где

$$\mathbf{\Lambda}(\lambda)=\frac{2\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{\pi\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\left[\frac{\kappa^2+\lambda^2}{\kappa^2}\mathbf{\Pi}\left(\frac{\pi}{2},\kappa^2,\lambda\right)-\frac{\lambda^2}{\kappa^2}\mathbf{K}(\lambda)\right]. \tag{24}$$

По общей теории невозмущенного эйлеровского движения направляющие косинусы главных осей инерции планеты в базовой системе координат определяются следующими формулами [1]:

$$b_{11}=\cos g\cos l-\sin g\sin l\cos\theta=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u}}\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,\mathrm{sn}\,u\cos g+\mathrm{sign}\,L_0\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\sin g\right),$$

$$b_{21}=\sin g\cos l+\cos g\sin l\cos\theta=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u}}\left(\sqrt{1+\kappa^2}\,\mathrm{sn}\,u\sin g-\mathrm{sign}\,L_0\frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\cos g\right),$$

$$b_{31}=\sin\theta\sin l=\frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\mathrm{cn}\,u\,,$$

$$b_{12}=-\cos g\sin l-\sin g\cos l\cos\theta=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u}}\left(\mathrm{cn}\,u\cos g-\mathrm{sign}\,L_0\frac{\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\sin g\right),\qquad(25)$$

$$b_{22}=-\sin g\sin l+\cos g\cos l\cos\theta=$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1+\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u}}\left(\mathrm{cn}\,u\sin g+\mathrm{sign}\,L_0\frac{\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\cos g\right),$$

$$b_{32}=\sin\theta\cos l=-\frac{\lambda\sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\mathrm{sn}\,u\,,$$

$$b_{13}=\sin g\sin\theta=\frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\sqrt{1+\kappa^2 sn^2u}\,\sin g\,,$$

$$b_{23}=-\cos g\sin\theta=\frac{-\lambda}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\sqrt{1+\kappa^2\,\mathrm{sn}^2 u}\,\cos g\,,$$

$$b_{33}=\cos\theta=\frac{\mathrm{sign}\,L_0\kappa}{\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\mathrm{dn}\,u\,.$$

В (25) переменная g и аргумент u определяются формулами (4), (5).

Формулы (25) представляют направляющие косинусы осей тела b_{ij} как функции переменных φ_1, φ_2 и параметров λ, κ. С учетом зависимостей (1) - (8) можно говорить, что эти формулы выражают зависимость направляющих косинусов b_{ij} от переменных действие-угол: $I_i, \varphi_i \ (i = 1{,}2)$. Аналогичные представления в эллиптических функциях Якоби были получены для проекций угловой скорости [1]:

$$p = \frac{G}{A} \frac{\lambda}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \operatorname{cn} u \,,$$

$$q = -\frac{G}{B} \frac{\lambda \sqrt{1+\kappa^2}}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \operatorname{sn} u \,, \tag{26}$$

$$r = \frac{G}{C} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \operatorname{dn} u \,.$$

Ряды Фурье для направляющих косинусов b_{ij} по кратным переменных угол

Воспользуемся результатами известных и указанных выше работ [1] и др. и приведем следующие представления рядов Фурье для направляющих косинусов тела и для проекций угловой скорости его вращательного движения на лавные оси инерции. Для направляющих косинусов имеем следующие разложения для направляющих косинусов (в вещественной форме):

$$b_{11} = -\frac{\pi}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left[(2m+1)\varphi_1 + \varphi_2\right]}{\operatorname{sh}\left[(2m+1)d - \sigma\right]} + \frac{\sin\left[(2m+1)\varphi_1 - \varphi_2\right]}{\operatorname{sh}\left[(2m+1)d + \sigma\right]} \right\},$$

$$b_{21} = \frac{\pi}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\cos\left[(2m+1)\varphi_1 + \varphi_2\right]}{\operatorname{sh}\left[(2m+1)d - \sigma\right]} + \frac{\cos\left[(2m+1)\varphi_1 - \varphi_2\right]}{\operatorname{sh}\left[(2m+1)d + \sigma\right]} \right\},$$

$$b_{31} = \frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{ch}(2m+1)d} \,,$$

$$b_{22} = -\frac{\pi}{2\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\sin\left[(2m+1)\varphi_1 + \varphi_2\right]}{\operatorname{ch}\left[(2m+1)d - \sigma\right]} - \frac{\sin\left[(2m+1)\varphi_1 - \varphi_2\right]}{\operatorname{ch}\left[(2m+1)d + \sigma\right]} \right\},$$

$$b_{32} = -\frac{\pi}{\mathbf{K}} \sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{sh}(2m+1)d} \,, \tag{27}$$

$$b_{13}=\frac{\pi\kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\sin(2m\varphi_1+\varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md-\sigma)}+\frac{\sin(2m\varphi_1-\varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md+\sigma)}\right](1+\delta_{m0})^{-1},$$

$$b_{23}=-\frac{\pi\kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{\cos(2m\varphi_1+\varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md-\sigma)}-\frac{\cos(2m\varphi_1-\varphi_2)}{\operatorname{sh}(2md+\sigma)}\right](1+\delta_{m0})^{-1},$$

$$b_{33}=\frac{\pi\kappa}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos 2m\varphi_1}{\operatorname{sh} 2md}(1+\delta_{m0})^{-1},$$

$$b_{31}=\frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{ch}(2m+1)d},$$

$$b_{32}=-\frac{\pi}{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sin(2m+1)\varphi_1}{\operatorname{sh}(2m+1)d},$$

где $\delta_{00}=1,\quad \delta_{m0}=0$ at $m\geq 1$, а параметры $d=d(\lambda)$, $\sigma=\sigma(\lambda,\kappa)$ и $q=q(\lambda)$ определяются формулами (2) в терминах полных и неполных эллиптических интегралов первого рода. В невозмущенном эйлеровском движении $q,\sigma,\ \lambda$ - постоянные; φ_1, φ_2 - линейные функции времени (6) – (8).

Здесь будем использовать ряды Фурье для произведений и квадратов направляющих косинусов b_{ij} для построения тригонометрических разложений соответствующих составляющих возмущающего гамильтониана (16) – (18). Они также должны использоваться при построении аналогичных разложений силовой функции ньютоновского притяжения между Землей и Луной (а также Землей и Солнцем).

Ряды Фурье для произведений и квадратов направляющих косинусов $b_{ij}b_{nk}$

Ряды Фурье для произведений и квадратов направляющих косинусов b_{ij} были выведены в работах [5], . Они обладают следующей структурой:

$$b_{ij}b_{nk}=\sum b_{m_1,m_2}^{(i,j;n,k)}\begin{Bmatrix}\cos\left(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2\right)\\ \sin\left(m_1\varphi_1+m_2\varphi_2\right)\end{Bmatrix}. \qquad (28)$$

Причем все разложения содержат, либо только синусы, или только косинусы указанных в (28) аргументов. Коэффициенты рядов (28) выражаются через параметры λ и κ в терминах полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего сортов, а также через гиперболические функции двух аргументов d и σ, которые в свою очередь выражаются через полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго сортов (1) - (3).

Приведем явные выражения для вековых (постоянных) компонент указанных рядов:

$$b_{0,0}^{(1.1;1.1)}=\frac{\mathbf{K}\left(1+\kappa^2\right)-\mathbf{E}}{2\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \qquad b_{0,0}^{(1.2;1.2)}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\left(1+\kappa^2\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{K}\right)}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}\right],$$

$$b_{0,0}^{(1.3;1.3)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\kappa^2\mathbf{E}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}\right], \qquad b_{0,0}^{(2.1;1.2)}=-\frac{\pi\kappa}{4\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}},$$

$$b_{0,0}^{(2.1;2.1)}=\frac{\mathbf{K}\left(1+\kappa^2\right)-\mathbf{E}}{2\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \qquad b_{0,0}^{(2.2;1.1)}=\frac{\pi\kappa}{4\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}, \qquad (29)$$

$$b_{0,0}^{(2.2;2.2)}=\frac{1}{2}\left[1+\frac{\left(1+\kappa^2\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{K}\right)}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}\right], \qquad b_{0,0}^{(2.3;2.3)}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{\kappa^2\mathbf{E}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}\right],$$

$$b_{0,0}^{(3.1;3.1)}=\frac{\mathbf{E}-\lambda'^2\mathbf{K}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \quad b_{0,0}^{(3.2;3.2)}=-\frac{\left(1+\kappa^2\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{K}\right)}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \quad b_{0,0}^{(3.3;3.3)}=\frac{\kappa^2\mathbf{E}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}.$$

Выражения (24) и полные ряды (23) удовлетворяют известным геометрическим соотношениям между произведениями и квадратами направляющих косинусов. Аналогичные ряды были получены непосредственно для канонических переменных Андуайе (см. (1),(2)).

Чтобы записать уравнения движения в переменных действие-угол воспользуемся известными рядами Фурье для следующих направляющих косинусов b_{ij}, их квадратов и произведений, соответствующих рассматриваемому случаю вращения Земли [5]:

$$b_{31} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(31)} \cos(2m+1)\varphi_1, \qquad b_{2m+1,0}^{(31)} = \frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(2m+1)d},$$

$$b_{32} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(32)} \sin(2m+1)\varphi_1, \qquad b_{2m+1,0}^{(32)} = -\frac{\pi}{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh}(2m+1)d}, \tag{30}$$

$$b_{33} = b_{0,0}^{(33)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(33)} \cos 2m\varphi_1, \qquad b_{2m,0}^{(33)} = \frac{\pi\kappa}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch} md},$$

$$b_{0,0}^{(33)} = \frac{\pi\kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}.$$

Для квадратов направляющих косинусов имеем аналогичные ряды Фурье:

$$b_{31}^2 = b_{0,0}^{(31,31)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(31,31)} \cos 2m\varphi_1,$$

$$b_{0,0}^{(31,31)} = \frac{\mathbf{E}-\lambda'^2\mathbf{K}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \qquad b_{2m,0}^{(31,31)} = \frac{\pi^2}{\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md},$$

$$b_{32}^2 = b_{0,0}^{(32,32)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(32,32)} \cos 2m\varphi_1,$$

$$b_{0,0}^{(32,32)} = -\frac{\left(1+\kappa^2\right)\left(\mathbf{E}-\mathbf{K}\right)}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \quad b_{2m,0}^{(32,32)} = -\frac{\pi^2\left(1+\kappa^2\right)}{\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md}, \tag{31}$$

$$b_{33}^2 = b_{0,0}^{(33,33)} + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(33,33)} \cos 2m\varphi_1,$$

$$b_{0,0}^{(33,33)} = \frac{\kappa^2\mathbf{E}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \qquad b_{2m,0}^{(33,33)} = \frac{\pi^2\kappa^2}{\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md}.$$

Эти ряды удовлетворяют соответствующему соотношению из (20).

Приведем также аналогичные разложения для трех произведений направляющих косинусов: $b_{31}b_{32}$, $b_{31}b_{33}$, $b_{32}b_{33}$

$$b_{31}b_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m,0}^{(32,31)} \sin 2m\varphi_1 , \qquad b_{2m,0}^{(32,31)} = -\frac{\pi^2\sqrt{1+\kappa^2}}{\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{m}{\operatorname{ch} 2md} ,$$

$$b_{31}b_{33} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(33,31)} \cos\left(2m+1\right)\varphi_1 , \qquad b_{2m+1,0}^{(33,31)} = \frac{\pi^2\kappa}{2\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{sh}\left(2m+1\right)d} , \tag{32}$$

$$b_{32}b_{33} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1,0}^{(32,33)} \sin\left(2m+1\right)\varphi_1 , \qquad b_{2m+1,0}^{(32,33)} = -\frac{\pi^2\kappa\sqrt{1+\kappa^2}}{2\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{ch}\left(2m+1\right)d} ,$$

Ряд Фурье для гамильтониана задачи Лиувилля в переменных действие – угол

Рассмотрим первую часть возмущенного гамильтониана (16). Воспользуемся простыми соотношениями, которые следуют из приведенных выше рядов Фурье (30), (32):

$$b_{33}^2 - \frac{1}{3} = J_0 + \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m} \cos 2m\varphi_1 ,$$

$$J_0 = \frac{\kappa^2\mathbf{E}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} - \frac{1}{3}, \qquad J_{2m} = \frac{\pi^2\kappa^2}{\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md} ,$$

$$b_{32}^2 - b_{31}^2 = C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} \cos 2m\varphi_1 ,$$

$$C_0 = -\frac{\left(2+\kappa^2\right)\mathbf{E} - \left(1+\kappa^2+\lambda'^2\right)\mathbf{K}}{\mathbf{K}\left(\kappa^2+\lambda^2\right)}, \qquad C_{2m} = -\frac{\pi^2\left(2+\kappa^2\right)}{\mathbf{K}^2\left(\kappa^2+\lambda^2\right)} \cdot \frac{m}{\operatorname{sh} 2md} .$$

Для рассматриваемой части возмущающей функции получаем выражение

$$K_1^{(1)} = -\frac{1}{2IC_0} G^2 \left(J_0 \delta J_2 + 2C_0 \delta C_{22}\right)$$

$$-\frac{1}{2IC_0} G^2 \left(\delta J_2 \sum_{m=1}^{\infty} J_{2m} \cos 2m\varphi_1 + 2\delta C_{22} \sum_{m=1}^{\infty} C_{2m} \cos 2m\varphi_1\right).$$

Подставим теперь временные циклические вариации коэффициентов геопотенциала

$$\delta J_2 = \sum_N J_2^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}\right), \quad \delta C_{22} = \sum_N C_{22}^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}\right)$$

и окончательно получаем

$$K_1^{(1)} = -\frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_N \left[J_0 J_2^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}\right) + 2C_0 C_{22}^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}\right) \right]$$

$$-\frac{1}{2JC_0} G^2 \left(\sum_{m=1}^{\infty} \sum_N J_2^{(N)} J_{2m} \cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}\right) \cos 2m\varphi_1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \sum_N C_{22}^{(N)} C_{2m} \cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}\right) \cos 2m\varphi_1 \right)$$

или

$$K_1^{(1)} = -\frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_N \left[J_2^{(N)} J_0(\lambda) \cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}\right) + 2C_{22}^{(N)} C_0(\lambda) \cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}\right) \right] \tag{33}$$

$$-\frac{1}{4JC_0} G^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N \left\{ J_2^{(N)} J_{2m}(\lambda) \left[\cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1\right) + \cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1\right) \right] \right.$$

$$\left. +2C_{22}^{(N)} C_{2m}(\lambda) \left[\cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} + 2m\varphi_1\right) + \cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} - 2m\varphi_1\right) \right] \right\}.$$

Возмущения во вращении планеты, вызванные временными вариациями основных коэффициентов второй гармоники геопотенциала

Теперь вычисляем частные производные функции (33) по переменным действие-угол:

$$\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_2} = -\frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_N \left[\left(\frac{\partial J_0}{\partial I_2} + 2\frac{J_0}{G} \right) J_2^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)}\right) + 2\left(\frac{\partial C_0}{\partial I_2} + 2\frac{C_0}{G} \right) C_{22}^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)}\right) \right]$$

$$-\frac{1}{4JC_0} G^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N \left\{ J_2^{(N)} \left(\frac{\partial J_{2m}}{\partial I_2} + 2\frac{J_{2m}}{G} \right) \left[\cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1\right) + \cos\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1\right) \right] \right.$$

$$\left. +2C_{22}^{(N)} \left(\frac{\partial C_{2m}}{\partial I_2} + 2\frac{C_{2m}}{G} \right) \left[\cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} + 2m\varphi_1\right) + \cos\left(\omega_N t + \alpha_{22}^{(N)} - 2m\varphi_1\right) \right] \right\}, \tag{34}$$

$$\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial \varphi_1} = \frac{1}{2JC_0} G^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_N \left\{ m J_2^{(N)} J_{2m} \left[\sin\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} + 2m\varphi_1\right) - \sin\left(\omega_N t + \alpha_2^{(N)} - 2m\varphi_1\right) \right] \right.$$

$$+2mC_{22}^{(N)}C_{2m}\left[\sin\left(\omega_N t+\alpha_{22}^{(N)}+2m\varphi_1\right)-\sin\left(\omega_N t+\alpha_{22}^{(N)}-2m\varphi_1\right)\right]\Bigg\},$$

$$\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_1}=-\frac{1}{2JC_0}G^2\sum_N\left[\frac{\partial J_0}{\partial I_1}J_2^{(N)}\cos\left(\omega_N t+\alpha_2^{(N)}\right)+2\frac{\partial C_0}{\partial I_1}C_{22}^{(N)}\cos\left(\omega_N t+\alpha_{22}^{(N)}\right)\right]$$

$$-\frac{1}{4JC_0}G^2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_N\left\{J_2^{(N)}\frac{\partial J_{2m}}{\partial I_1}\left[\cos\left(\omega_N t+\alpha_2^{(N)}+2m\varphi_1\right)+\cos\left(\omega_N t+\alpha_2^{(N)}-2m\varphi_1\right)\right]\right.$$

$$\left.+2C_{22}^{(N)}\frac{\partial C_{2m}}{\partial I_1}\left[\cos\left(\omega_N t+\alpha_{22}^{(N)}+2m\varphi_1\right)+\cos\left(\omega_N t+\alpha_{22}^{(N)}-2m\varphi_1\right)\right]\right\}.$$

Эти частные производные вычисляются при невозмущенных значениях перемены действие-угол. Возмущения первого порядка для переменных действие-угол имеют следующий вид:

$$\delta I_1=-\int\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial\varphi_1}dt\,,\quad \delta\varphi_1=\frac{\partial^2 K_0}{\partial I_1^2}\delta I_1+\int\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_1}dt\,,\quad \delta\varphi_2=\int\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial I_2}dt\,. \tag{35}$$

И кроме того имеем: $\delta I_2=0$, $\delta I_3=0$, $\delta\varphi_3=0$.

Вычисляя интегралы в формулах (35), получим следующие выражения для возмущений первого порядка переменных действие- угол:

$$\delta I_1=-\int\frac{\partial K_1^{(1)}}{\partial\varphi_1}dt\,,$$

$$\delta I_1=\frac{G^2}{2JC_0}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_N m\left\{J_2^{(N)}J_{2m}\left[\frac{\cos\left(\omega_N t+\alpha_2^{(N)}+2m\varphi_1\right)}{\omega_N+2mn_1}-\frac{\cos\left(\omega_N t+\alpha_2^{(N)}-2m\varphi_1\right)}{\omega_N-2mn_1}\right]\right. \tag{36}$$

$$\left.+2C_{22}^{(N)}C_{2m}\left[\frac{\cos\left(\omega_N t+\alpha_{22}^{(N)}+2m\varphi_1\right)}{\omega_N+2mn_1}-\frac{\cos\left(\omega_N t+\alpha_{22}^{(N)}-2m\varphi_1\right)}{\omega_N-2mn_1}\right]\right\}.$$

Для возмущений других переменных действие-угол можно записать аналогичные формулы, которы здесь опустим для краткости изложения.

Аналогичные вычисления для возмущений переменных действие-угол можно реализовать для двух других составляющих возмущающего гамильтониана. Например, построим тригонометрическое представление для составляющей

$$K_1^{(2)} = \frac{1}{JC_0} G^2 \sum_{m=0} \left(2\delta S_{22} b_{31} b_{32} + \delta C_{21} b_{31} b_{33} + \delta S_{21} b_{32} b_{33} \right). \tag{37}$$

Далее следует воспользоваться тремя рядами Фурье

$$b_{31} b_{32} = \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} \sin 2m\varphi_1, \qquad D_{2m} = -\frac{\pi^2 \sqrt{1+\kappa^2}}{\mathbf{K}^2 \left(\kappa^2 + \lambda^2 \right)} \cdot \frac{m}{\operatorname{ch} 2md},$$

$$b_{31} b_{33} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{2m+1} \cos\left(2m+1\right)\varphi_1, \quad E_{2m+1} = \frac{\pi^2 \kappa}{2\mathbf{K}^2 \left(\kappa^2 + \lambda^2 \right)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{sh}\left(2m+1\right)d}, \tag{38}$$

$$b_{32} b_{33} = \sum_{m=0}^{\infty} F_{2m+1} \sin\left(2m+1\right)\varphi_1, \quad F_{2m+1} = -\frac{\pi^2 \kappa \sqrt{1+\kappa^2}}{2\mathbf{K}^2 \left(\kappa^2 + \lambda^2 \right)} \cdot \frac{2m+1}{\operatorname{ch}\left(2m+1\right)d}.$$

А также принятыми тригонометрическими представлениями вариаций коэффициентов геопотенциала:

$$\delta S_{22} = \sum_N S_{2.2}^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \beta_N^{(2.2)} \right), \tag{39}$$

$$\delta C_{21} = \sum_N C_{2.1}^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \alpha_N^{(2.1)} \right), \quad \delta S_{21} = \sum_N S_{2.1}^{(N)} \cos\left(\omega_N t + \beta_N^{(2.1)} \right).$$

В результате эту часть гамильтониана

$$K_1^{(2)} = \frac{2}{JC_0} G^2 \sum_{m=0}^{\infty} D_{2m} \delta S_{22} \sin 2m\varphi_1 \tag{40}$$

$$+ \frac{1}{JC_0} G^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left[E_{2m+1} \delta C_{21} \cos\left(2m+1\right)\varphi_1 + F_{2m+1} \delta S_{21} \sin\left(2m+1\right)\varphi_1 \right]$$

удается представить тригонометрическим разложением, на основе которого нетрудно вычислить возмущения переменных действие-угол первого порядка.

Аналогичным образом строится тригонометрическое разложение третьей части возмущающего гамильтониана:

$$K_1^{(3)} = -\frac{G}{C_0}\times \tag{41}$$

$$\times\left(\delta P\sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1}\cos\left(2m+1\right)\varphi_1 + \delta Q\sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m+1}\sin\left(2m+1\right)\varphi_1 + \delta R R_0 + \delta R\sum_{m=1}^{\infty} R_{2m}\cos 2m\varphi_1\right),$$

где используются вспомогательные разложения и обозначения:

$$b_{31} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{2m+1}\cos\left(2m+1\right)\varphi_1\,, \qquad P_{2m+1} = \frac{\pi}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}\left(2m+1\right)d}\,, \tag{42}$$

$$b_{32} = \sum_{m=0}^{\infty} Q_{2m+1}\sin\left(2m+1\right)\varphi_1\,, \qquad Q_{2m+1} = -\frac{\pi}{\mathbf{K}}\sqrt{\frac{1+\kappa^2}{\kappa^2+\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{sh}\left(2m+1\right)d}\,,$$

$$b_{33} = R_0 + \sum_{m=1}^{\infty} R_{2m}\cos 2m\varphi_1\,, \qquad R_{2m} = \frac{\pi\kappa}{\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} md}\,,$$

$$R_0 = \frac{\pi\kappa}{2\mathbf{K}\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}}\,.$$

Если воспользоваться формулами для вариаций компонент относительного кинетического момента:

$$\delta P = \sum_N P_N\cos\left(\omega_N t + \alpha_N\right), \quad \delta Q = \sum_N Q_N\cos\left(\omega_N t + \beta_N\right), \tag{43}$$

$$\delta R = \sum_N R_N\cos\left(\omega_N t + \gamma_N\right),$$

то получим тригонометрическое представление возмущающего гамильтониана. Повторяя вновь рассмотренную выше процедуру вычисления интегралов в (35), можно получить аналитические формулы для возмущений первого порядка переменных действие-угол, обусловленных циклическими (в частности годовыми и полугодовыми) вариациями геометрии масс планеты.

Здесь теория возмущений строится на основе общего невозмущенного движения произвольного твердого тела по Эйлеру-Пуансо. Эти результаты представляют интерес для исследования влияния перераспределения масс Земли и других небесных тел на движение полюсов и на осевое суточное вращение.

Библиографический список

1. Садов Ю.А. (1970) Переменные действие-угол в задаче Эйлера-Пуансо. ПММ. Т. 34. Вып. 5, 1970, С. 962-964.

2. Kinoshita H. First-order Perturbations of the Two Finite Body Problem. Publ. Astron. Soc. Japan., V.24, N4, 1972, pp. 423-457.

3. Козлов В.В. (1980) Методы качественного анализа в динамике твердого тела. М. Изд-во МГУ, 1980. - 232 с.

4. Баркин Ю.В., Борисов А.В. (1989) Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа и родственных задач динамики твердого тела // Депонировано в ВИНИТИ АН СССР. №5037-В-89. МВТУ им. Баумана. М., 1989, 103 с.

5. Barkin Yu.V. (1998) Unperturbed Chandler motion and perturbation theory of the rotation motion of deformable celestial bodies.// Astronomical and Astrophysical Transactions. V.17. Issue 3, 1998, pp. 179-219.

6. Аксенов Е.П. (1986) Специальные функции в небесной механике. М., Наука, 1986. - 320 с.

7. Архангельский Ю.А. Аналитическая динамика твердого тела. М.,"Наука", 1977. - 328с.

8. Barkin Yu.V. Perturbed rotational motion of weakly deformable celestial bodies // Astronomical and Astrophysical Transactions. Vol.19. Issue 1, 2000, pp. 19-65. doi: 10.1080/10556790008241350.